5. Funções de Suporte e Aplicações

Conforme foi já referido um subconjunto K ($X \supseteq K$) pode caracterizar-se à custa da sua função indicadora ψ_K definida por $\psi_K(x)=0$ se $x \in K$ e $\psi_K(x)=+\infty$ se $x \notin K$, a qual apresenta como conjugada a seguinte função:

$$\psi^*_K(p)=\sup_{x \in K} \langle p,x \rangle.$$

5.1 Definição

A função conjugada, ψ^*_K, da função indicadora de um subconjunto K do espaço de Hilbert X, designa-se por função de suporte de K e é usualmente denotada por

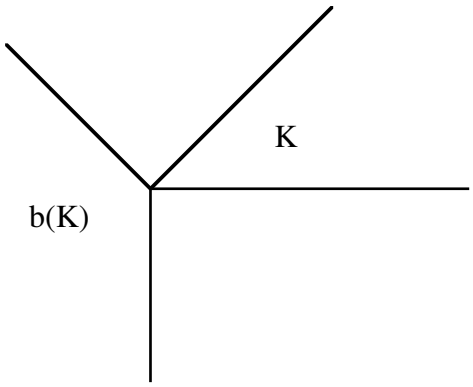
$$\sigma_K(p):=\sup_{x \in K} \langle p,x \rangle.$$

O domínio de $\sigma_K(.)$ designa-se por cone de barreira de K e denota-se usualmente por $b(K):=\{p \in X^*: \sigma_K(p)<+\infty\}$. Seguem-se alguns exemplos de imagens de funções de suporte e respectivos cones de barreira.

a) Se $K=\{x_0\}$, então $\sigma_K(p)=\sup_{x \in \{x_0\}} \langle p,x \rangle = \langle p,x_0 \rangle$ e $b(K)=X^*$.

b) Se $K=\{x \in X: \|x\| \leq 1\}$, então $\sigma_K(p)=\|p\|^*$ e $b(K)=X^*$.

c) Se K é um cone, então $\sigma_K(p)=\psi_{K^*}(p)$ e $b(K)=K^*$.



d) Se K é um subespaço vectorial, então $\sigma_K(p)=\psi_{K^\perp}(p)$ e $b(K)=K^\perp$, onde $K^\perp=\{p \in X^*: \forall x \in K, \langle p,x \rangle=0\}$ é o subespaço orto de K.

Note-se que se $0 \in K$ então $\sigma_K(p) \geq 0$ e ainda se K é simétrico (i. e, se $x \in K$ então $-x \in K$) então σ_K é uma função par (ou seja, $\sigma_K(p)=\sigma_K(-p)$).

5.2 Teorema

Qualquer função de suporte de um subconjunto não vazio K de X, σ_K, é convexa, semi-contínua inferior e homogénea positiva de X* em $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$. Por outro lado, qualquer função estrita $\sigma: X^* \to \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ que é convexa, semi-contínua inferior e homogénea positiva, é função de suporte do conjunto $K_\sigma := \{x \in X: \forall p \in X^*, \langle p,x\rangle \leq \sigma(p)\}$.

Prova:

Considere-se a função de suporte de um subconjunto arbitrário não vazio K ($X \supseteq K$), σ_K, então, de acordo com a definição 5.1, $\sigma_K(p)=\sup_{x\in K} \langle p,x\rangle$. Logo, trata-se do envelope superior de uma família de funções convexas (e côncavas) e semi-contínuas inferiores (e superiores), logo é uma função convexa e semi-contínua inferior. Por outro lado, para $\lambda \in]0,+\infty[$ vem que

$$\sigma_K(\lambda p)=\sup_{x\in K} \langle \lambda p,x\rangle = \lambda \sup_{x\in K} \langle p,x\rangle = \lambda \sigma_K(p),$$

concluindo-se assim que é homogénea positiva.

Suponha-se que $\sigma: X^* \to \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ é uma função estrita, convexa, semi-contínua inferior e homogénea positiva.

Se $x \in K_\sigma$ (i. e, $\forall p \in X^*, \langle p,x\rangle - \sigma(p) \leq 0$), então $\sigma^*(x)=0$, uma vez que

$$\begin{aligned} \sigma^*(x) &= \sup_{p\in X^*} [\langle p,x\rangle - \sigma(p)] \\ &\leq 0 \qquad\qquad \text{(dado que } x \in K_\sigma\text{)}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \sigma^*(x) &\geq \langle 0,x\rangle - \sigma(0) \\ &= -\sigma(0) \\ &\geq 0 \qquad\qquad \text{(dado que } \mathrm{Dom}(\sigma)\neq\emptyset \text{ e, para } p\in \mathrm{Dom}(\sigma), \\ &\qquad \sigma(0) \leq \lim_{\lambda\to 0^+} \inf \sigma(\lambda p) = \lim_{\lambda\to 0^+} \inf[\lambda\, \sigma(p)]=0). \end{aligned}$$

Conseuqentemente vem que $\sigma^*(x)=0$.

Se $x \notin K_\sigma$, então $\exists p_0 \in X^*$ tal que $\langle p_0,x\rangle - \sigma(p_0) > 0$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned} \sigma^*(x) &\geq \sup_{\lambda>0} [\langle \lambda p_0,x\rangle - \sigma(\lambda p_0)] \\ &= \sup_{\lambda>0} \lambda [\langle p_0,x\rangle - \sigma(p_0)] \\ &= (\sup_{\lambda>0} \lambda)[\langle p_0,x\rangle - \sigma(p_0)] \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Conclui-se assim que σ^* corresponde à função indicadora de K_σ (i. e, $\sigma^*=\psi_{K_\sigma}$), logo, $\psi^*_{K_\sigma}=\sigma^{**}$, corresponde à função de suporte de K_σ. Uma vez que, pelo teorema 4.3, $\sigma=\sigma^{**}$, conclui-se o que se pretende (i. e, que σ é a função de suporte de K_σ).

◊

5.3 - Teorema

Seja K um subconjunto não vazio convexo fechado de X.

a) $K=\{x\in X: \forall p\in X^*, \langle p,x\rangle\leq\sigma_K(p)\}$.

b) Se K é um cone, então $K=(K^*)^*$.

c) Se K é um subespaço vectorial, então $K=(K^{\perp})^{\perp}$.

Prova:

a) Dado que K é não vazio, convexo e fechado, ψ_K é estrita, convexa e semi-contínua inferior e, consequentemente, $\psi_K = \psi^{**}_K = \sigma^*_K$ (uma vez que $\psi^*_K=\sigma_K$). Nestas condições vem que

$$\begin{aligned} x\in K \quad\Leftrightarrow\quad \psi_K(x) &= \sigma^*_K(x) \\ &= \sup_{p\in X^*}[\langle p,x\rangle-\sigma_K(p)] \\ &= 0 \\ \Leftrightarrow\quad \forall p\in X^*,\ &\langle p,x\rangle-\sigma_K(p)\leq 0. \end{aligned}$$

b) Tendo em conta que $\psi^*_K(p)=\sigma_K(p)=\sup_{x\in K}\langle p,x\rangle$, pelo facto de K ser um cone, vem que

$$\sigma_K(p)=\begin{cases} 0 & \text{se } p\in K^* \\ +\infty & \text{se } p\notin K^* \end{cases},$$

uma vez que $K^*=\{p\in X^*: \forall x\in K, \langle p,x\rangle\leq 0\}$ e se $p\notin K^*$ então $\exists x'\in K$ tal que $\langle p,x'\rangle>0$, donde (dado que $\forall\lambda>0$, $\lambda x'\in K$) se tira que

$$\sigma_K(p)\geq\sup_{\lambda>0}\langle p,\lambda x'\rangle=(\sup_{\lambda>0}\lambda)\langle p,x'\rangle=+\infty.$$

Nestas condições, conclui-se que $\psi^*_K=\sigma_K=\psi_{K^*}$ e, um vez que K^* é um cone, decorre novamente que $\psi^*_{K^*}=\sigma_{K^*}=\psi_{K^{**}}$ [29].

Por outro lado, tendo em conta que $\psi_{K^{**}}$ corresponde à função de suporte de K^*, ou seja, $\psi_{K^{**}}(x)=\sigma_{K^*}(x)=\sup_{p\in K^*}\langle p,x\rangle$, (dado que K^* é também um cone) vem que

$$\psi_{K^{**}}(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x\in Ad(K) \\ +\infty & \text{se } x\notin Ad(K) \end{cases},$$

onde Ad(K) identifica a aderência de K.

---

[29] Em alternativa, a demonstração poderia continuar do seguinte modo: nestas condições, tém-se que i) $\psi^{**}_K=\psi_{K^{**}}$, e uma vez que ψ_K é uma função estrita (dado que $k\neq\emptyset$), convexa (dado que K é convexo) e semi-contínua inferior (dado que K é fechado), pelo teorema 4.3 tém-se que ii) $\psi_K=\psi^{**}_K$. Logo de i) e ii) decorre que $\psi_K=\psi_{K^{**}}$, o que completa a prova.

Assim, conclui-se que $\psi_{K^{**}}$ corresponde à função indicadora de Ad(K) e, como K é fechado (K=Ad(K)), $\psi_{K^{**}}$ corresponde á função indicadora de K. Logo K**=K.

c) Dado que K é um subespaço vectorial, se $x\in K$ então $-x\in K$. Logo, da definição de cone polar de K, $K^*=\{p\in X^*: \forall x\in K, \langle p,x\rangle\leq 0\}$, decorre que

$$K^*=\{p\in X^*: \forall x\in K, \langle p,x\rangle=0\},$$

ou seja, $K^*=K^{\perp}$. Como consequência, tendo em conta que K é fechado e $K^{\perp}$ é um subespaço vectorial, aplicando b), vem que $K=(K^{\perp})^{\perp}$.

◊

5.4 - Teorema

Suponha-se que $A\in L(X,Y)$ é um operador linear contínuo de X em Y, e o cone K é um subconjunto de X.

Então $(A(K))^*=A^{*-1}(K^*)$ e se A(K) é um cone convexo fechado, então $A(K)=(A^{*-1}(K^*))^*$.

Em particular $Ker(A^*)=(Im(A))^{\perp}$ e se Im(A) é fechado, então $Im(A)=(Ker(A^*))^{\perp}$.

Prova:

Com efeito, $p\in(A(K))^*$ sse $\forall x\in K, \langle p,Ax\rangle=\langle A^*p,x\rangle\leq 0$, i. e, sse $A^*p\in K^*$. Logo $p\in(A(K))^*$ sse $p\in A^{*-1}(K^*)$, pelo que $(A(K))^*=A^{*-1}(K^*)$. Pelo teorema 5.3 b), se A(K) é um cone convexo fechado, vem que $A(K)=(A(K))^{**}=(A^{*-1}(K^*))^*$.

A segunda afirmação decorre do resultado anterior, tendo em conta que, para K=X, A(K)=A(X)=Im(A) e $K^*=X^{\perp}=\{0\}$.

Logo, $[Im(A)]^{\perp}=[Im(A)]^*=[A(X)]^*=A^{*-1}(X^*)=A^{*-1}(X^{\perp})=A^{*-1}(\{0\})=Ker(A^*)$.

Adicionalmente, se Im(A) é espaço vectorial fechado, aplicando-se o teorema 5.3 c), obtém-se

$$Im(A)=[Im(A)]^{**}=[(Im(A))^{\perp}]^*=[Ker(A^*)]^*=[Ker(A^*)]^{\perp}.$$

◊

5.5 Teorema

Suponha-se que X é um espaço de Hilbert e que L é um operador linear contínuo de X em X*, que satisfaz as seguintes propriedades:

a) L=L*;

b) $\langle Lx,x\rangle\geq 0 \quad \forall x\in X$

c) Im(L) é fechado em X*.

Seja f uma função de X em $\mathbf{R}_+$ definida por $f(x)=\frac{1}{2}\langle Lx,x\rangle$. Então a sua conjugada é tal que

$$f^*(p) = \begin{cases} \frac{1}{2}\langle p,x\rangle \text{ com } x\in L^{-1}(p) & \text{se } p\in Im(L) \\ +\infty & \text{se } p\notin Im(L) \end{cases},$$

onde $L^{-1}(p)$ identifica a imagem recíproca de p.

Prova:

Dado que Im(L) é fechado e L=L*, do teorema anterior sabe-se que $Im(L)=[Ker(L)]^{\perp}$.

1. Se $p\notin Im(L)$, então $\exists x_0\in Ker(L)$ (pelo que $Lx_0=0$) tal que $\langle p,x_0\rangle$ é estritamente positivo. Logo

$$\begin{aligned} f^*(p) &\geq \sup_{\lambda>0}[\langle p,\lambda x_0\rangle - f(\lambda x_0)] \\ &= \sup_{\lambda>0}[\langle p,\lambda x_0\rangle - \frac{1}{2}\langle \lambda Lx_0,\lambda x_o\rangle] \\ &= \sup_{\lambda>0}[\langle p,\lambda x_0\rangle - \frac{1}{2}\langle 0,\lambda x_o\rangle] \\ &= \sup_{\lambda>0}\lambda[\langle p,x_0\rangle - 0] \\ &= (\sup_{\lambda>0}\lambda)\langle p,x_0\rangle = +\infty. \end{aligned}$$

2. Seja $p\in Im(L)$ e x' uma solução de p=Lx (i, e, tal que p=Lx'). Então $\psi(x,y)=\langle Lx,y\rangle$ é um semi-produto escalar e a desigualdade de Cauchy-Schwarz [30]implica

$$\langle Lx,y\rangle \leq \sqrt[2]{\langle Lx,x\rangle}\ \sqrt[2]{\langle Ly,y\rangle} \leq \frac{1}{2}\langle Lx,x\rangle+\frac{1}{2}\langle Ly,y\rangle$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } f^*(p') &= \sup_{y\in X}[\langle Lx',y\rangle - \frac{1}{2}\langle Ly,y\rangle] \\ &\leq \sup_{y\in X}[\frac{1}{2}\langle Lx',x'\rangle+\frac{1}{2}\langle Ly,y\rangle-\frac{1}{2}\langle Ly,y\rangle] \\ &\leq \frac{1}{2}\langle Lx',x'\rangle = \frac{1}{2}\langle p,x'\rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{2}\langle p,x'\rangle = \langle p,x'\rangle - \frac{1}{2}\langle Lx',x'\rangle \leq f^*(p).$$

Deste modo, mostramos que $f^*(p)=\frac{1}{2}\langle p,x'\rangle$ para todas as soluções x' da equação Lx=p.

◊

5.6 - Corolário

---

[30]Observe-se que, sendo $\psi(x,y)$ um semi-produto escalar, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz vem que $\psi(x,y)\leq\sqrt{\psi(x,x)}\sqrt{\psi(y,y)}$.

Seja X um espaço de Hilbert e $L\in L(X,X^*)$ o operador dual (de transposição). A função conjugada da função $f(x)=\frac{1}{2}||x||^2$ é a função f* definida por $f^*(p)=\frac{1}{2}(||p||^*)^2$, onde $||p||^*=\sup_{x\in X}\frac{<p,x>}{||x||}=\sqrt{<L^{-1}p,p>}$.

Prova:

O operador dual L, é um operador que satisfaz as hipóteses do teorema 5.5, que é sobrejectivo e que está associado às normas ||x|| e ||p||* pelas relações $||x||^2=<Lx,x>$ e $||p||^{*2}=<p,L^{-1}p>$. Do teorema anterior (5.5) decorre que

$$f^*(p) = \frac{1}{2}<p,L^{-1}p> = \frac{1}{2}\,||p||^{*2}$$

◊

Em alternativa à utilização do teorema 5.5, a igualdade estabelecida pelo corolário anterior, pode ser obtida, conforme segue.

$$\begin{aligned} f^*(p) &= \sup_{x\in X}[<p,x> - \frac{1}{2}||x||^2] \\ &= \frac{1}{2}\sup_{x\in X}[<2p,x> - ||x||^2] \\ &\le \frac{1}{2}\sup_{x\in X}(2||p||^*||x|| - ||x||^2). \end{aligned}$$

Da inequação $0\le(||p||^*-||x||)^2=||p||^{*2}+||x||^2-2||p||^*||x||$ vem que $2||p||^*||x||-||x||^2\le||p||^{*2}$, donde se tira que

$$f^*(p) \le \frac{1}{2}\sup_{x\in X}(||p||^{*2}) = \frac{1}{2}\,||p||^{*2}$$

Por outro lado, uma vez que $||x||^2=<Lx,x>$ e $f^*(p)\ge\frac{1}{2}[<2p,x>-<Lx,x>]\ \forall x\in X$, em particular, para $x_p\in X$ tal que $x_p=L^{-1}p$, vem que

$$\begin{aligned} f^*(p) &\ge \frac{1}{2}[<2p,x_p>-<Lx_p,x_p>] \\ &= \frac{1}{2}[2<p,L^{-1}p>-<p,L^{-1}p>] \\ &= \frac{1}{2}<p,L^{-1}p> \\ &= \frac{1}{2}||p||^{*2}. \end{aligned}$$

Assim, de $f^*(p)\le\frac{1}{2}||p||^{*2}\le f^*(p)$, conclui-se que $f^*(p)=\frac{1}{2}||p||^2$.

5.7 - Exercício

Sendo X um espaço de Hilbert e $f:X\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ uma função estrita, convexa e semi-contínua inferior tal que $Int(Dom(f))\neq\emptyset$, provar que

$$\forall\lambda>0,\ \inf_{x\in X}[f(x)+\frac{1}{2\lambda}||x||^2] + \inf_{p\in X^*}[f^*(p)+\frac{\lambda}{2}||p||^{*2}] = 0.$$

Como exercício, propõe-se ainda, a seguir, a prova de algumas fórmulas associadas às funções de suporte e aos cones de barreira, as quais podem ser deduzidas das propriedades das funções conjugadas.

5.8 - Exercício

Provar cada uma das seguintes afirmações.

1. Se f é uma função própria e K=Ep(f), então $\sigma_K(p,-1)=f^*(p)$.

2. Sendo M e N dois subconjuntos arbitrários de X, se $M\supseteq N$ então $b(N)\supseteq b(M)$ e $\sigma_N\leq\sigma_M$.

3. Sendo X_i, para i=1,…,n, espaços de Hilbert, se $X_i\supseteq K_i$, para i=1,…,n, então $b(\prod_{i=1}^{n}K_i)=\prod_{i=1}^{n}b(K_i)$ e $\sigma_{K_1x\ldots xK_n}(p_1,\ldots,p_n)=\sum_{i=1}^{n}\sigma_{K_i}(p_i)$.

4. Se K_1 e K_2 são dois subconjuntos arbitrários de X, então
$b(K_1+K_2)=b(K_1)\cap b(K_2)$ e $\sigma_{K_1+K_2}(p)=\sigma_{K_1}(p)+\sigma_{K_2}(p)$.

5. Sendo K um subconjunto não vazio arbitrário e C é um cone fechado convexo, ambos em X, então
$b(K+C)=b(K)\cap C^*$ e $\sigma_{K+C}(p)=\begin{cases}\sigma_K(p) \text{ se } p\in C^*\\ +\infty \quad \text{se } p\notin C^*\end{cases}$.

6. Sendo K um subconjunto de X e x_0 um ponto arbitrario também de X, verifica-se que $b(K+\{x_0\})=b(K)$ e $\sigma_{K+x_0}(p)=\sigma_K(p)+\langle p,x_0\rangle$.

5.9 Exercício

Se $A\in L(X,Y)$ é um operador linear contínuo do espaço de Hilbert X no espaço de Hilbert Y, M e N são subconjuntos fechados convexos, respectivamente, de X e Y ($X\supseteq M$ e $Y\supseteq N$), e $0\in \text{Int}(A(M)-N)$, então

a) $b(M\cap A^{-1}(N))\supseteq b(M)+b(A^{-1}(N))$

b) $\forall p\in A^*(b(N))+b(M)$, $\exists q\in b(N)$ tal que
$\sigma_{M\cap A^{-1}(N)}(p)=\sigma_M(p-A^*q')+\sigma_N(q')=\inf_{q\in Y^*}[\sigma_M(p-A^*q)+\sigma_N(q)]$.