2. Aproximações às Soluções Óptimas e Teoremas de Ponto Fixo

Antes de prosseguirmos no estudo de resultados associados aos problemas de minimização, convém introduzir o conceito de **multifunção**.

2.1 - Definição

Desiga-se por multifunção de X em Y, uma função, F, que a cada $x\in X$ faz corresponder uma parte de Y, F(x). Designa-se por domínio de F o conjunto dos $x\in X$ tais que $F(x)\neq\emptyset$. A sua imagem, F(X), e o seu gráfico, Gr(F), são, respectivamente, $\underset{x\in X}{\cup} F(x)$ e $\underset{x\in X}{\cup}\{x\}xF(x)$ (ou simplesmente $Gr(F)=\{(x,y): y\in F(x)\}$). Uma selecção da multifunção F é uma função, f, cujo gráfico está contido no gráfico da multifunção F, ou seja,

f: Dom(F) $\rightarrow$ Y, tal que $f(x)\in F(x)$ para todo o $x\in$ Dom(F).

Segue-se um exemplo de uma multifunção.

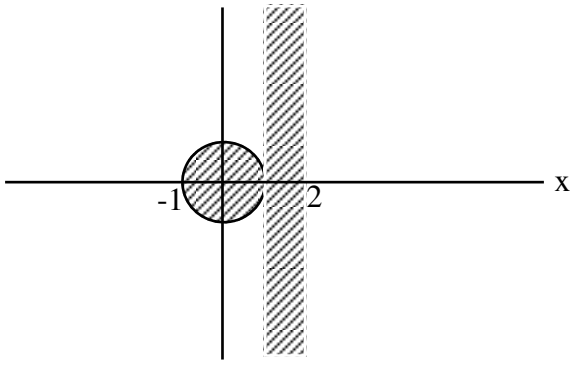
2.2 - Exemplo

A reunião do círculo $\{(x,y): x^2+y^2\leq 1\}$ com o conjunto $[1,n]x\mathbf{R}$, onde n é um número natural, corresponde a gráfico da multifunção

$$T_n(x) = \begin{cases} [-\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2}] & \text{se } -1\leq x<1 \\ \mathbf{R} & \text{se } 1\leq x\leq n \\ \emptyset & \text{no caso contrário} \end{cases}$$

o qual, para n=2, se representa na figura a seguir.

O domínio de T_n é o intervalo [-1,n] e a sua imagem é **R**.



Dada uma multifunção F de X em Y, se A é um subconjunto de X, a imagem de A segundo F corresponde ao conjunto $F(A)=\underset{a\in A}{\cup} F(a)$ e a imagem recíproca de F de um subconjunto B de Y corresponde ao conjunto $F^{-1}(B)=\{x\in X: F(x)\cap B\neq\emptyset\}$. Enquanto nas funções as imagens recíprocas são bem comportadas, no sentido em que preservam todas

as operações sobre conjuntos, infelizmente o mesmo não acontece com as multifunções. Com efeito, embora a reunião de imagens recíprocas de uma multifunção seja igual à reunião das imagens recíprocas dos respectivos conjuntos, para a intersecção e para a complementação já não se verifica este tipo de comportamento. Assim, dada uma multifunção F de X em Y, para as suas imagens e imagens recíprocas verificam-se as seguintes propriedades:

i) Se $\{A_i: i\in I\}$ é uma família de subconjuntos de X, então

$$F(\bigcup_{i\in I} A_i)=\bigcup_{i\in I} F(A_i) \text{ e } \bigcap_{i\in I} F(A_i)\supseteq F(\bigcap_{i\in I} A_i).$$

ii) Se$\{B_j: j\in J\}$ é uma família de subconjuntos de Y, então

$$F^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j)=\bigcup_{j\in J} F^{-1}(B_j) \text{ e } \bigcap_{j\in J} F^{-1}(B_j)\supseteq F^{-1}(\bigcap_{j\in J} B_j).$$

No exemplo 2.2, anteriormente considerado, sendo $B_1=[0, 1]$ e $B_2=[4, 6]$, vem que $T_2^{-1}(B_1\cap B_2)=\varnothing$ e $T_2^{-1}(B_1)\cap T_2^{-1}(B_2)=[-1,2]\cap[1, 2]=[1, 2]$.

No que diz respeito porém à comparação da imagem recíproca dos complementos com os complementos da imagem recíproca, nada se pode dizer. Note-se, por exemplo, que $1\in T_2^{-1}(B_1^c)$ mas $1\notin (T_2^{-1}(B_1))^c$, por outro $7\in (T_2^{-1}(B_1))^c$ mas $7\notin T_2^{-1}(B_1^c)$.

A colecção de multifunções de X em Y é parcialmente ordenada por inclusão, e escreve-se que $G\geq H$ desde que para cada $x\in X$ se verifique $G(x)\supseteq H(x)$ (ou seja, $Gr(G)\supseteq Gr(H)$). Para a família de funções do exemplo 2.2, verifica-se que $T_p\geq T_q$, desde que $p\geq q$.

Embora no teorema 1.15 e no corolário 1.16 a compacidade desempenhe um papel importante para a conclusão da existência de uma solução óptima para o problema de minimização, como veremos, se apenas estivermos interessados numa sua aproximação, basta que o conjunto de soluções admissíveis seja completo para se garantir a existência da respectiva solução aproximada.

2.3 - Teorema (Ekeland)

Seja E um espaço métrico completo e suponha-se que $f : E\to \mathbf{R}_+\cup\{+\infty\}$ é uma função estrita, semi-contínua inferior e limitada inferiormente. Considere-se um ponto $x_0\in Dom(f)$ e $\varepsilon>0$. Então existe $x'\in E$ tal que

(i) $f(x')+\varepsilon d(x_0,x') \leq f(x_0)$ (5)

(ii) $\forall x\neq x', f(x') < f(x) + \varepsilon d(x,x')$. (6)

Prova:

Sem perda de generalidade podemos tomar $\varepsilon=1$ e associar a função f com a multifunção F de E em sí próprio que a x faz corresponder o conjunto F(x) definido do seguinte modo:

$$F(x):=\{y\in E:\ f(y)+d(x,y)\leq f(x)\}$$

Dado que a função f é semi-contínua inferior e $\eta(y)=d(x,y)$ é contínua, podemos concluir que, para cada $x\in E$ as secções $S(f+\eta,f(x))$ são conjuntos fechados, ou seja, os conjuntos F(x) são fechados. Por outro lado, a multifunção F satisfaz as seguintes propriedades:

a) $\forall y\in E,\ y\in F(y)$ (reflexividade)

b) se $y\in F(x)$ então $F(x)\supseteq F(y)$ (transitividade).

Uma vez que condição a) é trivialmente satisfeita e a condição b) é evidente se $x\notin Dom(f)$ (note-se que neste caso F(x)=E), vamos fazer a prova de b) apenas no caso em que f(x) é finito.

Tome-se $y\in F(x)$ e $z\in F(y)$. Adicionando-se as desigualdades

$$f(z)+d(y,z)\leq f(y) \qquad \text{e} \qquad f(y)+d(x,y)\leq f(x)$$

e utilizando a desigualdade triangular obtém-se a desigualdade

$$f(z)+d(x,z)\leq f(x)$$

a qual implica que se tenha $z\in F(x)$ e, consequentemente, que $F(x)\supseteq F(y)$.

Associe-se agora à função f a função ψ definida no Dom(f) da seguinte maneira

$$\psi(x):=\inf_{y\in F(x)} f(y)$$

Dado que $\forall y\in F(x)$, $f(y)+d(y,x)\leq f(x)$ e ainda que $\psi(x)\leq f(y)\ \forall y\in F(x)$, concluimos que $\forall y\in F(x)$, $\psi(x)+d(y,x)\leq f(x)$. Logo obtém-se o seguinte majorante para o diâmetro de F(x):

$$Diam(F(x)) \leq 2(f(x)-\psi(x))\ ^{5} \qquad (7).$$

Seguidamente vamos definir a seguinte sucessão que começa com x_0: tome-se $x_{n+1}\in F(x_n)$ tal que $f(x_{n+1})\leq\psi(x_n)+2^{-n}$ (note-se que esta determinação de x_{n+1} é possível tendo em conta a definição de ínfimo). Uma vez que, de acordo com b) $F(x_n)\supseteq F(x_{n+1})$, temos que $\psi(x_n)\leq\psi(x_{n+1})$.

Por outro lado, dado que a inequação $\psi(x)\leq f(x)$ é sempre verdadeira, podemos obter as inequações $\psi(x_{n+1})\leq f(x_{n+1})\leq\psi(x_n)+2^{-n}\leq\psi(x_{n+1})+2^{-n}$ e, consequentemente, as desigualdades

$$0\leq f(x_{n+1})-\psi(x_{n+1})\leq 2^{-n} \qquad (8)$$

(observe-se que, tendo em conta a definição de f, esta desigualdade é válida porque $\psi(x_{n+1})<-\infty$).

As desigualdades (7) e (8) implicam que o diâmetro dos conjuntos fechados $F(x_n)$ convirja para 0. Dado que estes conjuntos fechados estão sucessivamente contidos uns nos outros e E é um e. m. completo, segue-se que $\bigcap_{n\geq 0} F(x_n) = \{x'\}$ e, dado que x' pertence

---

[5] Dado um conjunto C não vazio, designa-se por diâmetro de C, o número real não negativo, $Diam(C)=\sup\{d(x,y):\ x,y\in C\}$.

a $F(x_0)$, a desigualdade (i) fica satisfeita. Por outro lado, dado que x' pertence a todos os conjuntos $F(x_n)$, segue-se que $F(x_n)\supseteq F(x')$ $\forall n\geq 0$ e, consequentemente, que $F(x')=\{x'\}$. Assim deduziu-se que se $x\neq x'$ então $x\notin F(x')$, pelo que $f(x)+d(x',x)>f(x')$, o que completa a prova de (ii).

◊

O teorema a seguir sobre a existência de um ponto fixo de uma multifunção, decorre (como veremos) de um modo imediato do teorema anterior.

2.4 - Definição

Sendo G uma multifunção de E em si próprio, uma solução $\bar{x}$ da inclusão $\bar{x}\in G(\bar{x})$, designa-se por ponto fixo de G.

2.5 - Teorema (Caristi)

Seja G uma multifunção estrita de um espaço métrico completo E em si próprio. Suponha-se que existe uma função estrita, semi-contínua inferior e limitada inferiormente f de E em $\mathbf{R}_+\cup\{+\infty\}$ e que

$$\forall x\in E,\ \exists y\in G(x) \text{ tal que } f(y)+d(x,y)\leq f(x) \qquad (9).$$

Então a multifunção G tem um ponto fixo.

Por outro lado, se f está ligada a G pela relação forte

$$\forall x\in E,\ \forall y\in G(x),\ f(y)+d(x,y)\leq f(x) \qquad (10),$$

então existe $\bar{x}\in E$ tal que $G(\bar{x})=\{\bar{x}\}$.

Prova:

Seja $\bar{x}\in E$ tal que $\bar{x}$ satisfaz a condição (6) com $\varepsilon<1$, i. e, $f(\bar{x})<f(x)+\varepsilon d(x,\bar{x})$ $\forall x\neq\bar{x}$ (note-se que um tal $\bar{x}$ existe, uma vez que f satisfaz as hipóteses do teorema 2.3). Por outro lado considere-se que $\bar{y}\in G(\bar{x})$ satisfaz a desigualdade (9), i. e, $f(\bar{y})+d(\bar{x},\bar{y})\leq f(\bar{x})$. Se $\bar{y}$ não é igual a $\bar{x}$, a desigualdade (6) com $x:=\bar{y}$ implica que se tenha $d(\bar{x},\bar{y})<\varepsilon d(\bar{x},\bar{y})$ [6], o que é impossível tendo em conta que $\varepsilon<1$. Logo $\bar{y}$ é igual a $\bar{x}$. Como consequência pode afirmar-se que existe pelo menos um $\bar{x}$ tal que $\bar{x}\in G(\bar{x})$ se a condição (9) é satisfeita, e ainda que existe um $\bar{x}$ tal que todos os $\bar{y}\in G(\bar{x})$ são iguais a $\bar{x}$ ($G(\bar{x})=\{\bar{x}\}$) se a condição (10) é satisfeita (observe-se que, de acordo com a prova, todos os pontos de $G(\bar{x})$ que satisfazem a desigualdade (9) são iguais a $\bar{x}$, no entanto, no primeiro caso, podem existir pontos em $G(\bar{x})$ que não satisfazem a desigualdade em questão).

◊

[6] Com efeito, combinando a desigualdades $f(\bar{y})+d(\bar{x},\bar{y})\leq f(\bar{x})$ e $f(\bar{x})<f(\bar{y})+\varepsilon d(\bar{x},\bar{y})$, obtém-se $d(\bar{x},\bar{y})<\varepsilon d(\bar{x},\bar{y})$.

Uma vez que estamos a discutir teoremas de ponto fixo, provaremos um outro resultado no qual não se assume que f é semi-contínua inferior; mas onde se considera que a multifunção G tem um gráfico fechado [7].

A este propósito convém lembrar que sendo $f:X\to Y$ uma função contínua do espaço topológico (e.t.) X no e.t. Y, se Y é separado então o gráfico de f é fechado (observe-se que um e. t. Y diz-se separado ou de Hausdorff se $\forall a,b\in Y$, existe uma vizinhança de a, V_a, e uma vizinhança de b, V_b, tais que $V_a\cap V_b=\emptyset$) [8].

2.6 - Teorema

Seja E um espaço métrico completo. Considere-se uma multifunção G de E em E com um gráfico fechado. Se existe uma função estrita limitada inferiormente f de E em $\mathbf{R}_+\cup\{+\infty\}$ satisfazendo a condição (9), então a multifunção G tem um ponto fixo.

Prova:

Tome-se um ponto $x_0\in Dom(f)$ e utilize-se recursão para determinar a sucessão de pontos $x_n\in E$ tal que, pela condição (9), se verifica

$$x_{n+1}\in G(x_n),\quad d(x_{n+1},x_n)\le f(x_n)-f(x_{n+1}) \qquad (11)$$

Isto implica que a sucessão de números positivos $f(x_n)$ seja decrescente e, consequentemente, convergente para um número α. Adicionando as desigualdades (11) de n=p até n=q-1, a desigualdade triangular implica que se obtenha

$$d(x_p,x_q)\le \sum_{n=p}^{q-1} d(x_{n+1},x_n)\le f(x_p)-f(x_q).$$

---

[7] A este propósito convém lembrar que uma função pode ter um gráfico fechado e não ser semi-contínua inferior, i e, não ter todas as suas secções inferiores fechadas, como se exemplifica com a seguinte função g de $\mathbf{R}_+$ em $\mathbf{R}$ definida por $g(x)=\begin{cases} 1 \text{ se } x=\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ com } k\in N\cup\{0\} \\ tg(x) \quad \text{no caso contrário}\end{cases}$.

Com efeito, embora g(x) tenha um gráfico fechado, por exemplo, $S(g,0)=\bigcup_{k\in N\cup\{0\}}]\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \pi+k\pi]$,

é uma secção que não é fechada.

[8] Note-se que a noção de e.t. separável é distinta da noção de e.t. separado. Com efeito um e.t. X diz-se separável se existe uma sua parte A ($X\supseteq A$) finita ou numerável que é densa em X (i. e, a aderência de A coincide com X). De um modo equivalente, podemos dizer que X é separável se X admite uma base finita ou numerável de abertos (tendo em conta que dado um e.t. $<Y,\tau>$ uma família de subconjuntos de Y, B, diz-se uma base de abertos se todos os subconjuntos da família são abertos e se todo o aberto não vazio de Y fôr uma união, finita ou infinita, de subconjuntos de B).

Uma vez que o termo da direita tende para $\alpha-\alpha=0$, à medida que p e q tendem para infinito, concluímos que a sucessão dos x_n é uma sucessão de Cauchy que converge para um ponto $\bar{x}\in E$ (note-se que E é completo). Dado que os pares (x_n,x_{n+1}) pertencem ao gráfico de G (que é fechado) e convergem para o par $(\bar{x},\bar{x})$ que, consequentemente, também pertence ao gráfico de G, o limite $\bar{x}$ é um ponto fixo de G.

◊

Como corolário deste último teorema obteremos o teorema do ponto fixo de Banach-Picard para **contracções**.

2.7- Teorema (Banach-Picard)
Suponha-se que E é um espaço métrico completo e que $g: E\to E$ é uma contracção, i.e, $\exists k\in]0,1[$ tal que $\forall x,y\in E,\ d(g(x),g(y))\le kd(x,y)$ (12). Então g tem um único ponto fixo $\bar{x}$.

Prova:
Considere-se a função associada a g, f de E em $\mathbf{R}_+$ definida por

$$f(x):=\sum_{n=0}^{\infty} d(g^n(x),g^{n+1}(x)).$$

A condição (12) implica que se tenha

$$d(g^n(x),g^{n+1}(x)) \le kd(g^{n-1}(x),g^n(x)) \le k^n d(x,g(x)).$$

Consequentemente, a função f satisfaz a inequação

$$0 \le f(x) \le \frac{1}{1-k}\, d(x,g(x)) < +\infty.$$

Por outro lado, note-se que

$$f(x) = d(x,g(x)) + \sum_{n=1}^{\infty} d(g^n(x),g^{n+1}(x)) = d(x,g(x)) + f(g(x)).$$

Como consequência, as hipóteses do teorema 2.6 são satisfeitas, pelo que existe um ponto fixo para a contracção g. Além disso, também obtemos unicidade; se $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são pontos fixos de g, a desigualdade $d(\bar{x},\bar{y}) = d(g(\bar{x}),g(\bar{y})) \le kd(\bar{x},\bar{y})$ implica que $d(\bar{x},\bar{y})=0$, uma vez que $k<1$, donde vem que $\bar{x}=\bar{y}$.

◊

2.8 Exercício
Justifique a afirmação feita no final do teorema 2.7: "Como consequência, as hipóteses do teorema 2.6 são satisfeitas…".