1. Funções Semi-Contínuas e Semi-Compactas Inferiores

Os conceitos de função semi-contínua e semi-compacta inferior são (pela sua grande abrangência) especialmente uteis para os problemas de optimização (minimização de funções em determinadas regiões) que constituem o objectivo essencial deste estudo e que se podem caracterizar do seguinte modo: dado um subconjunto K de X ($X \supseteq K$) e uma função f de K em **R**, determinar α (e se possível $x^* \in K$ tal que $f(x^*)=\alpha$) tal que

$$\alpha := \inf_{x \in K} f(x) \qquad (1).$$

É nossa intenção mostrar que o problema (1) admite uma solução óptima ($x^* \in K$ tal que $f(x^*)=\alpha$) quando K é compacto e a função f é semi-contínua inferior. Este objectivo conduzir-nos-à ao estudo destas funções (semi-contínuas inferiores) e de algumas das suas propriedades.

Um modo de evitar a referência ao subconjunto K, no qual a função f está definida, consiste na introdução da seguinte função f_K:

$$f_K(x) := \begin{cases} f(x) \text{ se } x \in K \\ +\infty \text{ se } x \notin K \end{cases}$$

Nestas condições f_K é uma função de X em $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ a partir da qual se pode definir o conjunto $K=\{x \in X \mid f_K(x) < +\infty\}$.

Qualquer solução x^* de (1) é solução do problema

$$f_K(x^*) = \inf_{x \in X} f_K(x)$$

e reciprocamente.

1.1 - Definição

Dada uma função f de X em $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, o seu domínio de uma função (**Dom(f)**) corresponde ao subconjunto de X, $Dom(f) = \{x \in X \mid f(x) < +\infty\}$. A função f diz-se estrita (**função estrita**) se o seu domínio é não vazio, i.e, se se verifica que $\{x \in X \mid f(x) < +\infty\} \neq \emptyset$. Quando f é estrita e os seus valores pertencem ao intervalo $]-\infty,+\infty]$ diz-se que f é uma **função própria**.

De acordo com esta definição tem-se que $Dom(f_K(x)) = K$.

1.2 - Definição

Seja K um subconjunto de X. Designamos a função $\psi_K(x)$: $X \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$

definida por:

$$\psi_K(x) = \begin{cases} 0 \text{ if } x \in K \\ +\infty \text{ if } x \notin K \end{cases}$$

por **função indicadora** de K.

Note-se que o problema (1) é equivalente ao problema:

$$f(x^*)+\psi_K(x^*) = \inf_{x \in K} (f(x)+\psi_K(x))$$

onde, na função $f(x)+\psi_K(x)$, $\psi_K(x)$ aparece restringida a K.

Dada uma função g de X em $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, podemos caracteriza-la à custa do seu **epigrafo**, que corresponde ao subconjunto de $X \times \mathbf{R}$ que se define como segue:

1.3 - Definição

Dada uma função g de X em $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, designamos o conjunto

$$Ep(g)=\{(x,\lambda) \in X \times \mathbf{R} \mid g(x) \leq \lambda\}$$

por epigrafo de g, e o conjunto

$$Gr(g)=\{(x,\lambda) \in X \times \mathbf{R} \mid g(x) = \lambda\}$$

por gráfico de g.

De acordo com esta definição, o epigrafo e o grafo de g são não vazios sse g é uma função estrita.

1.4 - Teorema

Considere-se uma família de funções f_i de X em $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ e o seu envelope superior $\sup_{i \in I} f_i$. Então

$$Ep(\sup_{i \in I} f_i) = \cap_{i \in I} Ep(f_i).$$

Prova:

1. Seja $(x,\lambda) \in Ep(\sup_{i \in I} f_i)$, então vem que

$$\sup_{i \in I} f_i(x) \leq \lambda \Rightarrow f_i(x) \leq \lambda \ \forall i \in I \Rightarrow (x,\lambda) \in Ep(f_i) \ \forall i \in I \Rightarrow (x,\lambda) \in \cap_{i \in I} Ep(f_i),$$

concluindo-se assim que $\cap_{i \in I} Ep(f_i) \supseteq Ep(\sup_{i \in I} f_i)$.

2. Suponha-se agora que $(x,\lambda) \in \cap_{i \in I} Ep(f_i)$, ou seja, $(x,\lambda) \in Ep(f_i) \ \forall i \in I$. Logo vem que $f_i(x) \leq \lambda \ \forall i \in I$ e, em particular, $\sup_{i \in I} f_i(x) \leq \lambda \Rightarrow (x,\lambda) \in Ep(\sup_{i \in I} f_i)$. Como consequência concluimos que $Ep(\sup_{i \in I} f_i) \supseteq \cap_{i \in I} Ep(f_i)$.

De 1. e 2. decorre finalmente que $Ep(\sup_{i\in I} f_i) = \cap_{i\in I} Ep(f_i)$.

◊

1.5 - Definição

Seja f uma função de X em $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$. Para cada $\lambda\in\mathbf{R}$, o conjunto

$$S(f,\lambda):=\{x\in X|\ f(x)\leq\lambda\}$$

designa-se por **secção** de f (ou **secção inferior** de f).

Sendo $\alpha:=\inf_{x\in X} f(x)$, o conjunto M de soluções do problema (1) pode escrever-se na forma:

$$M=\cap_{\lambda>\alpha} S(f_K,\lambda).$$

Como consequência, o conjunto de soluções M goza das propriedades das secções de f que se mantêm estáveis relativamente à intersecção (como são, por exemplo, as de serem conjuntos fechados, compactos, convexos, etc., nos casos em que tal acontece para as respectivas secções).

1.6 Teorema

Considerando-se a família de funções f_i de X em $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ e o seu envelope superior $\sup_{i\in I} f_i$, pode concluir-se que

$$S(\sup_{i\in I} f_i,\lambda) = \cap_{i\in I} S(f_i,\lambda).$$

Prova:

A prova é idêntica à do teorema 1.4.

◊

Sendo X um espaço métrico (e.m.), dizemos que uma função f, de X em $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$, é contínua no ponto x_0 (o qual necessàriamente pertence ao domínio de f) se, $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que $\forall x\in B(x_0,\delta)$ temos que $|f(x)-f(x_0)|\leq\varepsilon$, i.e, $f(x_0)-\varepsilon\leq f(x)\leq f(x_0)+\varepsilon$. Considerando apenas uma destas desigualdades ($\lambda:=f(x_0)-\varepsilon\leq f(x)$), de acordo com a definição a seguir, somos conduzidos à noção de semi-continuidade inferior.

1.7 - Definição

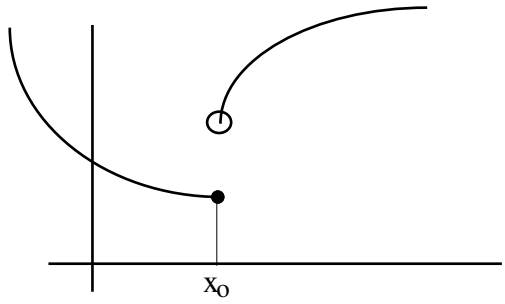
Dado um e. m. X, uma função f de X em $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ diz-se uma função semi-contínua inferior em $x_0\in X$ se $\forall\lambda<f(x_0)$ (ou seja, $\forall\varepsilon>0$ tal que $\lambda:=f(x_0)-\varepsilon$), $\exists\delta>0$ tal que

$$\forall x\in B(x_0,\delta),\ \lambda\le f(x)\ \text{(i.e, } f(x_0)-\varepsilon\le f(x))$$

Dizemos ainda que f é **semi-contínua inferior**, se f é semi-contínua inferior em todos os pontos de X. Uma função f é **semi-contínua superior** se a função -f é semi-contínua inferior.

Em espaços topológicos mais gerais (não necessariamente métricos) a definição de semi-continuidade inferior em $x_0\in X$, tomaria a forma: $\forall\lambda<f(x_0)$ $\exists V_{x_0}$ (vizinhança de x_0) tal que $\forall x\in V_{x_0}$ $\lambda\le f(x)$.

Na figura a seguir faz-se a representação gráfica de uma função semi-contínua inferior em x_0.



Associado ao estudo das funções semi-contínuas inferiores é útil introduzir a seguinte noção de limite.

1.8 - Definição

Dada uma função f do e. m. X em $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$, define-se por **limite do ínfimo** de f(x) quando x tende para x_0 e denota-se $\lim_{x\to x_0}\inf f(x)$, o seguinte limite:

$$\lim_{x\to x_0}\inf f(x) := \sup_{\delta>0}\ \inf_{x\in B(x_0,\delta)} f(x).$$

Tal como acima, no caso de X ser um espaço topológico (não necessariamente métrica), sendo ϑ_{x_0} o conjunto das vizinhaças de x_0, a definição de limite do ínfimo de f(x) quando x tende para x_0, vem dada por $\lim_{x\to x_0}\inf f(x) := \sup_{V\in\vartheta_{x_0}}\ \inf_{x\in V} f(x)$.

1.9 - Teorema

Uma função f do e. m. X em $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ é semi-contínua inferior em $x_0\in X$ sse

$$f(x_0) \le \lim_{x\to x_0} \inf f(x).$$

Prova:

1. Suponha-se que f é semi-contínua inferior em x_0. Então $\forall\lambda<f(x_0)$, $\exists\delta>0$ tal que $\forall x\in B(x_0,\delta)$ $\lambda\le f(x)$. Logo, em particular, vem que $\lambda \le \inf_{x\in B(x_0,\delta)} f(x)$. Por outro lado, uma vez que, $\inf_{x\in B(x_0,\delta)} f(x) \le \sup_{\delta'>0} \inf_{x\in B(x_0,\delta')} f(x)$, vem que

$$\lambda \le \lim_{x\to x_0} \inf f(x) \qquad (2)$$

Suponha-se agora que $f(x_0)>\lim_{x\to x_0} \inf f(x)$, i. e, $f(x_0)=\lim_{x\to x_0} \inf f(x)+\varepsilon$ (com $\varepsilon>0$). Então, fazendo $\lambda=\lim_{x\to x_0} \inf f(x)+\frac{\varepsilon}{2}$ tem-se que $\lambda<f(x_0)$, o que, tendo em conta (2), implica que se obtenha $\lambda \le \lim_{x\to x_0} \inf f(x)$, o que é absurdo (uma vez que, por construção $\lambda=\lim_{x\to x_0} \inf f(x)+\frac{\varepsilon}{2}$). Logo $f(x_0) \le \lim_{x\to x_0} \inf f(x)$.

2. Reciprocamente, suponha-se que $f(x_0) \le \lim_{x\to x_0} \inf f(x)$, i.e,

$$f(x_0) \le \sup_{\delta'>0} \inf_{x\in B(x_0,\delta')} f(x)$$

então $\forall\lambda<f(x_0)$ vem que $\lambda < f(x_0) \le \sup_{\delta'>0} \inf_{x\in B(x_0,\delta')} f(x)$.

Nestas condições, fazendo $\varepsilon=f(x_0)-\lambda$ e $\psi(\delta')=\inf_{x\in B(x_0,\delta')} f(x)$, vem que

$$\lambda+\varepsilon \le \sup_{\delta'>0} \psi(\delta'),$$

logo, pela definição de supremo vem que $\exists\delta>0$ tal que $\lambda+\frac{\varepsilon}{2} \le \psi(\delta)$, ou seja, $\exists\delta>0$ tal que $\lambda+\frac{\varepsilon}{2} \le \inf_{x\in B(x_0,\delta)} f(x)$, o que prova que $\exists\delta>0$ tal que $\forall x\in B(x_0,\delta)$ $\lambda \le f(x)$, o que é equivalente a dizer que f é semi-contínua inferior.

◊

1.10 - Teorema

Seja f uma função do e. m. X em $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$. Então as afirmações, a seguir, são equivalentes.

a) f é semi-contínua inferior;

b) o epigrafo de f é fechado;

c) todas as secções de f são fechadas.

Prova:

1. Prova de que a) $\Rightarrow$ b). Seja f semi-contínua inferior e considere-se a sucessão $(x_n,\lambda_n)\in Ep(f)$ convergente para (x',λ'). Pelo teorema 1.9 sabe-se que

$$f(x') \le \lim_{x\to x'} \inf f(x) = \sup_{\delta>0} \inf_{x\in B(x',\delta)} f(x).$$

Por outro lado

$$\sup_{\delta>0} \inf_{x\in B(x',\delta)} f(x) \le \sup_{\delta>0} \inf_{x_n\in B(x',\delta)} f(x_n) = \lim_{x_n\to x'} \inf f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \inf f(x_n),$$

donde, tendo em conta que $f(x_n)\le\lambda_n\ \forall n\in\mathbf{N}$, se conclui que $\lim_{n\to\infty} \inf f(x_n) \le \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda'$.

Assim, vem que $f(x') \le \lambda'$, i.e, $(x',\lambda')\in Ep(f)$, pelo que Ep(f) é fechado.

2. Prova de que b) $\Rightarrow$ c). Suponha-se que Ep(f) é fechado e considere-se uma secção arbitrária $S(f,\lambda)$ na qual a sucessão x_n converge para x. Logo vem que a sucessão $(x_n,\lambda)\in Ep(f)$ converge para $(x,\lambda)\in Ep(f)$, ou seja, $f(x)\le\lambda$, pelo que $x\in S(f,\lambda)$, o que completa aprova.

3. Prova de que c) $\Rightarrow$ a). Suponha-se que todas as secções $S(f,\lambda)$ são fechadas, que $x_0\in X$ e que $\lambda<f(x_0)$. Então x_0 não pertence a $S(f,\lambda)$, pelo que $\exists\delta>0$ tal que $B(x_0,\delta)\cap S(f,\lambda)=\varnothing$, ou seja, $f(x)>\lambda\ \forall x\in B(x_0,\delta)$, i. e, $\exists\delta>0$ tal que $\forall x\in B(x_0,\delta)\ \lambda\le f(x)$, o que é equivalente a dizer que f é semi-contínua inferior.

◊

1.11 - Corolário

Um subconjunto K do e. m. X é fechado sse a sua função indicadora é uma função semi-contínua inferior.

Prova:

Com efeito, sendo ψ_K a função indicadora de K e $\mathbf{R}_+$ o conjunto dos reais não negativos, $Ep(\psi_K)=K\times\mathbf{R}_+$ é um conjunto fechado sse K é fechado.

◊

1.12 Teorema

Se as funções f,g, f_i do e. m. X em $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ são semi-contínuas inferiores, então

a) f+g é semi-contínua inferior;

b) para $\alpha>0$, αf é semi-contínua inferior;

c) $\inf\{f,g\}$ é semi-contínua inferior;

d) sendo A uma aplicação contínua do e. m. Y no e. m. X, $f\circ A$ é uma aplicação semi-contínua inferior;

e) $\sup_{i\in I} f_i$ é semi-contínua inferior.

Prova:

a) Seja $\lambda = (f+g)(x_0)-\varepsilon$, com $\varepsilon>0$. Logo vem que $\lambda' = f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}$ e $\lambda'' = g(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}$ são tais que $\lambda=\lambda'+\lambda''<(f+g)(x_0)$, $\lambda'<f(x_0)$ e $\lambda''<g(x_0)$. Como consequência da continuidade inferior de f e g tem-se que $\exists\delta',\delta''>0$ tais que $\forall x\in B(x_0,\delta')\ \lambda'\le f(x)$ e $\forall x\in B(x_0,\delta'')\ \lambda''\le g(x)$. Logo vem que, para $\delta=\min\{\delta',\delta''\}$ $\forall x\in B(x_0,\delta)\ \lambda'\le f(x)$ e $\lambda''\le g(x)$, donde

$$\forall x\in B(x_0,\delta)\quad \lambda = \lambda'+\lambda'' \le f(x)+g(x) = (f+g)(x).$$

b) Se $\alpha>0$, então para $\lambda<\alpha f(x_0)$, vem que $\frac{\lambda}{\alpha}<f(x_0)$. Logo pela semi-continuidade inferior de f vem que $\exists\delta>0$ tal que $\forall x\in B(x_0,\delta)\ \frac{\lambda}{\alpha} \le f(x)$, o que é equivalente a ter-se $\forall x\in B(x_0,\delta)\ \lambda \le \alpha f(x)$, o que prova que αf é semi-contínua inferior.

c) Sendo $\lambda<\inf\{f(x_0),g(x_0)\}$ vem que $\lambda<f(x_0)$ e $\lambda<g(x_0)$. Nestas condições, pela semi-continuidade inferior de f e g conclui-se que $\exists\delta'>0$ tal que $\forall x\in B(x_0,\delta')\ \lambda\le f(x)$ e $\exists\delta''>0$ tal que $\forall x\in B(x_0,\delta'')\ \lambda\le g(x)$. Logo sendo $\delta=\min\{\delta',\delta''\}$ $\forall x\in B(x_0,\delta)\ \lambda\le f(x)$ e $\lambda\le g(x)$, pelo que, em particular, $\lambda\le\inf\{f(x),g(x)\}=(\inf\{f,g\})(x)$.

d) Sendo $\lambda<f(A(y_0))$, pela semi-continuidade inferior de f, vem que $\exists\varepsilon>0$ tal que $\forall A(y)\in B(A(y_0),\varepsilon)\ \lambda\le f(A(y))$. Por outro lado, pela continuidade de A, $\exists\delta>0$ tal que $\forall y\in B(y_0,\delta)\ A(y)\in B(A(y_0),\varepsilon)$, ou seja, $B(A(y_0),\varepsilon)\supseteq A(B(y_0,\delta))$. Logo $\forall y\in B(y_0,\delta)$ $\lambda\le f(A(y))$.

e) Pelo teorema 1.4, $Ep(\sup_{i\in I} f_i) = \cap_{i\in I} Ep(f_i)$. Por outro lado, do teorema 1.10 decorre que $\forall i\in I$ $Ep(f_i)$ é fechado, logo $\cap_{i\in I} Ep(f_i)$ é fechado (intersecção de fechados [1]) e, novamente pelo teorema 1.10, vem que $\sup_{i\in I} f_i$ é semi-contínua inferior.

◊

1.13 - Teorema

Suponha-se que K é um subconjunto fechado do e. m. X e que f é uma função semi-contínua inferior do espaço métrico K em **R**. Então a função f_K de X em $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ é semi-contínua inferior.

Prova:

Com efeito, as secções $S(f_K,\lambda)$ e $S(f,\lambda)$ são idênticas. Uma vez que $S(f,\lambda)$ é fechado em K, e K é fechado em X, segue-se que $S(f_K,\lambda)=S(f,\lambda)$ é fechado em X.

◊

Para o estudo dos problemas de minimização, que pretendemos abordar, é especialmente útil que se considerem as **funções semi-compactas inferiores**, as quais definiremos a seguir.

---

[1] Tenha-se em atenção que a intersecção de uma família arbitrária de fechados é um fechado.

1.14 - Definição

Dizemos que uma função f de X em $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ é **semi-compacta inferior** (ou simplesmente **inf compacta**) se todas as suas secções (inferiores) são relativamente compactas [2].

Antes de nos referirmos ao próximo teorema, vamos rever algumas propriedades relacionada com os espaços topológicos compactos, para o caso particular em que os espaços em causa são também espaços métricos (note-se que todo o espaço métrico é topológico, o recíproco é que não é verdadeiro).

Dado um espaço métrico M, são equivalentes as afirmações de que a) M é compacto; b) todo o subconjunto infinito de M possui um ponto de acumulção; c) toda a sucessão em M admite uma subsucessão convergente; d) M é completo e totalmente limitado [3].

Prova de que a) $\Rightarrow$ b). Suponha-se que M é compacto, e seja X um subconjunto de M que não tem pontos de acumulação. Então a aderência de X coincide com o próprio X, i. e, X é um conjunto fechado em M (note-se que a aderência de um conjunto é a reunião desse conjunto com o seu derivado, i. e, com o conjunto dos seus pontos de acumulação). Nestas condições conclui-se que X é compacto [4]. Além disso, como nenhum ponto $x\in X$ é ponto de acumulação, X é discreto. Logo, pelo facto de ser compacto, é finito (caso contrário poder-se-ia obter uma cobertura de bolas abertas centradas em cada um dos seus pontos que não admitiria qualquer subcobertura finita).

Prova de que b) $\Rightarrow$ c). Dada uma sucessão, (x_n), em M, se o conjunto dos seus valores é finito, isso significa que existem valores que se repetem ao longo da sucessão, pelo que existe uma subsucessão (x_{n_k}) de termos constantes iguais a α que é trivialmente convergente para α. No caso do conjunto dos seus valores ser infinito, por hipótese, existe um ponto de acumulação α e, nestas condições, toda a bola centrada em α contém termos

---

[2]Sendo S um conjunto não vazio e τ uma família de subconjuntos de S ($2^S\supseteq\tau$), o par $<S,\tau>$ diz-se um espaço topológico (e.t.) sse i) $\varnothing\in\tau$ e $S\in\tau$; ii) para um conjunto arbitrário de índices Λ, se $A_\lambda\in\tau\ \forall\lambda\in\Lambda$, então $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\in\tau$; iii) se $A_i\in\tau$ para i=1,…,n, então $\bigcap_{i=1}^{n} A_i\in\tau$. Um espaço topológico, $<S,\tau>$, diz-se compacto sse toda a cobertura aberta de S (cobertura de S por uma família de abertos de τ), admite uma subcobertura finita. Um conjunto diz-se relativamente compacto se o seu fecho (ou aderência) é compacto.

[3]Um conjunto C diz-se totalmente limitado se para todo o $\varepsilon>0$, podemos exprimir C como reunião de um número finito de bolas de raio ε.

[4]Observe-se que todo o subconjunto fechado de um espaço compacto é compacto. Com efeito, sendo M um compacto e F um fechado tal que $M\supseteq F$, dada uma cobertura de abertos de F, i. e, $\cup A_\lambda\supseteq F$, tem-se que $(\cup A_\lambda)\cup(M\backslash F)$ é uma cobertura de abertos de M. Logo existe uma subcobertura de M (e por conseguinte de F) $A_{\lambda_1}\cup A_{\lambda_2}\cup\ldots\cup A_{\lambda_p}\cup(M\backslash F)$ que é finita, e da qual se retira a cobertura de F, $A_{\lambda_1}\cup A_{\lambda_2}\cup\ldots\cup A_{\lambda_p}$.

de (x_n) com índices arbitrariamente elevados, logo α é o limite de alguma subsucessão de (x_n).

Prova de que c) $\Rightarrow$ d). Tendo em conta a hipótese c), toda a sucessão de Cauchy em M possui uma subsucessão convergente, logo é convergente, pelo que M é completo. Resta provar que M é totalmente limitado. Com efeito, dado $\varepsilon>0$, escolha-se um ponto $x_1 \in M$. Se for $M=B(x_1,\varepsilon)$, o resultado fica provado, caso contrário, $\exists x_2 \in M \backslash B(x_1,\varepsilon)$. Se for $M=B(x_1,\varepsilon)\cup B(x_2,\varepsilon)$, a prova fica completa, caso contrário, $\exists x_3 \in M \backslash B(x_1,\varepsilon)\cup B(x_2,\varepsilon)$ e o processo repete-se. Procedendo-se deste modo chegamos a um número natural n tal que ou $M=B(x_1,\varepsilon)\cup B(x_2,\varepsilon)\cup\ldots\cup B(x_n,\varepsilon)$, ou a sucessão dos x_n é tal que $d(x_m,x_n)\geq\varepsilon$ para quaisquer $m\neq n$ e, nestas condições, nenhuma subsucessão de (x_n) seria convergente, o que contraria a hipótese. Isto quer dizer que uma tal situação não ocorrerá pelo que M é totalmente limitado.

Prova de que d) $\Rightarrow$a). Seja M completo e totalmente limitado e por absurdo suponhamos que existe um cobertura aberta de M, $\cup A_\lambda$, que não admite uma subcobertura finita. Considere-se uma reunião finita de conjuntos fechadas de diâmetro menor do que 1 que contenha M (o que é possível, dado o facto de M ser totalmente limitado). Pelo menos um destes conjuntos, o qual designaremos por C_1, é tal que $\cup A_\lambda \supseteq C_1$ e não admite uma subcobertura finita, mas C_1 também é totalmente limitado, logo pode ser expresso como reunião de um número finito de conjuntos fechados de diâmetro inferior a $\frac{1}{2}$. Novamente, pelo menos um destes conjuntos, o qual designaremos por C_2, não pode ser coberto por um número finito dos A_λ. Prosseguindo deste modo, obteremos uma sucessão $C_1\supseteq C_2\supseteq\ldots\supseteq C_n\supseteq\ldots$ de subconjuntos fechados de M, tais que, para todo o natural n, o diâmetro de C_n é inferior a $\frac{1}{n}$ e o C_n não está contido em nenhuma reunião finita dos A_λ's. Em particular, nenhum C_n é vazio. Logo, pelo facto de M ser completo $\exists \alpha \in M$ tal que $\{\alpha\}=\cap_{n=1}^{\infty} C_n$. Para algum λ tem-se $\alpha \in A_\lambda$. Sendo A_λ aberto $\exists n$ tal que $A_\lambda \supseteq B(\alpha,\frac{1}{n})$. Uma vez que $\alpha \in C_n$ e o diâmetro de C_n é menor do que $\frac{1}{n}$, concluímos que $B(\alpha,\frac{1}{n})\supseteq C_n$, pelo que $A_\lambda \supseteq C_n$, o que é contraditório.

1.15 - Teorema

Suponha-se que uma função estrita f do e. m. X em $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ é semi-contínua inferior e semi-compacta inferior. Então o conjunto de pontos M nos quais f atinge o seu mínimo é não vazio e compacto.

Prova:

Seja $\alpha=\inf_{x\in X} f(x)\in \mathbf{R}\cup\{-\infty\}$ e $\lambda_0>\alpha$. Para todo o $\lambda\in]\alpha,\lambda_0]$ existe $x_\lambda\in S(f,\lambda)$ ($S(f,\lambda_0)\supseteq S(f,\lambda)$). Uma vez que $S(f,\lambda_0)$ é compacto, existe uma subsucessão $x_{\lambda'}$ que converge para $x'\in S(f,\lambda_0)$. Uma vez que f é semi-contínua inferior, deduzimos que

$$f(x') \le \lim_{x_{\lambda'}\to x'} \inf f(x_{\lambda'}) \le \lim_{\lambda'>\alpha} \inf \lambda' = \alpha \le f(x')$$

Consequentemente, $f(x')=\alpha$, o que implica que α é finito. Além disso, uma vez que $M=\cap_{\alpha<\lambda\le\lambda_0} S(f,\lambda)$ é intersecção de conjuntos compactos, vem que M é compacto.

◊

1.16 - Corolário

Qualquer função semi-contínua inferior de um compacto $K\neq\emptyset$ ($X\supseteq K$) em $\mathbf{R}$ é limitada inferiormente e atinge o seu mínimo.

Prova:

Podemos aplicar o teorema 1.15 à função f_K definida por $f_K(x)=f(x)$ se $x\in K$ e $f_K(x)=+\infty$ se $x\notin K$, tendo em atenção que f_K é uma função estrita (dado que $\mathbf{R}\supseteq f(K)$ e $K\neq\emptyset$) e semi-contínua inferior (uma vez que K é fechado e f é semi-contínua inferior) e ainda que f_K é semi-compacta inferior (dado que, por ser semi-contínua inferior, todas as secções inferiores são fechadas e todo o subconjunto fechado de um compacto é compacto).

◊

Note-se que o teorema 1.15, apesar de muito simples, constitui um resultado bastante geral, quanto à existência de solução óptima para um problema de optimização. A grande dificuldade da sua aplicação, porém, reside na verificação das suas hipóteses. Existem outros resultados que não exijem qualquer condição relativa à compacidade, no entanto, requerem hipóteses mais fortes relativamente à regularidade da função a minimizar.

1.17 - Teorema

Supondo que K é um espaço topológico compacto e que g é uma função semi-contínua inferior de XxK em $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$, a função f: $X\rightarrow\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ definida por $\forall x\in X$, $f(x):=\inf_{y\in K} g(x,y)$ é também semi-contínua inferior.

Prova:

Tome-se $\lambda\in\mathbf{R}$ e considere-se a sucessão de termos $x_n\in S(f,\lambda)$ que converge para x_0. Provaremos que $x_0\in S(f,\lambda)$. Uma vez que a função $y \rightarrow g(x_n,y)$ é semi-contínua inferior, e uma vez que K é compacto, existe $y_n\in K$ tal que $f(x_n)=g(x_n,y_n)$ (como decorre do corolário 1.16). Consequentemente, a sucessão y_n contém uma subsucessão de elementos $y_{n'}$ que converge para um elemento y_0 de K. Então, a sucessão de pares $(x_{n'},y_{n'})$ de $S(g,\lambda)$ (note-se que $g(x_{n'},y_{n'})=f(x_{n'})\leq\lambda$) converge para (x_0,y_0) que pertence a $S(g,\lambda)$, uma vez que g é semi-contínua inferior e por conseguinte $S(g,\lambda)$ é um conjunto fechado. Consequentemente $x_0\in S(f,\lambda)$, dado que $f(x_0)\leq g(x_0,y_0)\leq\lambda$.

$\Diamond$

Segue-se um resultado onde se destaca a importância das funções semi-contínuas e semi-compactas inferiores.

1.18 - Teorema

Considerem-se n funções semi-contínuas inferiores f_i de X em $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ e suponha-se que uma destas funções é semi-compacta inferior. Associe-se a estas funções a aplicação F definida de $K:=\cap_{i=1}^{n}\mathrm{Dom}\, f_i$ em $\mathbf{R}^n$ por:

$$\forall x\in K,\ F(x):=(f_1(x),f_2(x),\ldots,f_n(x))$$

Então o conjunto $F(K)+\mathbf{R}_+^n$ é fechado em $\mathbf{R}^n$.

Prova:

Considerando-se uma sucessão de elementos $x_n\in K$ e elementos $u_n\in\mathbf{R}_+^n$ tal que a sucessão de elementos $y_n:=F(x_n)+u_n$ converge para um elemento y de $\mathbf{R}^n$, pretende-se provar que y pertence a $F(K)+\mathbf{R}_+^n$.

Seja f_{i_0} a função que é semi-contínua e semi-compacta inferior. Uma vez que $f_{i_0}(x_n)+u_{n_{io}}$ converge para y_{i_0}, existe n_0 tal que $|y_{i_0}-f_{i_0}(x_n)-u_{n_{io}}|\leq 1$ sempre que $n\geq n_0$, ou seja, $f_{i_0}(x_n) \leq y_{i_0}-u_{n_{io}}+1 \leq y_{i_0}+1$. Assim, deduzimos que, para $n\geq n_0$, x_n pertence à secção $S(f_{i_0},y_{i_0}+1)$ que é um conjunto compacto (dado que $S(f_{i_0},y_{i_0}+1)=Ad(S(f_{i_0},y_{i_0}+1))$ pela semi-continuidade de f_{i_0}, e $Ad(S(f_{i_0},y_{i_0}+1))$ é compacta por f_{i_0} ser semi-compacta inferior. Consequentemente, existe uma subsucessão de elenentos $x_{n'}$ que converge para um elemento $\bar{x}$. Por outro lado, uma vez que as funções f_i (para i=1, … , n) são semi-contínuas inferiores conclui-se que

$$f_i(\bar{x}) \le \lim_{n\to\infty} \inf f_i(x_n) = \lim_{n\to\infty} \inf (y_{n'_i} - u_{n'_i}) \le \lim_{n\to\infty} \inf y_{n'_i} = y_i.$$

Consequentemente da inequação obtida ($f_i(\bar{x}) \le y_i$) decorre que para $u_i := y_i - f_i(\bar{x})$, se verifica que u_i ou é positivo ou nulo, donde se mostra que $y = F(\bar{x}) + u$ é tal que $\bar{x} \in K$ e $u \in \mathbf{R}^n_+$, o que completa a prova.

◊

1.19 Exercício

Uma função f do e. m. X em $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ é semi-contínua inferior em X sse $\forall \alpha \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, $\{x \in X: f(x) > \alpha\}$ é aberto.

1.20 Exercício

Considere-se a função $f(x) := \frac{1}{2}\|x-u\|^2$ definida num espaço de Hilbet X, onde $u \in X$. Seja K um subconjunto convexo e não vazio de X e seja $v \in \mathbf{R}$ tal que $v := \inf_{x \in K} f(x)$.

a) Sendo $S_K(f,\lambda) := \{x \in K \mid f(x) \le \lambda\}$, mostrar que $\forall \lambda > v$,

$$\mathrm{Diam}[S_K(f,\lambda)] \le \sqrt[2]{8(\lambda - v)},$$

onde, dado um subconjunto A de X,

$$\mathrm{Diam}[A] := \sup\{d(x,y) := \|x-y\|: x,y \in A\}.$$

b) Supondo que K é fechado provar que f admite um único mínimo $x^* \in K$ (sugestão: provar que a sucessão de subconjuntos $\{S_K(f, v+\frac{1}{n})\}$ forma uma sucessão de conjuntos fechados cujo diâmetro tende para zero).