4. Funções Conjugadas e Problemas de Minimização Convexa

Tendo presente que, de acordo com o teorema 3.13, se f é uma função estrita, semi-contínua inferior e convexa de X em $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$, então existe $p\in X^*$ e $\alpha\in\mathbf{R}$ tal que $f(x)\geq\langle p,x\rangle-\alpha \Leftrightarrow \alpha\geq\langle p,x\rangle-f(x)$. Mais geralmente, para uma função estrita arbitrária f de X em $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$, se para cada $p\in X^*$, escolhermos α tal que

$$\alpha:=\sup_{x\in X}[\langle p,x\rangle - f(x)]$$

vem que $\forall x\in X\ \alpha \geq \langle p,x\rangle - f(x)$. Esta escolha de α será identificada por f*(p), i. e,

$$f^*(p):=\sup_{x\in X}[\langle p,x\rangle - f(x)].$$

Um modo alternativo de encarar este tipo de funcionais lineares, consiste em substituir a minimização de uma função estrita f de X em $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ (a qual, muita vezes não é conhecida com precisão) por uma sua perturbação por funções lineares, e estudar a família de problemas de minimização

$$-f^*(p):=\inf_{x\in X}[f(x) - \langle p,x\rangle] \qquad (25),$$

e a respectiva variação dos ínfimos obtidos em função de p. Em particular,

$$-f^*(0):=\inf_{x\in X} f(x).$$

Note-se ainda que (25) se pode escrever na forma $f^*(p)=\sup_{x\in X}[\langle p,x\rangle - f(x)]$.

4.1 - Definição

Seja f uma função estrita de X em $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$. Então a função f* de X* em $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ definida por

$$\forall p\in X^*, \qquad f^*(p):=\sup_{x\in X}[\langle p,x\rangle - f(x)]\in\mathbf{R}\cup\{+\infty\},$$

designa-se por conjugada (de Fenchel) da função f e a função $f^{**}:X\to\mathbf{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ definida por

$$\forall x\in X, \qquad f^{**}(x)=\sup_{p\in X^*}[\langle p,x\rangle - f^*(p)],$$

designa-se por biconjugada de f.

Tendo em conta que $\forall x\in X$, $\forall p\in X^*$, $f^*(p) \geq \langle p,x\rangle - f(x)$, pode concluir-se a seguinte desigualdade (de Fenchel):

$$\forall x\in X, \forall p\in X^*, \qquad \langle p,x\rangle \leq f^*(p)+f(x).$$

Por outro lado, desta desigualdade decorre que

$$\forall x\in X, \forall p\in X^*, \qquad f(x) \geq \langle p,x\rangle - f^*(p)$$

e, uma vez que $f^{**}(x) = \sup_{p\in X^*}[\langle p,x\rangle - f^*(p)]$, podemos concluir que $f^{**}(x) \leq f(x)$.

4.2 - Teorema

Se f é uma função estrita de X em $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ ($f:X\rightarrow\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$), então f* é uma função semi-contínua inferior e convexa.

Prova:

Por definição, f* é o envelope superior de uma colecção de funções contínuas (logo semi-contínuas inferiores) e afins (logo convexas), $p\rightarrow <p,x>-f(x)$. Consequentemente, por aplicação dos teoremas 1.12 e 3.4, decorre o que se pretendia.

◊

Se interpretarmos o espaço vectorial X, como sendo o espaço vectorial de diferentes mercadorias (ou artigos), o seu dual X*, como sendo o espaço dos preços associados (ou seja, espaço das funções lineares que a cada vector de artigos associa um dado valor), e a função f, como sendo a função de custo, então $<p,x> - f(x)$ corresponde ao lucro associado a x e a função conjugada corresponde à função de lucro máximo que a cada vector de preços p associa o máximo lucro que é possível obter.

Uma vez que um subconjunto convexo fechado K de X, é caracterizado pela sua função indicadora, ψ_K, a qual é convexa e semi-contínua inferior, de um modo equivalente, podemos caracteriza-lo pela função conjugada ψ_k^* definida em X*, a qual corresponde à função $\psi_k^*(p):=\sup_{x\in X}[<p,x>-\psi_k(x)]$, ou seja,

$$\psi_k^*(p) = \sup_{x\in K} <p,x> \ = \sigma_K(p).$$

Esta função, $\sigma_K(p)$, que se designa por função de suporte do subconjunto K, é muito útil, uma vez que permite que a manipulação de subconjuntos convexos fechados se faça através da manipulação de funções convexas semi-contínuas inferiores (a descoberta e utilização deste facto é devida a Minkowski [22]). Deste modo somos conduzidos à noção de polaridade entre cones [23] convexos fechados de X e de X*. Com efeito, sendo K um cone convexo fechado de X, designa-se por cone polar (negativo) e denota-se por K*, o cone de X*

$$K^*:=\{p\in X^*: \forall x\in K, <p,x> \leq 0\},$$

o qual é também um cone convexo fechado.

---

[22] É também a Minkowski (1910) que se devem os primeiros teoremas de separação e os fundamentos da Análise Funcional. A extensão dos teoremas de separação a espaços de Banach e a sua equivalência ao problema da extensão de formas lineares contínuas, são devidas a Han e Banack (e foram obtidos na década de 20). O teorema de Han-Banach (que afirma que se $<X,\|.\|>$ é um espaço vectorial normado, Y um subespaço de X e q uma funcional linear contínua sobre Y tal que $\|q\|^*=\delta$, então existe $p\in X^*$ tal que p é uma extensão de q e $\|p\|^*=\delta$) constitui um dos resultados mais importantes da Análise Funcional Linear.

[23] Um subconjunto K de X diz-se um cone quando, para todo o $\lambda>0$ e todo o $x\in K$ se verifica que $\lambda x\in K$.

Com efeito se $u\in K^*$ então $\lambda u\in K^*$ $\forall\lambda\in \mathbf{R}_+$ (logo é um cone) e se $u,v\in K^*$ (i. e, $\langle u,x\rangle \le 0$ e $\langle v,x\rangle \le 0$ $\forall x\in K$) então $\forall\alpha\in[0,1]$ vem que

$$\alpha\langle u,x\rangle + (1-\alpha)\langle v,x\rangle = \langle \alpha u+(1-\alpha)v,x\rangle \le 0 \ \forall x\in K,$$

pelo que $\alpha u+(1-\alpha)v\in K^*$.

Resta provar que K^* é fechado. Seja a sucessão de K^*, $\{u^n\}$, convergente para u. Então $\langle u^n,x\rangle \le 0$ $\forall x\in K$ e $\forall n\in \mathbf{N}$, pelo que $\langle u,x\rangle \le 0$ $\forall x\in K$ (ou seja, $u\in K^*$). Na verdade se assumirmos, por absurdo, que existe $y\in K$ tal que $\langle u,y\rangle=\varepsilon>0$ e considerarmos a aplicação contínua, y, $v\to y(v)=\langle v,y\rangle$. Pela continuidade de y em u, $\exists m\in \mathbf{N}$ tal que $\forall n\ge m$

$$|y(u^n)-y(u)| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < y(u^n)-\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{2} < y(u^n) < \frac{3\varepsilon}{2} \Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{2} < \langle u^n,y\rangle < \frac{3\varepsilon}{2},$$

o que é absurdo (tendo em conta que $\forall n\in \mathbf{N}$, $\langle u^n,x\rangle \le 0$ $\forall x\in K$).

Acerca dos cones podemos fazer ainda as seguintes observações:

i. Dados dois cones K' e K", se $K''\supseteq K'$ então $K'^*\supseteq K''^*$ (Com efeito se $u\in K''^*$, então $u|_{x\le 0}$ $\forall x\in K''$ $\Rightarrow$ $u|_{x\le 0}$ $\forall x\in K'$ (dado que $K''\supseteq K'$), logo $u\in K'^*$).

ii. O único elemento pertencente a $K\cap K^*$ é 0 (dado que, se $y\in K\cap K^*$, então $\langle y,y\rangle=\|y\|^2\le 0 \Rightarrow y=0$).

Mais tarde provaremos que $K=(K^*)^*$, relação que constitui uma **extensão** da relação de ortogonalidade entre espaços vectoriais a cones convexos fechados.

Conforme no teorema a seguir se indica, nos casos em que a biconjugada de uma função estrita f é igual a f ($f^{**}=f$), pode concluir-se que f é uma função semi-contínua inferior convexa e reciprocamente. Como consequência, tendo em conta que

$$f=f^{**} \Leftrightarrow f(x) = \sup_{p\in X^*} [\langle p,x\rangle - f^*(p)],$$

decorre que qualquer função estrita semi-contínua inferior e convexa, corresponde ao envelope superior das funcionais lineares (funções afins) que a minoram.

4.3 - Teorema

Uma função estrita $f:X\to \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ é semi-conínua inferior e convexa sse $f=f^{**}$. Neste caso f^* é também uma função estrita.

Prova:

Suponha-se que $f=f^{**}$. Logo, dado que f é uma função estrita de X em $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$, $\exists x\in X$ tal que $f(x)=\sup_{p\in X^*} [\langle p,x\rangle - f^*(p)]\in \mathbf{R}$, o que implica que f^* é estrita. Com efeito supondo que f^* não é estrita vem que $f^*(p)=+\infty$ $\forall p\in X^*$ e, consequentemente, $\forall x\in X$ que $\langle p,x\rangle - f^*(p)=-\infty$ $\forall p\in X^*$, donde $\sup_{p\in X^*} [\langle p,x\rangle - f^*(p)]=-\infty$ $\forall p\in X^*$, o que é absurdo. Este absurdo resultou de havermos suposto que f^* não seria estrita. Assim, dado que f^* é estrita, por aplicação do teorema 4.2, conclui-se que f^{**} é semi-contínua inferior e convexa, donde se $f=f^{**}$ então a função f é semi-contínua inferior e convexa.

Suponha-se que f é semi-contínua inferior e convexa. Uma vez que o epigrafo de f é não vazio (sse f é estrita) convexo (sse f é convexa) e fechado (sse é semi-contínua inferior), qualquer ponto, (x,α), que não lhe pertença pode ser estritamente separado de Ep(f), por um hiperplano que é o gráfico de uma função afim contínua que minora f, sse f é semi-contínua inferior e convexa.

Suponha-se que $\alpha<f(x)$. Uma vez que (x,α) não pertence a Ep(f) (conjunto convexo fechado), pelo teorema 3.17 existe uma forma linear real contínua $(p,-\beta)\in X^*x\mathbf{R}$ e $\varepsilon>0$ tal que

$$\forall y\in Dom(f),\ \forall\lambda\geq f(y),\ \langle p,y\rangle - \beta\lambda \leq \langle p,x\rangle - \beta\alpha - \varepsilon \quad (26).$$

Note-se que $\beta\geq 0$. Caso contrário, para um ponto arbitrário, y, do domínio de f e $\lambda=f(y)+\mu$ com $\mu\geq 0$, viria

$$-\beta\mu \leq \langle p,x-y\rangle + \beta(f(y)-\alpha) - \varepsilon < +\infty,$$

o que não é consistente com o facto de μ poder tomar valores arbitrariamente grandes.

1. Se $\beta>0$, então podemos concluir que $\alpha<f^{**}(x)$. Com efeito dividindo (26) por β e fazendo $p'=\frac{1}{\beta}p$ e $\lambda=f(y)$, obtém-se

$$\forall y\in Dom(f),\ \langle p',y\rangle - f(y) \leq \langle p',x\rangle - \alpha - \frac{\varepsilon}{\beta}.$$

Então, uma vez que f é estrita, tomando-se o supremo relativamente a y, obtém-se $f^*(p') < \langle p',x\rangle - \alpha$, o que implica que

i) p' pertence ao domínio de f^*;

ii) $\alpha < \langle p',x\rangle - f^*(p') \leq f^{**}(x)$.

2. Considere-se o caso em que x pertence ao domínio de f, dado que $0<f(x)-\alpha$, fazendo $y=x$ e $\lambda=f(x)$ de (26) tira-se que

$$\langle p,x\rangle - \beta f(x) \leq \langle p,x\rangle - \beta\alpha - \varepsilon \Leftrightarrow \beta \geq \frac{\varepsilon}{f(x)-\alpha} \quad (27),$$

ou seja, $\beta>0$.

Então por 1.i) deduz-se que existe $p'\in Dom(f^*)$ e por 1.ii) que $\alpha<f^{**}(x)\leq f(x)$ para todo o α tal que $\alpha<f(x)$, logo, fazendo tender α para f(x), conclui-se que $f^{**}(x)=f(x)$. Adicionalmente, dado que por hipótese f é estrita, por 1.i), podemos concluir que f^* é estrita.

3. Considere-se agora o caso em que $f(x)=+\infty$ e que α é um número arbitrariamente grande. Nestas condições

a) ou β é estritamente positivo, e como consequência por 1.ii) $\alpha<f^{**}(x)$,

b) ou $\beta=0$ e (26) implica

$$\forall y\in Dom(f),\quad \langle p,y-x\rangle + \varepsilon \leq 0 \quad (28).$$

Para $p'\in Dom(f^*)$ (note-se que, uma vez que f é estrita, i. e, $\exists x\in Dom(f)$, em 2. já se concluiu que um tal p' existe), a desigualdade de Fenchel implica

$$\forall y\in X,\ \langle p',y\rangle - f^*(p') - f(y) \leq 0 \quad (29).$$

Para $\mu>0$, multiplicando a inequação (28) por μ e adicionando o resultado obtido a (29), vem que $\forall y\in Dom(f)$, $\langle p'+\mu p,y\rangle - f(y) \le \mu\langle p,x\rangle + f^*(p') - \mu\varepsilon$. Como consequência, considerando-se o $\sup_{y\in X}[\langle p'+\mu p,y\rangle - f(y)]$, vem que

$$f^*(p'+\mu p) \le \mu\langle p,x\rangle + f^*(p') - \mu\varepsilon.$$

A partir desta desigualdade, adicionando-se $\langle p',x\rangle$ a ambos os membros vem

$$\langle p',x\rangle + f^*(p'+\mu p) \le \langle p',x\rangle + \mu\langle p,x\rangle + f^*(p') - \mu\varepsilon,$$

donde se tira que $\langle p',x\rangle + \mu\varepsilon - f^*(p') \le \langle p'+\mu p,x\rangle - f^*(p'+\mu p) \le f^{**}(x)$.

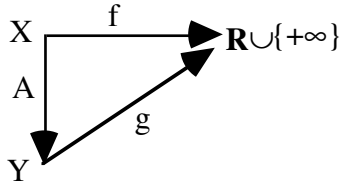
Fazendo $\mu = \dfrac{\alpha+f^*(p')-\langle p',x\rangle}{\varepsilon}$ (tendo em conta que α é um número arbitrariamente grande, vem que $\mu>0$), prova-se que $\alpha\le f^{**}(x)$.

Assim, tanto em a) como em b) conclui-se que $f^{**}(x)$ é maior do que qualquer número finito α. Logo, quer β seja positivo quer seja nulo, vem que $f^{**}(x)=+\infty$.

$\Diamond$

A existência de uma correspondência biunívoca entre as funções semi-contínuas inferiores convexas definidas em X e as funcionais lineares do mesmo tipo definidas em X* desempenha um papel idêntico ao da transposição, a qual é também uma correspondência biunívoca entre operadores lineares contínuos de X em Y e os operadores do mesmo tipo entre Y* e X*.

Supondo que X e Y são dois espaços de Hilbert, que $A\in L(X,Y)$ (A é um operador linear contínuo de X emY), que $f:X\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ e $g:Y\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ são duas funções estritas, semi-contínuas inferiores e convexas,



vamos estudar o seguinte problema primal

$$\boxed{v:=\inf_{x\in X}[f(x)+g(Ax)]} \qquad (30).$$

Note-se que a função $f+g\circ A$ (de X em $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$) que nos propomos minimizar é estrita somente se $A(Dom(f))\cap Dom(g)\neq\emptyset$, ou seja, se

$$0\in A(Dom(f))-Dom(g) \qquad (31)$$

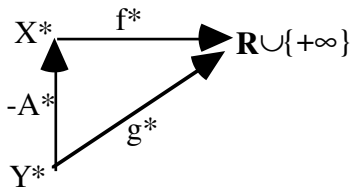
e, nestas condições, $v<+\infty$.

O problema dual de (30) (designado por dual de Fenchel)

$$\boxed{v^*:=\inf_{q\in Y^*}[f^*(-A^*q)+g^*(q)]}$$

(32),

onde $q\in Y^*$, $A^*\in L(Y^*,X^*)$ é a transposta de A, $f^*:X^*\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ é conjugada de f e $g^*:Y^*\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ é a conjugada de g, só faz sentido se $-A^*(Dom(g^*))\cap Dom(f^*)\neq\emptyset$,



ou seja, se

$$0 \in -A^*(Dom(g^*))-Dom(f^*) \Leftrightarrow 0 \in A^*(Dom(g^*))+Dom(f^*) \qquad (33),$$

o que implica que se tenha $v^*<+\infty$.

Aplicando-se a desigualdade de Fenchel, respectivamente, a f(x) e f*(-A*q) e a g(Ax) e g*(q) obtém-se

$$f(x)+f^*(-A^*q) \geq \langle -A^*q,x\rangle$$

$$g(Ax)+g^*(q) \geq \langle q,Ax\rangle,$$

donde se tira que $f(x)+g(Ax)+f^*(-A^*q)+g^*(q) \geq \langle -A^*q,x\rangle+\langle q,Ax\rangle = 0$ [24], a qual implica a desigualdade

$$v+v^* \geq 0 \qquad (34).$$

Esta última desigualdade, combinada com (31) e (33), permite-nos concluir que v e v* são finitosm (com efeito, por (31) $v<+\infty$, por (33) $v^*<+\infty$ e por (34) $-\infty \notin \{v,v^*\}$).

4.4 - Teorema (Fenchel)

Suponha-se que X e Y são espaços de Hilbert, que $A \in L(X,Y)$ é um operador linear contínuo de X em Y, que $f:X \to \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ e $g:Y \to \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ são funções estritas, semi-contínuas inferiores e convexas. Considere-se ainda que $0 \in A(Dom(f))-Dom(g)$ e que $0 \in A^*(Dom(g^*))+Dom(f^*)$ (o que é equivalente a considerar que v e v* são finitos).

Se $0 \in Int(A(Dom(f))-Dom(g))$, então

a) $v+v^*=0$;

b) $\exists q' \in Y^*$ tal que $f^*(-A^*q')+g^*(q')=v^*$.

Se $0 \in Int(A^*(Dom(g^*))+Dom(f^*))$, então

c) $v+v^*=0$;

d) $\exists x' \in X$ tal que $f(x')+g(Ax')=v$.

Prova:

Primeiramente vamos fazer a prova para o caso em que o espaço Y tem dimensão finita.

Considere-se a função ϕ de $Dom(f)xDom(g)$ em $Yx\mathbf{R}$ definida por

$$\phi(x,y)=(Ax-y, f(x)+g(y))$$

e ainda

---

[24] Note-se que $\langle -A^*q,x\rangle=(-A^*q)|x=-q^tAx=(-q)|(Ax)=\langle -q,Ax\rangle=-\langle q,Ax\rangle$.

i) o vector $(0,v)\in Y\times\mathbf{R}$

ii) e o cone $Q=\{0\}\times]0,+\infty[$ (donde $Y\times\mathbf{R}\supseteq Q$).

Da linearidade do operador A e da convexidade das funções f e g decorre que

$\phi(Dom(f)\times Dom(g))+Q$ é um subconjunto convexo de $Y\times\mathbf{R}$.

Com efeito, sejam (z',λ') e (z'',λ'') dois pontos de $\phi(Dom(f)\times Dom(g))+Q$. Então $\exists x',x''\in Dom(f)$, $\exists y',y''\in Dom(g)$ e $\exists(0,u'),(0,u'')\in Q$ tais que $z'=Ax'-y'$, $\lambda'=f(x')+g(y')+u'$, $z''=Ax''-y''$, $\lambda''=f(x'')+g(y'')+u''$. Para $\alpha\in[0,1]$, fazendo $(z,\lambda)=\alpha(z',\lambda')+(1-\alpha)(z'',\lambda'')$ vem

$$(z,\lambda)=(A[\alpha x'+(1-\alpha)x'']-[\alpha y'+(1-\alpha)y''],[\alpha f(x')+(1-\alpha)f(x'')]+[\alpha g(y')+(1-\alpha)g(y'')]+u),$$

com $u=\alpha u'+(1-\alpha)u''$. Fazendo $x=\alpha x'+(1-\alpha)x''$ e $y=\alpha y'+(1-\alpha)y''$, obtém-se

$$(z,\lambda)=(Ax-y,f(x)+g(y)+u+\delta_x+\delta_y)$$

com $\delta_x=\alpha f(x')+(1-\alpha)f(x'')-f(x)$ e $\delta_y=\alpha g(y')+(1-\alpha)g(y'')-g(y)$.

Da convexidade das funções f e g decorre que $\delta_x\geq 0$ e que $\delta_y\geq 0$, logo uma vez que $u_1,u_2\in]0,+\infty[$, conclui-se que $u+\delta_x+\delta_y=\alpha u_1+(1-\alpha)u_2+\delta_x+\delta_y\in]0,+\infty[$. Desta forma, tendo em conta que $\lambda=f(x)+g(y)+u+\delta_x+\delta_y$, fica completa a prova de que $(z,\lambda)\in\phi(Dom(f)\times Dom(g))+Q$, i. e, que $\phi(Dom(f)\times Dom(g))+Q$ é convexo (sendo óbvio que se trata de um subconjunto de $Y\times\mathbf{R}$).

Se suposermos que $(0,v)\in\phi(Dom(f)\times Dom(g))+Q$, podemos deduzir a existência de $x\in Dom(f)$ e $y\in Dom(g)$ tais que $Ax-y=0$ e $v>f(x)+g(y)=f(x)+g(Ax)$, o que contradiz a definição de v. Logo,

$$(0,v)\notin\phi(Dom(f)\times Dom(g))+Q.$$

Uma vez que Y é um espaço de dimensão finita, podemos aplicar o teorema 3.20 (de separação em sentido lato) para concluir que existe uma forma linear $(q,\alpha)\in Y^*\times\mathbf{R}\setminus\{(0,0)$ tal que

$$\alpha v=\langle(q,\alpha),(0,v)\rangle\leq \inf_{\substack{x\in Dom(f)\\ y\in Dom(g)}}[\langle q,Ax-y\rangle+\alpha(f(x)+g(y))]+\inf_{\theta>0}\alpha\theta \qquad (35).$$

Dado que $\inf_{\theta>0}\alpha\theta$ é limitado inferiormente, deduz-se que $\alpha\geq 0$ e que $\inf_{\theta>0}\alpha\theta=0$. Por outro lado, podemos concluir que $\alpha\neq 0$, dado que, no caso contrário, de (35) decorreria a desigualdade

$$0\leq \inf_{\substack{x\in Dom(f)\\ y\in Dom(g)}}\langle q,Ax-y\rangle=\inf_{z\in A(Dom(f))-Dom(g)}\langle q,z\rangle.$$

Uma vez que por hipótese $0\in Int(A(Dom(f))-Dom(g))$, $\exists\delta>0$ tal que $B(0,\delta)$ está contida em $A(Dom(f))-Dom(g)$, logo para $Ax-y=-\delta q$ (com $\|q\|^*=1$), da desigualdade anterior decorre que $0\leq-\delta\|q\|^{*2}$ e, consequentemente, que $q=0$, o que contradiz o facto de $(q,\alpha)\in Y^*\times\mathbf{R}\setminus\{(0,0)$. Assim, concluí-se que $\alpha>0$. Logo, dividindo (35) por α e fazendo $q'=\frac{q}{\alpha}$, vem

$$v\leq \inf_{\substack{x\in Dom(f)\\ y\in Dom(g)}}[\langle A^*q',x\rangle-\langle q',y\rangle+f(x)+g(y)]=-\sup_{\substack{x\in X\\ y\in Y}}[\langle -A^*q',x\rangle+\langle q',y\rangle-f(x)-g(y)]$$

desigualdade que é equivalente à desigualdade

$$v \leq -f^*(-A^*q') - g^*(q') \Leftrightarrow f^*(-A^*q') + g^*(q') \leq -v.$$

Dado que, por (34), $-v \leq v^*$ e, por definição de v^*, $v^* \leq f^*(-A^*q')+g^*(q')$, vem

$$v^* \leq f^*(-A^*q') + g^*(q') \leq -v \leq v^* \Leftrightarrow -v=v^* \Leftrightarrow v+v^*=0,$$

completando-se assim a prova de a) para o caso em que Y tem dimensão finita. A prova de b) é consequência imediata da equação $f^*(-A^*q')+g^*(q') =v^*$. A prova de c) e d) obtém-se, de um modo idêntico ao anterior, substituindo f por g*, g por f* e A por -A*.

Vamos fazer agora a prova de a) e b) para o caso em que os espaços têm dimensão infinita.

Considere-se a aplicação $\psi:Dom(f^*)\times Dom(g^*)\rightarrow \mathbf{R}\times X^*$, definida por

$$\psi(p,q)=(f^*(p)+g^*(q),p+A^*q)$$

e ainda o conjunto $\psi(Dom(f^*)\times Dom(g^*))+\mathbf{R}_+\times\{0\}$.

1. Primeiramente vamos mostrar que $\psi(Dom(f^*)\times Dom(g^*))+\mathbf{R}_+\times\{0\}$ é convexo.

Sejam (λ',r') e (λ'',r'') dois pondtos de $\psi(Dom(f^*)\times Dom(g^*))+\mathbf{R}_+\times\{0\}$.Então $\exists (p',q'),(p'',q'')\in Dom(f^*)\times Dom(g^*)$ tais que $\lambda'=f^*(p')+g^*(q')+\tau_1$ ($\tau_1\geq 0$), $r'=p'+A^*q'$, $\lambda''=f^*(p'')+g^*(q'')+\tau_2$ ($\tau_2\geq 0$) e $r''=p''+A^*q''$.

Para $\alpha\in[0,1]$, fazendo $(\lambda,r)=\alpha(\lambda',r')+(1-\alpha)(\lambda'',r'')$, obtém-se

$$(\lambda,r)=(\alpha[f^*(p')+g^*(q')]+(1-\alpha)[f^*(p'')+g^*(q'')]+\tau,\alpha p'+(1-\alpha)p''+A^*[\alpha q'+(1-\alpha)q'']),$$

com $\tau=\alpha\tau_1+(1-\alpha)\tau_2$. Logo vem

$$\lambda=\alpha f^*(p')+(1-\alpha)f^*(p'')+\alpha g^*(q')+(1-\alpha)g^*(q'')+\tau\geq f^*(\alpha p'+(1-\alpha)p')+g^*(\alpha q'+(1-\alpha)q')+\tau,$$

Nestas condições, fazendo $p=\alpha p'+(1-\alpha)p''$ e $q=\alpha q'+(1-\alpha)q''$, conclui-se que

$$\psi(p,q)=(f^*(p)+g^*(q),p+A^*q),$$

donde, uma vez que $(p,q)\in Dom(f^*)\times Dom(g^*)$ e $\lambda\geq f^*(p)+g^*(q)$, decorre que

$$(\lambda,r)\in \psi(Dom(f^*)\times Dom(g^*))+\mathbf{R}_+\times\{0\},$$

ou seja, que $\psi(Dom(f^*)\times Dom(g^*))+\mathbf{R}_+\times\{0\}$ é convexo.

2. Segue-se a prova de que $\psi(Dom(f^*)\times Dom(g^*))+\mathbf{R}_+\times\{0\}$ é fechado.

Seja $\{(\lambda_n,r_n)\}$ uma sucessão de pontos de $\psi(Dom(f^*)\times Dom(g^*))+\mathbf{R}_+\times\{0\}$ convergente para $(\lambda,r)\in\mathbf{R}\times X^*$. Como consequência existe uma sucessão $\{p_n\}$ de X^* e uma sucessão $\{q_n\}$ de Y^* tais que

$$\lambda_n\geq f^*(p_n)+g^*(q_n) \text{ e } r_n=p_n+A^*q_n \ [25].$$

Assim, estamos em condições de provar que, para cada $z\in Y$, a sucessão $\{\langle q_n,z\rangle\}$ é uma sucessão limitada e por conseguinte (dado que toda a sucessão de números reais

---

[25]Note-se que $(\lambda_n,r_n)\in\psi(Dom(f^*)\times Dom(g^*))+\mathbf{R}_+\times\{o\}$, significa que $\exists p_n\in Dom(f^*)$ e $\exists q_n\in Dom(g^*)$ tais que $(\lambda_n,r_n)=\psi(p_n,q_n)+(\tau,0)=(f^*(p_n)+g^*(q_n)+\tau,p_n+A^*q_n)$, com $\tau\geq 0 \Leftrightarrow \lambda_n\geq f^*(p_n)+g^*(q_n)$ e $r_n=p_n+A^*q_n$.

limitada tem uma subsucessão convergente) admite uma subsucessão $\{\langle q_{n'},z\rangle\}$ convergente.

Com efeito, tendo em conta que $\exists\delta>0$ tal que $Dom(g)-A(Dom(f))\supseteq B(0,\delta)$, $\forall z\in Y$ $\exists x\in Dom(f)$ e $\exists y\in Dom(g)$ tais que $\frac{\delta}{2\|z\|}z = y-Ax$. Consequentemente,

$$\frac{\delta}{2\|z\|}\langle q_n,z\rangle = \langle q_n,y\rangle - \langle A^*q_n,x\rangle = \langle q_n,y\rangle + \langle p_n,x\rangle - \langle r_n,x\rangle$$

$$\leq g^*(q_n) + f^*(p_n) + g(y) + f(x) - \langle r_n,x\rangle \leq g(y) + f(x) + \lambda_n - \langle r_n,x\rangle.$$

Dado que as sucessões $\{\lambda_n\}$ e $\{\langle r_n,x\rangle\}$ são convergentes, logo limitadas, vem que $\forall z\in Y, \sup_{n\geq 0}\langle q_n,z\rangle < +\infty \Leftrightarrow \forall z\in Y, |\langle q_n,z\rangle| < +\infty\ \forall n\geq 0$.

Como consequência, podemos concluir que existe uma subsucessão da sucessão de números reais $\{\langle q_n,z\rangle\}$, $\{\langle q_{n'},z\rangle\}$, que é convergente. Logo a sucessão $\{q_{n'}\}$ tem convergência fraca, cujo significado é dado pela definição a seguir, na qual também se introduz o conceito de limite fraco.

4.5 - Definição

Seja $\{q_n\}$ uma sucessão do espaço de Hilbert Y^*. Diz-se que $\{q_n\}$ tem convergência fraca se, para cada $y\in Y$, a sucessão de números reais $\{\langle q_n,y\rangle\}$ convergir. Diz-se que $q\in Y^*$ é o limite fraco de $\{q_n\}$ se a sucessão $\{\langle q_n,y\rangle\}$ convergir para $\langle q,y\rangle$ $\forall y\in Y$ [26].

---

[26] Embora, aparentemente, a existência de convergência fraca não implique a existência de limite fraco, da aplicação do teorema de Banach-Steinauss ao espaço de Hilbert X^*, decorre a seguinte proposição (cuja prova pode ser encontrada em [5]):

Proposição: Seja $\{p_n\}$ uma sucessão de X^* relativamente à qual se verifica que para cada $x\in X$, $\exists M_x\in \mathbf{R}$ tal que $|\langle p_n,x\rangle|\leq M_x$ $\forall n\geq 0$, então $\{p_n\}$ é uma sucessão limitada, i. e, $\exists M\in \mathbf{R}$ tal que $\|p_n\|^*\leq M$ $\forall n\geq 0$.

Como consequência, pode concluir-se o seguinte corolário.

Corolário: Se $\{p_n\}$ é uma sucessão do espaço de Hilbert X^*, que satisfaz as hipoteses da proposição anterior, então $\exists p\in X^*$ e uma subsucessão $\{p_{n'}\}$ cujo limite fraco é p.

Prova: Dado que para cada $x\in X$, a sucessão de números reais $\{\langle p_n,x\rangle\}$ é uma sucessão limitada, pode concluir-se que existe uma subsucessão $\{\langle p_{n'},x\rangle\}$ que é convergente. Por outro lado, da proposição anterior, sabe-se que $\exists M\in \mathbf{R}$ tal que $\|p_n\|^*\leq M$ $\forall n\geq 0$. Logo considerando-se a funcional linear real sobre X, $h(x):=\lim_{n'\to\infty}\langle p_{n'},x\rangle$, que é limitada (uma vez que $|h(x)|\leq \sup_{n'}\{|\langle p_{n'},x\rangle|\}\leq \sup_{n}\{\|p_n\|^*\|x\|\}\leq M\|x\|$) e por conseguinte contínua, pelo teorema da representação de Riez, $\exists p\in X^*$ tal que $h(x)=\langle p,x\rangle$, pelo que p é o limite fraco de $\{p_{n'}\}$.

◊

Tendo em conta que, para cada $y\in Y$, a subsucessão $\{\langle q_{n'},y\rangle\}$ é convergente, considerando-se a funcional linear real sobre Y, $h:y\rightarrow\lim_{n'\rightarrow}\langle q_{n'},y\rangle$, verifica-se que h(y) é limitada, dado que $|h(y)|\leq\sup_{n'}\{|\langle q_{n'},y\rangle|\}<+\infty$ e, por conseguinte, contínua [27]. Logo, pelo teorema da representação de Riesz, $\exists q\in Y^*$ tal que $h(y)=\langle q,y\rangle$, ou seja, q é o limite fraco da sucessão $\{q_{n'}\}$. Consequentemente, a subsucessão $\{p_{n'}\}$ determinada por

$$p_{n'} = r_{n'} - A^*q_{n'}$$

converge, no sentido fraco, para $p=r-A^*q$.

Uma vez que as funções $f^*(p):=\sup_{x\in X}[\langle p,x\rangle-f(x)]$ e $g^*(q):=\sup_{y\in Y}[\langle q,y\rangle-g(y)]$ são semi-contínuas inferiores, deduz-se que

$$f^*(p)+g^*(q) \leq \liminf_{n'\rightarrow\infty}[\,f^*(p_{n'}) + g^*(q_{n'})] \leq \lim_{n'\rightarrow\infty}\lambda_{n'} = \lambda.$$

Assim, mostrou-se que

$$\lambda \geq f^*(p)+g^*(q), \qquad r = p+A^*q,$$

pelo que $(\lambda,r)\in\psi(Dom(f^*)xDom(g^*))+\mathbf{R}_+x\{0\}$, ou seja, $\psi(Dom(f^*)xDom(g^*))+\mathbf{R}_+x\{0\}$ é um conjunto fechado.

3. Finalmente vamos mostrar que $(-v,0)\in\psi(Dom(f^*)xDom(g^*))+\mathbf{R}_+x\{0\}$, o que significa que $\exists q'\in Dom(g^*)$ tal que $-A^*q'\in Dom(f^*)$ e $-v\geq f^*(-A^*q')+g^*(q')\geq v^*\geq -v$. Donde se conclui que

$$-v=v^* \qquad e \qquad f^*(-A^*q')+g^*(q')=v^*.$$

Suponha-se que $(-v,0)\notin\psi(Dom(f^*)xDom(g^*))+\mathbf{R}_+x\{0\}$. Uma vez que se trata de um conjunto convexo e fechado e dado que $\mathbf{R}xX$ é o dual de $\mathbf{R}xX^*$, o par (-v,0) pode ser estritamente separado de $\psi(Dom(f^*)xDom(g^*))+\mathbf{R}_+x\{0\}$. Logo existe $(\alpha,-x')\in\mathbf{R}xX$ e $\varepsilon>0$ tal que

$$-\alpha v \leq \inf_{(p,q)\in Dom(f^*)xDom(g^*)}[\alpha(f^*(p)+g^*(q)) - \langle p+A^*q,x'\rangle] + \inf_{\theta>0}\alpha\theta - \varepsilon \quad (36).$$

Uma vez que $\inf_{\theta>0}\alpha\theta$ é limitado inferiormente, segue-se que $\inf_{\theta>0}\alpha\theta=0$ e que α é positivo ou nulo. Porém, α não pode ser zero, dado que isso implicaria que

$$0 \leq \inf_{(p,q)\in Dom(f^*)xDom(g^*)}\langle p+A^*q,-x'\rangle - \varepsilon,$$

e dado que de $0\in A^*(Dom(g^*))+Dom(f^*)$ se tira que $\exists p\in Dom(f^*)$ e $\exists q\in Dom(g^*)$ tal que $p+A^*q=0$, obter-se-ia $0\leq-\varepsilon$, o que é impossível.

Dividindo a desigualdade (36) por $\alpha>0$ e fazendo $x:=\frac{x'}{\alpha}$ e $\eta=\frac{\varepsilon}{\alpha}$, obtém-se

$$\begin{aligned} -v &\leq \inf_{(p,q)\in Dom(f^*)xDom(g^*)}[f^*(p)+g^*(q)-\langle p,x\rangle-\langle q,Ax\rangle]-\eta \\ &= -\sup_{\substack{p\in X^*\\ q\in Y^*}}[\langle p,x\rangle+\langle q,Ax\rangle-f^*(p)-g^*(q)]-\eta \end{aligned}$$

---

[27] Note-se que uma funcional linear é contínua sse é limitada (a prova desta equivalência pode ser encontrada em [2]).

$$= -\sup_{p\in X^*}[<p,x>-f^*(p)]-\sup_{q\in Y^*}[<q,Ax>-g^*(q)]-\eta$$
$$= -f^{**}(x)-g^{**}(Ax)-\eta$$
$$= -(f(x)+g(Ax))-\eta \le -v-\eta \ ^{28},$$

o que é impossível. Logo conclui-se que $(-v,0)\in \psi(Dom(f^*)xDom(g^*))+\mathbf{R}_+x\{0\}$, completando-se assim a prova.

◊

Seguem-se algumas propriedades básicas associadas às funções conjugadas, cuja prova fica como exercício.

4.6 Exercício

Sejam f e g funções estritas de X em $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$, $A\in L(X,X)$ um isomorfismo, $x_0\in X$, $p_0\in X^*$, $\alpha\in\mathbf{R}$ e $\lambda\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$. Então prove cada uma das propriedades a seguir indicadas.

1. Se $f\le g$, então $g^*\le f^*$.
2. $(foA)^*=f^*oA^{*-1}$.
3. Se $\forall x\in X\ g(x):=f(x-x_0)+<p_0,x>+\alpha$, então
$$\forall p\in X^*\ g^*(p)=f^*(p-p_0)+<p,x_0>-(\alpha+<p_0,x_0>).$$
4. Se $\forall x\in X\ g(x):=f(\lambda x)$, então $\forall p\in X^*\ g^*(p)=f^*(\frac{p}{\lambda})$.
5. Se $\forall x\in X\ g(x):=\lambda f(x)$, então $\forall p\in X^*\ g^*(p)=\lambda f^*(\frac{p}{\lambda})$.

Sendo X e Y dois espaços de Hilbert, vamos estudar mais algumas propriedades associadas às funções conjugadas.

I. Se f é uma função estrita de XxY em $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ e $g(y):=\inf_{x\in X} f(x,y)$, então

$g^*(q)=f^*(0,q)$.

Prova:

$$g^*(q) = \sup_{y\in Y}[<q,y> - \inf_{x\in X} f(x,y)]$$
$$= \sup_{\substack{y\in Y\\ x\in X}}[<0,x>+<q,y> - f(x,y)]$$
$$= f^*(0,q).$$

◊

---

[28]Note-se que, tendo em conta que tanto f como g são funções estritas, semi-contínuas inferiores e convexas, pelo teorema 4.3 f=f** e g=g**.

II. Se $B \in L(Y,X)$ é um operador linear contínuo de Y em X, $f:X \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ e $g:Y \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ são funções estritas e ainda se $h(x) := \inf_{y \in Y} [f(x-By)+g(y)]$, então

$h^*(p)=f^*(p)+g^*(B^*p)$.

Prova:

$$\begin{aligned} h^*(p) &= \sup_{x \in X} [\langle p,x\rangle - \inf_{y \in Y} (f(x-By)+g(y))] \\ &= \sup_{\substack{y \in Y \\ x \in X}} [\langle p,x\rangle - f(x-By) - g(y)] \\ &= \sup_{\substack{y \in Y \\ x \in X}} [\langle p,x-By\rangle - f(x-By) + \langle p,By\rangle - g(y)] \\ &= \sup_{\substack{y \in Y \\ x-By \in X}} [\langle p,x-By\rangle - f(x-By) + \langle B^*p,y\rangle - g(y)] \\ &= \sup_{\substack{y \in Y \\ x \in X}} [\langle p,x\rangle - f(x) + \langle B^*p,y\rangle - g(y)] \\ &= f^*(p) + g^*(B^*p). \end{aligned}$$

◊

III. Suponha-se que $A \in L(X,Y)$ é um operador linear contínuo de X em Y, que $f:X \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ e $g:Y \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ são duas funções estritas semi-contínuas inferiores e convexas e ainda que $0 \in \mathrm{Int}(A(\mathrm{Dom}(f))-\mathrm{Dom}(g))$.

Então $\forall p \in A^*(\mathrm{Dom}(g^*))+\mathrm{Dom}(f^*)$, $\exists q' \in Y^*$ tal que

$$\begin{aligned} (f+g\circ A)^*(p) &= f^*(p-A^*q')+g^*(q') \\ &= \inf_{q \in Y^*} [f^*(p - A^*q) + g^*(q)]. \end{aligned}$$

Prova:

Para todo o $p \in X^*$, podemos escrever

$$\begin{aligned} (f+g\circ A)^*(p) &= \sup_{x \in X} [\langle p,x\rangle - f(x) - g(Ax)] \\ &= - \inf_{x \in X} [f(x) - \langle p,x\rangle + g(Ax)]. \end{aligned}$$

Substituindo f pela função $h(x)=f(x)-\langle p,x\rangle$, cujo domínio coincide com o domínio de f, e cuja conjugada coincide com a aplicação

$$\begin{aligned} h^*(p_0) &= \sup_{x \in X} [\langle p_0,x\rangle - f(x) + \langle p,x\rangle] \\ &= \sup_{x \in X} [\langle p_0+p,x\rangle - f(x)] \\ &= f^*(p_0+p), \end{aligned}$$

vem que

$$\begin{aligned} (f+g\circ A)^*(p) &= - \inf_{x \in X} [f(x) - \langle p,x\rangle + g(Ax)] \\ &= - \inf_{x \in X} [h(x)+g(Ax)]. \end{aligned}$$

Nestas condições, fazendo $v=\inf_{x\in X}[h(x)+g(Ax)]$ e tendo em conta que $0\in \text{Int}(A(\text{Dom}(f))-\text{Dom}(g))$ (logo, $A(\text{Dom}(f))\cap\text{Dom}(g)\neq\emptyset$), conclui-se que que $v<+\infty$. Por outro lado, se $p\in A^*(\text{Dom}(g^*))+\text{Dom}(f^*)$, i. e, se $\exists q\in \text{Dom}(g^*)$ e $\exists p'\in \text{Dom}(f^*)$ tais que $p=A^*q+p' \Leftrightarrow p'=p-A^*q$, vem que

$$+\infty > f^*(p')+g^*(q) \geq \inf_{q\in Y^*}[f^*(p-A^*q)+g^*(q)] = \inf_{q\in Y^*}[h^*(-A^*q)+g^*(q)],$$

(tendo em conta que, conforme se provou anteriormente, $h^*(p_0)=f^*(p_0+p)$) pelo que, fazendo $v^*=\inf_{q\in Y^*}[h^*(-A^*q)+g^*(q)]$, se conclui também que $v^*<+\infty$. Consequentemente, tendo em conta que da aplicação da desigualdade de Fenchel a $h(x)$ e $h^*(-A^*q)$ e a $g(Ax)$ e $g^*(q)$, se obtém a inequação $v+v^*\geq 0$, pode concluir-se (uma vez que $v<+\infty$ e $v^*<+\infty$) que tanto v como v* são finitos. Logo, dado que, por hipótese, $0\in \text{Int}(A(\text{Dom}(f))-\text{Dom}(g))$, da aplicação do teorema 4.4 (de Fenchel), com f substituído pela função $h(x)$, decorre que

a) $-v=v^*$

b) $\exists q'\in Y^*$ tal que $v^*= h^*(-A^*q')+g^*(q')=f^*(-A^*q'+p)+g^*(q')$.

Como consequência, uma vez que

$$(f+g\circ A)^*(p) = -\inf_{x\in X}[h(x)+g(Ax)] = -v = v^*,$$

vem que $\forall p\in A^*(\text{Dom}(g^*))+\text{Dom}(f^*)$ $\exists q'\in Y^*$ tal que

$$(f+g\circ A)^*(p) = f^*(p - A^*q')+g^*(q') = \inf_{q\in Y^*}[f^*(p-A^*q) + g^*(q)],$$

conforme se pretendia.

◊

IV. Suponh-se que $A\in L(X,Y)$ é um operador linear contínuo de X em Y e que $g:Y\rightarrow \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ é um função estrita, semi-contínua inferior e convexa.

Suponha-se ainda que $0\in \text{Int}(\text{Im}(A)-\text{Dom}(g))$. Então $\forall p\in A^*(\text{Dom}(g^*))$, existe $q'\in \text{Dom}(g^*)$ tal que $A^*q'=p$ e $(g\circ A)^*(p)=g^*(q')=\inf_{A^*q=p} g^*(q)$.

Prova:

Aplicando a propriedade anterior (III) com f=0, cujo domínio é todo o espaço X. A função conjugada f* vem definida por $f^*(p)=\{0\}$ se p=0 e $f^*(p)=+\infty$ no caso contrário. Consequentemente, $f^*(p-A^*q)$ tem valor finito (e igual a 0) sse $p=A^*q$.

◊

4.7 Exercício

Considerem-se dois espaços de Hilbert X e Y e uma função, convexa e semi-contínua inferior $g:X\text{x}Y\rightarrow\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$, relativamente à qual $\forall x\in X$, a função associada $y\rightarrow g(x,y)$ é uma função estrita. Considere-se ainda a função

$$h(x,q):=\sup_{y\in Y}[\langle q,y\rangle - g(x,y)].$$

a) Verificar que

(i) $\forall x\in X$, a função $q\rightarrow h(x,q)$ é convexa e semi-contínua inferior.

(ii) $\forall q\in Y^*$, a função $x\rightarrow h(x,q)$ é côncava.

b) Deduzir que

(i) $g(x,y)=\sup_{q\in Y^*}[\langle q,y\rangle - h(x,q)]$.

(ii) $g^*(p,q)=\sup_{x\in X}[\langle p,x\rangle + h(x,q)]$.

c) Provar que se $\forall q\in Y^*$, a função $x\rightarrow h(x,q)$ é semi-contínua superior, então $h(x,q)=\inf_{p\in X^*}[g^*(p,q)-\langle p,x\rangle]$.