Referências e Bibliografia

[1] Beer, Gerald. Topologies on Closed and Closed Convex Sets. Kluwer Academic Publisher (1993).

[2] Griffel, D. H. Applied Functional Analysis. Ellis Horwood (1993).

[3] Jean-Pierre Aubin. Optima and Equilibria: An Introduction to Nonlinear Analysis. Springer-Velag (1993).

[4] Hiriart-Urruty, Jean-Baptiste e Lemaréchal, Claude. Convex Analysis and Minimization Algorithms, vol I e II. Springer Verlag (1993).

[5] Kolmogórov, A. N. e Fomím, S. V. Elementos de la Teoria de Funciones y del Análisis Fucional. Editorial Mir Moscu (1975).

[6] Lima, Elon Lages. Espaços Métricos. IMPA - Projecto Euclides, Livros Técnicos e Científicos Editora S. A. (1983).

[7] Lusternik, L. e Sobolev, V. Précis d'analyse fonctionnelle. Éditions Mir Moscou (1989).

[8] Rockafellar, Tyrrel. Convex Analysis. Princeton University Press (1969).

[9]Rockafellar, Tyrrell. Conjugate Duality and Optimization. SIAM - Regional Conference Series in Applied Mathematics (1989).

[10] Sims, Benjamin T. Fundamentals of Topology. Macmillan Publishing Co., Inc. (1976).

Apêndice A - Resolução dos Exercícios Propostos

A.1 Resolução dos exercícios do capítulo 1.

Exercício 1.19

Com efeito, de acordo com o teorema 1.10, f é semi-contínua inferior sse todas as suas secções inferiores são fechadas, i. e, sse $\forall \alpha \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ $S(f,\alpha)=\{x\in X: f(x)\leq\alpha\}$ é um conjunto fechado. No entanto $S(f,\alpha)$ é fechado sse $X\backslash S(f,\alpha)=\{x\in X: f(x)>\alpha\}$ é aberto.

Exercíco 1.20

a) Sejam x e y dois pontos arbitrários de $S_K(f,\lambda)$, então

$$\|x-y\|^2=2\|x-u\|^2+2\|y-u\|^2-4\|\frac{x+y}{2}-u\|^2 \Leftrightarrow d^2(x,y)=4f(x)+4f(y)-8f(\frac{x+y}{2})$$

Uma vez que $x,y\in S_K(f,\lambda)$, vem que

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\leq\lambda \\ f(y)\leq\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 4f(x)+4f(y)\leq 8\lambda \quad \text{e} \quad -8f(\frac{x+y}{2})\leq -8v,$$

Nestas condições conclui-se que

$$\forall x,y\in S_K(f,\lambda)\ d^2(x,y)\leq 8(\lambda-v) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x,y\in S_K(f,\lambda)\ d(x,y)\leq \sqrt[2]{8(\lambda-v)}$$

$$\Leftrightarrow \quad Diam[S_K(f,\lambda)]\leq \sqrt[2]{8(\lambda-v)}.$$

b) Considerando-se a sucessão de subconjuntos fechados [31]

$$\{S_K(f,v+\frac{1}{n})\},$$

a qual tende para um conjunto fechado [32] cujo diâmetro é zero [33], e tendo em conta que X é completo, conclui-se que $\{S_K(f,v+\frac{1}{n})\}$ converge para um conjunto singular $\{x^*\}$.

Uma vez que K é fechado e $K\supseteq S_K(f,v+\frac{1}{n})$ $\forall n\in\mathbf{N}$, pode concluir-se ainda que $x^*\in K$. Note-se que de cada um dos subconjuntos $S_K(f,v+\frac{1}{n})$ é possível retirar x_n de modo a formar uma sucessão de Cauchy, $\{x_n\}$, que converge para x^*. Dado que $f(x_n)\leq v+\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbf{N}$, vem que $f(x^*)\leq v$, pelo que x^* é um mínimo de f(x) em K.

Resta, assim, provar que x^* é único. Suponha-se que existe $x^{**}\in K$, tal que $f(x^{**})\leq v$, ou seja, tal que $f(x^{**})=f(x^*)=v$. Logo vem que

$$\|x^*-x^{**}\|^2=2\|x^*-u\|^2+2\|x^{**}-u\|^2-4\|\frac{x^*+x^{**}}{2}-u\|^2\leq 8(v-v)=0,$$

---

[31] A conclusão de que são fechados, decorre do facto de se tratar da intersecção de K com a bola fechada $B(u,\sqrt[2]{2(v+\frac{1}{n})})=\{x\in X: \frac{1}{2}\|x-u\|^2\leq v+\frac{1}{n}\}$.

[32] Dado que tende para a intersecção de uma família de fechados, i. e, para $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} S_K(f,v+\frac{1}{n})$.

[33] Observe-se que, de acordo com a), $Diam[S_K(f,v+\frac{1}{n})]\leq\sqrt[2]{\frac{8}{n}}$.

uma vez que $2\|x^*-u\|^2+2\|x^{**}-u\|^2=4f(x^*)+4f(x^{**})=8v$, $-4\|\frac{x^*+x^{**}}{2}-u\|^2=-8f(\frac{x^*+x^{**}}{2})$, e $-8f(\frac{x^*+x^{**}}{2})\leq -8v$, donde se tira que $x^*=x^{**}$.

A.2 - Resolução dos exercícios do capítulo 2.

Exercício 2.8

Por hipótese E é um e.m. completo; g uma função lipschitziana, logo é contínua, e sendo contínua tem gráfico fechado. Por outro lado a função f (tal como foi definida) é estrita e não negativa (logo limitada inferiormente). No que diz respeito à condição (9) ela decorre da igualdade $f(x)=d(x,g(x))+f(g(x))$.

A.3 - Resolução dos exercícos propostos no capítulo 3.

Exercício 3.22

a) A função f é quase-convexa sse $\forall\lambda\in\mathbf{R}$, $S(f,\lambda)$ é convexo, logo sendo

$$\alpha=\inf_{x\in X} f(x) \text{ e } K=\cap_{\lambda>\alpha} S(f,\lambda),$$

vem que K é a intersecção de uma família de conjuntos convexos que por conseguinte é convexa.

b) Seja $a\in K$ então, dado que $f(a)\leq f(x)\ \forall x\in X$, $\forall\lambda<f(a)$ tem-se que $\forall B(a,\delta)$ e $\forall x\in B(a,\delta)\ \lambda\leq f(x)$ (condição mais do que suficiente para a semi-continuidade inferior).

Exercício 3.23

Sendo $f_1, f_2, \ldots, f_p$ funções lipschitzianas de X em $\mathbf{R}$, com constantes de Lipschitz, respectivamente, $c_1, c_2, \ldots, c_p$, sabe-se que

$$\forall x,y\in X\ d(f_i(x),f_i(y))\leq c_i\|x-y\|\ \forall i\in\{1, 2, \ldots, p\}.$$

Logo, sendo $f(x)=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i f_i(x)$, vem que

$$\begin{aligned} d(f(x),f(y)) &= |\sum_{i=1}^{p}\alpha_i f_i(x)-\sum_{i=1}^{p}\alpha_i f_i(y))| \\ &= |\sum_{i=1}^{p}\alpha_i (f_i(x)-f_i(y))| \\ &\leq \sum_{i=1}^{p}|\alpha_i||f_i(x)-f_i(y)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{p}|\alpha_i|c_i\|x-y\| \\ &= (\sum_{i=1}^{p}|\alpha_i|c_i)\|x-y\|. \end{aligned}$$

Exercício 3.24

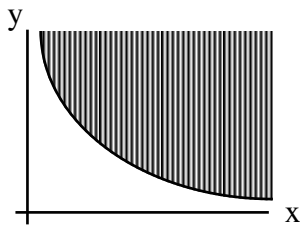
a) Dado que X é um espaço métrico (com a métrica induzida pela norma de Hilbert), basta provar que toda a sucessão de M+N (M-N) admite uma subsucesão

convergente. Com efeito seja $\{x^k\}$ uma sucessão de M+N (M-N), i. e, para cada $k\in\mathbf{N}$, $\exists y^k\in M$ e $\exists z^k\in N$ tal que $x^k=y^k+z^k$ ($x^k=y^k-z^k$). Logo, dado que M é são compacto existe uma subsucessões $\{y^{k'}\}$ convergente para $y\in M$. Por outro lado, a partir da sucessão $x^{k'}=y^{k'}+z^{k'}$, dado que N também é compacto existe uma subsucessão da sucessaão $\{z^{k'}\}$, $\{z^{k''}\}$, convergente para $z\in N$. Como consequência (dado que $\{y^{k''}\}$ também converge para $y\in M$) vem que a subsucessão de $\{x^k\}$, $\{x^{k''}=y^{k''}+z^{k''}\}$, converge para y+z. Logo $\{x^{k''}\}$ converge para $y+z\in M+N$.

b) Seja $\{x^k\}$ uma sucessão de pontos de M+N (M-N) convergente para x. Então, para cada $k\in\mathbf{N}$, $\exists y^k\in M$ e $\exists z^k\in N$ tal que $x^k=y^k+z^k$ ($x^k=y^k-z^k$). Dado que M é compacto existe um subsucessão de $\{y^k\}$, $\{y^{k'}\}$, convergente para $y\in M$.

Logo $z^{k'}=x^{k'}-y^{k'}$ ($z^{k'}=y^{k'}-x^{k'}$) converge para $x-y\in N$ ($y-x\in N$), dado que N é fechado pelo que $x=y+x-y\in M+N$ ($x=y-(y-x)\in M-N$).

c) Considere-se o seguinte contra-exemplo: seja $M=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: xy=1 \text{ e } x>0\}$ e seja $N=\{(0,y)\in\mathbf{R}^2: y\le 0\}$, então M não é um conjunto convexo mas M-N corresponde à região de $\mathbf{R}^2$ que está acima da curva $y=\frac{1}{x}$ com x>0, a qual define um conjunto convexo.



d) Embora os conjuntos $M=\{(x,0)\in\mathbf{R}^2: x\ge 0\}$ e $N\{(0,y)\in\mathbf{R}^2: y\le 0\}$ não sejam compactos, M-N é um conjunto fechado.

A.4 - Resolução do exercícios propostos no capítulo 4.

Exercício 4.6

1. Dado que $f(x)\le g(x)\ \forall x\in X$, $\forall p\in X^*\ \langle p,x\rangle - g(x) \le \langle p,x\rangle - f(x)\ \forall x\in X$, logo $\forall p\in X^*\ \sup_{x\in X}[\langle p,x\rangle - g(x)] \le \sup_{x\in X}[\langle p,x\rangle - f(x)]$, o que é equivalente a $\forall p\in X^*$ $f^*(p)\le g^*(p)$.

2. $\forall p\in X^*\ (f\circ A)^*(p) = \sup_{x\in X}[\langle p,x\rangle - f(Ax)] = \sup_{x\in X}[\langle p,A^{-1}y\rangle - f(y)]$
$= \sup_{x\in X}[\langle A^{*-1}p,y\rangle - f(y)] = f^*(A^{*-1}(p))$.

3. $\forall p\in X^*\quad g^*(p) = \sup_{x\in X}[\langle p,x\rangle - g(x)] = \sup_{x\in X}[\langle p,x\rangle - f(x-x_0) - \langle p_0,x\rangle - \alpha]$
$= \sup_{x\in X}[\langle p-p_0,x\rangle - f(x-x_0)] - \alpha$
$= \sup_{x\in X}[\langle p-p_0,x\rangle - f(x-x_0) - \langle p-p_0,x_0\rangle + \langle p-p_0,x_0\rangle] - \alpha$

$$= \sup_{x\in X}[<p-p_0,x-x_0> - f(x-x_0)] + <p-p_0,x_0> - \alpha$$
$$= \sup_{y\in X}[<p-p_0,y> - f(y)] + <p,x_0> - (<p_0,x_0> + \alpha)$$
$$= f^*(p-p_0) + <p,x_0> - (\alpha + <p_0,x_0>).$$

4. $\forall p\in X^*$ $\quad g^*(p) = \sup_{x\in X}[<p,x> - g(x)] = \sup_{x\in X}[<p,x> - f(\lambda x)]$
$$= \sup_{x\in X}[<\frac{p}{\lambda},\lambda x> - f(\lambda x)] = \sup_{y\in X}[<\frac{p}{\lambda},y> - f(y)]$$
$$= f^*(\frac{p}{\lambda}).$$

5. $\forall p\in X^*$ $\quad g^*(p) = \sup_{x\in X}[<p,x> - g(x)] = \sup_{x\in X}[<p,x> - \lambda f(x)]$
$$= \sup_{x\in X}[\lambda<\frac{p}{\lambda},x> - \lambda f(x)] = \lambda(\sup_{x\in X}[<\frac{p}{\lambda},x> - f(x)])$$
$$= \lambda f^*(\frac{p}{\lambda}).$$

Exercício 4.7

a) Uma vez que a função $q\rightarrow h(x,q)$ é a conjugada da função $y\rightarrow g(x,y)$, que por hipótese é estrita, pelo teorema 4.2 conclui-se (i). Por outro lado, uma vez que a função $(x,y)\rightarrow -<q,y>+g(x,y)$ é uma função convexa, por aplicação do teorema 3.8 vem que $\forall q\in Y^*$, a função $x\rightarrow h(x,q)=\sup_{y\in Y}[<q,y>-g(x,y)]=-\inf_{y\in Y}[-<q,y>+g(x,y)]$, é uma função côncava (dado que $\inf_{y\in Y}[-<q,y>+g(x,y)]$ é convexa), o que permite verificar (ii).

b) Dado que $g(x,y)$ é semi-contínua inferior e convexa, pelo teorema 4.3 conclui-se que a função $y\rightarrow g(x,y)$ é igual à sua biconjugada, $y\rightarrow \sup_{q\in Y^*}[<q,y>-h(x,q)]$, donde se deduz (i). Por sua vez, a dedução de (ii) faz-se do seguinte modo:

$$g^*(p,q) = \sup_{(x,y)\in X\times Y}[<p,x>+<q,y>-g(x,y)]$$
$$= \sup_{x\in X}[<p,x>+\sup_{y\in Y}[<q,y>-g(x,y)]]$$
$$= \sup_{x\in X}[<p,x>+h(x,q)].$$

c) Uma vez que, conforme decorre de b) (ii), a função $p\rightarrow g^*(p,q)$ é a conjugada da função $x\rightarrow -h(x,q)$, e uma vez que, por a) (ii), esta função é convexa e, por hipótese, semi-contínua inferior, como consequência, da aplicação do teorema 4.3, decorre que

$$-h(x,q)=\sup_{p\in X^*}[<p,x>-g^*(p,q)] \Leftrightarrow -h(x,q)=-\inf_{p\in X^*}[-<p,x>+g^*(p,q)]$$
$$\Leftrightarrow h(x,q)=\inf_{p\in X^*}[g^*(p,q)-<p,x>],$$

o que completa a prova pedida.

A.5 Resolução dos exercícios do capítulo 5.

Exercício 5.7

A prova decorre da aplicação do teorema 4.4 (de Fenchel), com $g(x)=\frac{1}{2\lambda}\|x\|^2$ e tendo em conta que a conjugada desta função corresponde a $g^*(p)=\frac{\lambda}{2}\|p\|^{*2}$.

Exercício 5.8

1. Seja $K=Ep(f)=\{(x,\lambda)\in Dom(f)x\mathbf{R}: f(x)\leq\lambda\}$.

Para $(p,-1)\in X^*x\mathbf{R}$, vem que $\sigma_{K(p,-1)}=\sup_{(x,\lambda)\in K}[<p,x>-\lambda]$. Dado que $\forall x\in Dom(f)$,

$f(x)\leq\lambda \Leftrightarrow \forall x\in Dom(f), -\lambda\leq -f(x) \Leftrightarrow \forall x\in Dom(f)\ <p,x>-\lambda\leq <p,x>-f(x)$.

Logo vem ,
$$\begin{aligned}\sigma_K(p,-1) &= \sup_{(x,\lambda)\in K}[<p,x>-\lambda]\\ &= \sup_{x\in Dom(f)}[<p,x>-f(x)]\\ &= \sup_{x\in X}[<p,x>-f(x)]\\ &= f^*(p).\end{aligned}$$

2. Sejam M e N dois subconjuntos de X tais que $M\supseteq N$. Então vem que
$$\begin{aligned}\sigma_N(p) &= \sup_{x\in N}<p,x>\\ &\leq \sup_{x\in M}<p,x>\\ &= \sigma_M(p).\end{aligned}$$

Por outro lado, tendo em conta que $b(K)=Dom(\sigma_K)=\{p\in X^*: \sigma_K(p)<+\infty\}$,

$$p\in b(M)=Dom(\sigma_M) \Rightarrow \sigma_M(p)<+\infty \Rightarrow \sigma_N(p)<+\infty \Rightarrow p\in Dom(\sigma_N)=b(N).$$

Logo $b(N)\supseteq b(M)$.

3. Considerem-se os subconjuntos de X_i, K_i ($X_i\supseteq K_i$) para i=1, … , n, e seja

$X=\prod_{i=1}^{n}X_i$.
$$\begin{aligned}\sigma_{K_1xK_2x\ldots xK_n}(p_1,p_2,\ldots,p_n) &= \sup_{x\in X}[\sum_{i=1}^{n}<p_i;x_i>]\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sup_{x_i\in X_i}[<p_i;x_i>]\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sigma_{K_i}(p_i).\end{aligned}$$

Por outro lado,
$$\begin{aligned}p=(p_1,\ldots,p_n)\in b(\prod_{i=1}^{n}K_i) &\Leftrightarrow \sigma_{K_1xK_2x\ldots xK_n}(p)<+\infty\\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\sigma_{K_i}(p_i)<+\infty\\ &\Leftrightarrow \sigma_{K_i}(p_i)<+\infty\ \forall i\in\{1,2,\ldots,n\}\\ &\Leftrightarrow p_i\in b(K_i)\ \forall i\in\{1,2,\ldots,n\}\\ &\Leftrightarrow p=(p_1,\ldots,p_n)\in\prod_{i=1}^{n}b(K_i).\end{aligned}$$

4. Seja $K=K_1+K_2$. Então
$$\begin{aligned}\sigma_K(p) &= \sup_{x\in K}<p,x>\\ &= \sup_{\substack{x_1\in K_1\\ x_2\in K_1}}<p,x_1+x_2>\\ &= \sup_{x_1\in K_1}<p,x_1> + \sup_{x_2\in K_2}<p,x_2>\\ &= \sigma_{K_1}(p)+\sigma_{K_2}(p).\end{aligned}$$
$$p\in b(K) \Leftrightarrow \sigma_K(p) < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{K_1}(p) + \sigma_{K_2}(p) < +\infty$$
$$\Leftrightarrow \sigma_{K_1}(p)<+\infty \text{ e } \sigma_{K_2}(p)<+\infty$$
$$\Leftrightarrow p\in b(K_1)\cap b(K_2).$$

5. Seja C um cone convexo fechado.

$$\sigma_{K+C}(p) = \sup_{z\in K+C} \langle p,z\rangle$$
$$= \sup_{x\in K} \langle p,x\rangle + \sup_{u\in C} \langle p,u\rangle$$
$$= \sigma_K(p) + \sigma_C(p).$$

Dado que $\sigma_C(p)=\begin{cases} 0 & \text{se } p\in C^* \\ +\infty & \text{se } p\notin C^* \end{cases}$, vem que $\sigma_{K+C}(p)=\begin{cases} \sigma_K(p) & \text{se } p\in C^* \\ +\infty & \text{se } p\notin C^* \end{cases}$.

$$p\in b(K+C) \Leftrightarrow \sigma_{K+C}(p) <+\infty$$
$$\Leftrightarrow \sigma_K(p)+\sigma_C(p)<+\infty$$
$$\Leftrightarrow \sigma_K(p)<+\infty \text{ e } \sigma_C(p)<+\infty$$
$$\Leftrightarrow p\in b(K)\cap C^*.$$

6. $$\sigma_{K+\{x_0\}}(p) = \sup_{z\in K+\{x_0\}} \langle p,z\rangle$$
$$= \sup_{x\in K} \langle p,x\rangle + \langle p,x_0\rangle$$
$$= \sigma_K(p) + \langle p,x_0\rangle$$

$$p\in b(K+\{x_0\}) \Leftrightarrow \sigma_{K+\{x_0\}}(p)<+\infty$$
$$\Leftrightarrow \sigma_K(p) \langle p,x_0\rangle < +\infty$$
$$\Leftrightarrow \sigma_K(p) < +\infty$$
$$\Leftrightarrow p\in b(K).$$

Exercício 5.9

a) $$p\in b(M\cap A^{-1}(N)) \Leftrightarrow \sigma_{M\cap A^{-1}(N)}(p) < +\infty$$
$$\Leftrightarrow \psi^*_{M\cap A^{-1}(N)}(p) < +\infty$$
$$\Leftrightarrow \sup_{x\in X^*} [\langle p,x\rangle - \psi_{M\cap A^{-1}(N)}(x)] < +\infty.$$

Dado que

$$\psi_{M\cap A^{-1}(N)}(x) = \psi_M(x) + \psi_{A^{-1}(N)}(x),$$

vem que

$$\sigma_{M\cap A^{-1}(N)}(p) = \sup_{x\in X^*} [\langle p,x\rangle - \psi_M(x) - \psi_{A^{-1}(N)}(x)]$$
$$= \sup_{x\in X^*} [\langle p',x\rangle - \psi_M(x) + \langle p'',x\rangle - \psi_{A^{-1}(N)}(x)],$$

onde p' e p'' são tais que p=p'+p'', logo vem que

$$\sigma_{M\cap A^{-1}(N)}(p'+p'') \le \sup_{x\in M} \langle p',x\rangle + \sup_{x\in A^{-1}(N)} \langle p'',x\rangle$$
$$= \sigma_N(p') + \sigma_{A^{-1}(M)}(p''),$$

Logo,

$$\sigma_N(p')+\sigma_{A^{-1}(M)}(p'')<+\infty \Rightarrow \sigma_{M\cap A^{-1}(N)}(p'+p'')<+\infty,$$

ou seja,

$$p\in b(N)+b(A^{-1}(M)) \Rightarrow p\in b(N\cap A^{-1}(M))$$

o que equivale a afirmar que

$$b(N\cap A^{-1}(M))\supseteq b(N)+b(A^{-1}(M)).$$

b) Para esta prova, vamos utilizar a propriedade III das propriedades associadas às funções conjugadas, substituindo a função $f:X\rightarrow\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ por ψ_M e a função

$$g:Y\rightarrow\mathbf{R}\cup\{+\infty\} \text{ por } \psi_N.$$

Nestas condições, tendo em conta que ψ_M e ψ_N são estritas (dado que M e N são não vazios uma vez que $0\in A(M)-N$), semi-contínuas inferiores (dado que tanto M como N são fechados) e convexas (dado que M e N são convexos) e ainda que $0\in \text{Int}(A(\text{Dom}(\psi_M))-\text{Dom}(\psi_N))$ (note-se que, por hipótese, $0\in \text{Int}(A(M)-N)$ e $M=\text{Dom}(\psi_M)$ e $N=\text{Dom}(\psi_N)$), aplicando a referida propriedade, vem que $\forall p\in A^*(\text{Dom}(\psi^*_N))+\text{Dom}(\psi^*_M)$, $\exists q'\in Y^*$ tal que

$$\begin{aligned}(\psi_M+\psi_N\circ A)^*(p) &= \psi^*_M(p-A^*q')+\psi^*_N(q')\\ &= \inf_{q\in Y^*}[\psi^*_M(p-A^*q)+\psi^*_N(q)].\end{aligned}$$

Dado que $\psi_M+\psi_N\circ A=\psi_{M\cap A^{-1}(N)}$ [34] vem que

$$(\psi_M+\psi_N\circ A)^*=\psi^*_{M\cap A^{-1}(N)}=\sigma_{M\cap A^{-1}(N)}.$$

Por outro lado, uma vez que $\psi^*_N=\sigma_N$ e $\psi^*_M=\sigma_M$, obtém-se

$$A^*(\text{Dom}(\psi^*_N))+\text{Dom}(\psi^*_M)=A^*(b(N))+b(M),$$

logo $p\in A^*(\text{Dom}(\psi^*_N))+\text{Dom}(\psi^*_M) \Leftrightarrow p\in A^*(b(N))+b(M)$.

Como consequência de todas estas transformações, a propriedade III das funções conjugadas pode escrever-se do seguinte modo:

$\forall p\in A^*(b(N))+b(M)$, $\exists q'\in Y^*$ tal que

$$\begin{aligned}\sigma_{M\cap A^{-1}(N)}(p) &= \sigma_M(p-A^*q') + \sigma_N(q')\\ &= \inf_{q\in Y^*}[\sigma_M(p-A^*q) + \sigma_N(q)].\end{aligned}$$

A prova de que $q'\in b(N)$, decorre da equação

$$\sigma_M(p-A^*q')+\sigma_N(q') = \inf_{q\in Y^*}[\sigma_M(p-A^*q) + \sigma_N(q)],$$

tendo em conta que, de acordo com a demonstração apresentada para a propriedade III, para $v^*=\inf_{q\in Y^*}[\sigma_M(p-A^*q)+\sigma_N(q)]$, vem que $v^*<+\infty$ e, por consequência, que

$$\sigma_M(p-A^*q')+\sigma_N(q')<+\infty \Leftrightarrow \sigma_M(p-A^*q')<+\infty \text{ e } \sigma_N(q')<+\infty,$$

o que é equivalente a afirmar-se que $p-A^*q'\in b(M)$ e $q'\in b(N)$.

---

[34] Tendo em conta que $\psi_N(Ax)=\begin{cases}0 \text{ se } Ax\in N\\ +\infty \text{ se } Ax\notin N\end{cases}$, conclui-seque $\psi_N(Ax)=\begin{cases}0 \text{ se } x\in A^{-1}(N)\\ +\infty \text{ se } x\notin A^{-1}(N)\end{cases}$, donde vem que $\psi_N\circ A=\psi_{A^{-1}(N)}$.