Homenagem ao Professor Mário da Silva Rosa
Coimbra, 15 de Outubro de 2003

Uma abordagem algébrica de grafos fortemente regulares

Domingos M. Cardoso
(Universidade de Aveiro)

Sumário

Conceitos e resultados fundamentais

- O conceito de *grafo fortemente regular* foi introduzido em Bose, R.C. *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs*, Pacific J. Math. 13 (1963): 389-419.

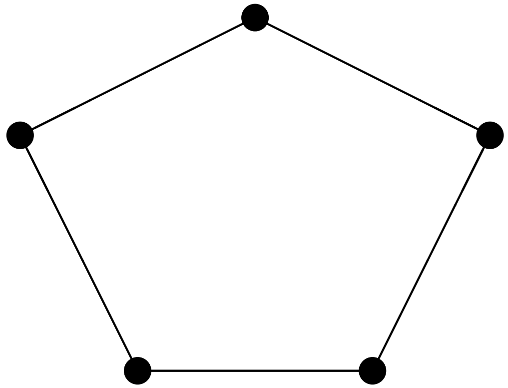
- **Definição**: Um grafo não nulo e não completo diz-se fortemente regular com parâmetros

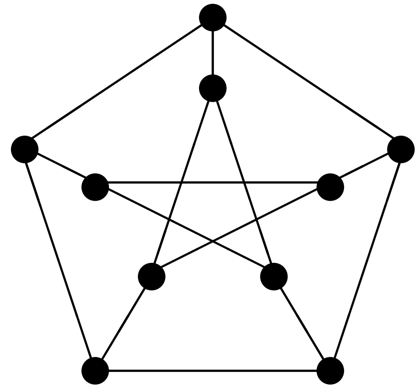
$$(n, p; a, c)$$

se tem ordem n, é p-regular e todo o par de vértices adjacentes tem a vizinhos em comum e todo o par de vértices não adjacentes tem c vizinhos em comum.

Conceitos e resultados fundamentais

- Exemplos de grafos fortemente regulares.





Grafos fortemente regulares com parâmetros

$$(5, 2, 0, 1) \text{ e } (10, 3, 0, 1).$$

Conceitos e resultados fundamentais

Sendo G um grafo fortemente regular com parâmetros (n, p, a, c)

- se $c > 0$ então $diam(G) = 2$;
- o complementar de G é também fortemente regular com parâmetros $(n, \bar{p}, \bar{a}, \bar{c})$ tais que

$$\bar{p} = n - p - 1, \quad (1)$$

$$\bar{a} = n - 2 - 2p + c, \quad (2)$$

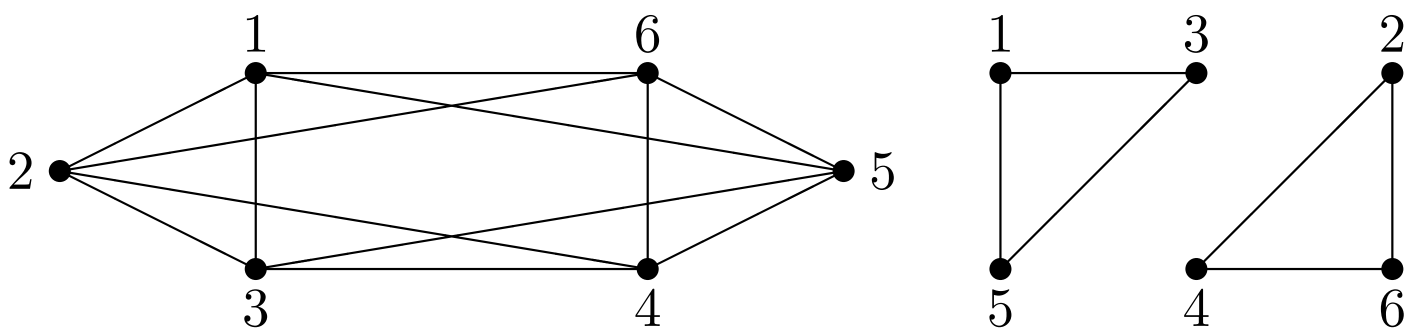
$$\bar{c} = n - 2p + a, \quad (3)$$

- verifica-se a igualdade:

$$p(p - a - 1) = (n - p - 1)c. \quad (4)$$

Conceitos e resultados fundamentais

- Um grafo fortemente regular G diz-se *primitivo* se tanto G como o seu complementar $\bar{G}$ são conexos e *imprimitivo* no caso contrário.
- Um grafo fortemente regular com parmetros (n, p, a, c) é imprimitivo sse $c = p$ ou $c = 0$.



Grafos fortemente regulares imprimitivos com parâmetros

$(6, 4, 2, 4)$ e $(6, 2, 1, 0)$.

Introdução e resultados fundamentais

- Um grafo não nulo nem completo G é fortemente regular com parâmetros $(n, p; a, c)$ sse $A_G J = pJ$ e

$$A_G^2 + (c - a)A_G + (c - p)I = J.$$

- Note-se que se G é um grafo fortemente regular com parâmetros $(n, p; a, c)$ então é claro que $AJ = pJ$ e

$$\begin{aligned} A_G^2 &= pI + aA_G + c(J - I - A_G) && (5) \\ &\Updownarrow && \\ cJ &= A_G^2 - (a - c)A_G - (p - c)I. && (6) \end{aligned}$$

Conceitos e resultados fundamentais

Seja G um grafo conexo fortemente regular com parâmetros

$$(n, p, a, c).$$

- Então p é um valor próprio simples cujo vector próprio associado é o vector $\hat{e}$ de componentes unitárias.
- Se $\hat{u}$ é um vector próprio associado a $\lambda \neq p$ então

$$A_G^2\hat{u} - (a-c)A_G\hat{u} - (p-c)\hat{u} \quad = \quad cJ\hat{u} = \hat{0} \tag{7}$$

e, consequentemente, as raízes do polinómio quadrático

$$\lambda^2 - (a-c)\lambda - (p-c) \quad = \quad 0, \tag{8}$$

são os valores próprios restritos $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(A_G)$.

Conceitos e resultados fundamentais

- As mutiplicidades dos valores próprios restritos $m(\lambda_1)$ e $m(\lambda_2)$ satisfazem o sistema de equações:

$$\begin{aligned} m(\lambda_1) + m(\lambda_2) &= n - 1 \qquad (9) \\ \lambda_1 m(\lambda_1) + \lambda_2 m(\lambda_2) &= -p. \qquad (10) \end{aligned}$$

- Consequentemente,

$$\begin{aligned} m(\lambda_1) &= \frac{1}{2}((n-1) - \frac{2p + (n-1)(a-c)}{\lambda_1 - \lambda_2}) \qquad (11) \\ m(\lambda_2) &= \frac{1}{2}((n-1) + \frac{2p + (n-1)(a-c)}{\lambda_1 - \lambda_2}). \qquad (12) \end{aligned}$$

Conceitos e resultados fundamentais

- As condições de Krein foram obtidas em Scott Jr., L.L. *A condition on Higman's parameters*, Notices of Amer. Math. Soc., 20 A-97 (1973): 721-20-45.

$$\begin{aligned}(\lambda_1+1)(p+\lambda_1+2\lambda_1\lambda_2) &\leq (p+\lambda_1)(\lambda_2+1)^2, && (13)\\ (\lambda_2+1)(p+\lambda_2+2\lambda_1\lambda_2) &\leq (p+\lambda_2)(\lambda_1+1)^2. && (14)\end{aligned}$$

- Por sua vez, os limites absolutos de Seidel foram obtidas em Delsarte, Ph., Goethals, J.-M. and Seidel, J.J. *Bounds for systems f lines and Jacobi polynomials*, Philips Res. Rep. 30 (1975): 91-105.

$$\begin{aligned} n &\leq \frac{1}{2}m(\lambda_1)(m(\lambda_1)+3), && (15)\\ n &\leq \frac{1}{2}m(\lambda_2)(m(\lambda_2)+3). && (16)\end{aligned}$$

Determinação de grafos fortemente regulares

n	p	a	c	λ_1	$\lambda_{2\vert}$
5	2	0	1	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
9	4	1	2	-2	1
10	3	0	1	-2	1
13	6	2	3	$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$
15	6	1	3	-3	1
16	5	0	2	-3	1
16	6	2	2	-2	2
17	8	3	4	$\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{1})}{2}$
21	10	4	5	$\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$
21	10	3	6	-4	1

Determinação de grafos fortemente regulares

- Seja $\mathcal{G}_n$ o conjunto dos grafos de ordem n
- Definindo-se em $\mathcal{G}_n$ o produto interno

$$< G, H >= |E(G) \cap E(H)|,$$

vem que $< G, H >= \frac{1}{2} tr(A_G A_H)$.

- Seja K_{uv} o subgrafo de K_n tal que

$$V(K_{uv}) = V(K_n) \text{ e } E(K_{uv}) = \{uv\},$$

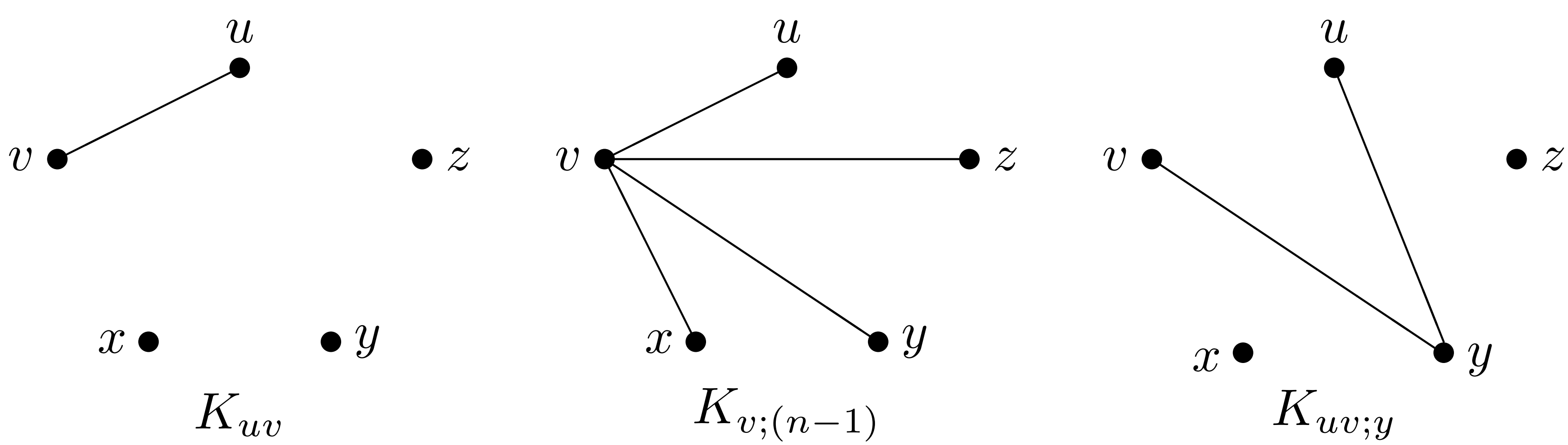
$K_{v;(n-1)}$ o subgrafo de K_n tal que

$$V(K_{v;(n-1)}) = V(K_n) \text{ e } E(K_{v;(n-1)}) = \{vj : j \in V(K_n) \setminus \{v\}\}$$

$K_{uv;y}$ o subgrafo de K_n tal que

$$V(K_{uv;y}) = V(K_n) \text{ e } E(K_{uv;y}) = \{uy, vy\}.$$

Determinação de grafos fortemente regulares



Representação de K_{uv}, $K_{v;(n-1)}$ e $K_{uv;y}$ em $\mathcal{G}_5$.

- $G \in \mathcal{G}_n$ é p-regular sse

$$\forall v \in V(K_n) \quad < G, K_{v;(n-1)} > \;=\; p. \tag{17}$$

Determinação de grafos fortemente regulares

- $\forall uv \in E(K_n)$ e $\forall y \in V(K_n) \setminus \{u, v\}$,

$$< G, K_{uv;y} > \;=\; \begin{cases} 0 & \text{se} \quad y \notin N_G(u) \cup N_G(v), \\ 1 & \text{se} \quad y \in N_G(u) \Delta N_G(v), \\ 2 & \text{se} \quad y \in N_G(u) \cap N_G(v), \end{cases}$$

onde $N_G(u)\Delta N_G(v = (N_G(u) \setminus N_G(v)) \cup (N_G(v) \setminus N_G(u))$.

- Consequentemente, $\forall uv \in E(K_n)$, considerando as desigualdades

$$2z_{uv;j} \;\leq\; < G, K_{uv;j} > \leq z_{uv;j} + 1 \; \forall j \in V(K_n) \setminus \{u, v\} \tag{18}$$

vem que $z_{uv;j} \leq 1$ e

$$< G, K_{uv;j} >= 2 \;\Leftrightarrow\; z_{uv;j} = 1 \;\; \forall j \in V(K_n) \setminus \{u, v\}.$$

Determinação de grafos fortemente regulares

- Tendo em conta que $\forall uv \in E(K_n)$

$$< G, K_{uv} >= \begin{cases} 1 & \text{se} \quad uv \in E(G), \\ 0 & \text{se} \quad uv \notin E(G), \end{cases}$$

G é fortemente regular com parâmetros (n, p, a, c) sse, além das equações (17) e desigualdades (18), $\forall uv \in E(K_n)$

$$(c-a) < G, K_{uv} > + \sum_{j \in V(K_n) \setminus \{u,v\}} z_{uv;j} \quad = \quad c, \qquad (19)$$

com $z_{uv;j} \in \{0, 1\} \;\; \forall j \in V(G) \setminus \{u, v\}$.

Determinação de grafos fortemente regulares

- Assim, a determinação de um grafo fortemente regular com parâmetros
$$(n, p, a, c)$$
é equivalente à determinação de uma matriz simétrica $X \in \{0,1\}^{n\times n}$ que seja solução do sistema de restrições poliédricas:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(XA_{K_{j;(n-1)}}) &= 2p & & \forall j \in V(K_n),\\
4z_{ij;k} \leq \operatorname{tr}(XA_{K_{ij;k}}) &\leq 2(z_{ij;k}+1) & & \begin{array}{l}\forall ij \in E(K_n)\\ \forall k \in V(K_n)\setminus\{i,j\},\end{array}\\
\frac{c-a}{2}\operatorname{tr}(XA_{K_{ij}}) + \sum_{k\in V(K_n)\setminus\{i,j\}} z_{ij;k} &= c & & \forall ij \in E(K_n),\\
x_{ij}, z_{ij;k} &\in \{0,1\} & & \forall i,j,k \in V(G).
\end{aligned}$$

Determinação de grafos fortemente regulares

- Com as experiências computacionais efectuadas por Tim Helge Hultberge (http://www.mat.ua.pt/thh), determinaram-se os grafos fortemente regulares com os parâmetros:

$$(5, 2; 0, 1)$$

$$(9, 4; 1, 2)$$

$$(10, 3; 0, 1)$$

$$(13, 6; 2, 3)$$

$$(15, 6; 1, 3)$$

$$(16, 5; 0, 2)$$

$$(16, 6; 2, 2)$$

$$(17, 8; 3, 4)$$

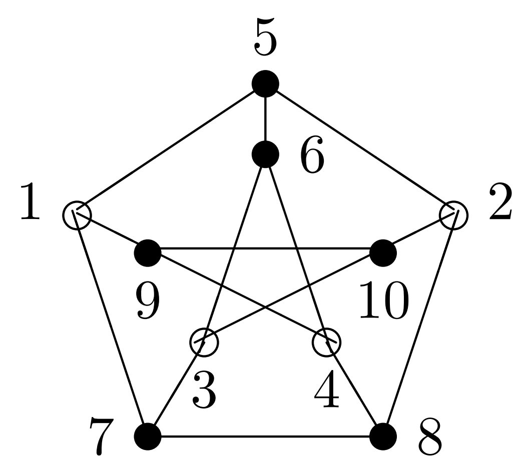
$$(21, 8; 3, 2)$$

Existência de conjuntos (k, τ)-regulares

- Um subconjunto $S \subset V(G)$ diz-se um conjunto (k, τ)-regular de G se

$$\forall v \in S,\ |N_G(v) \cap S| = k \text{ e } \forall u \in V(G) \setminus S,\ |N_G(u) \cap S| = \tau.$$

- No exemplo a seguir, $S_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ é um conjunto $(0, 2)$-regular e $S_2 = \{1, 2, 5, 7, 8\}$ é $(2, 1)$-regular.



Existência de conjuntos (k,τ)-regulares

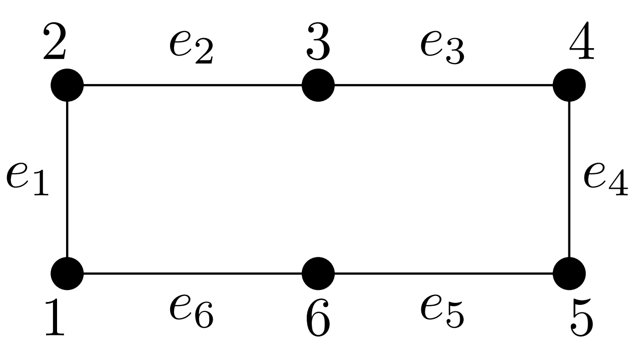
- 1981, D. M. Thompson:
  - ★ Se G é p-regular e contém um conjunto (k,τ)-regular então $k-\tau \in \sigma(A_G)$.
- 1981, D. M. Thompson: Se G é p-regular, S_1é (k_1,τ_1)-regular e S_2 é (k_2,τ_2)-regular em G, com $k_1-\tau_1 \neq k_2-\tau_2$. Então
  - ★ $|S_i| = \frac{n\tau_i}{p-(k_i-\tau_i)}$;
  - ★ $|S_1 \cap S_2| = \frac{n\tau_1\tau_2}{(p-(k_1-\tau_1))(p-(k_2-\tau_2))}$.

Existência de conjuntos (k,τ)-regulares

- Um grafo $G \neq P_2$, $M \subset E(G)$ um emparelhamento perfeito se e somente se $L(M)$ é um conjunto $(0,2)$-regular do grafo linha $L(G)$.
- $IM \subset E(G)$ diz-se um emparelhamento induzido perfeito, se é um emparelhamento induzido que cobre todas as arestas do grafo, i. e,

$$\forall \{x,y\} \notin IM \; \exists \{u,v\} \in IM, \quad |\{x,y\} \cap \{u,v\}| = 1.$$

Exemplos:



Emparelhamento induzido perfeito: $\{e_1, e_4\}$

Emparelhamento perfeito: $\{e_1, e_3, e_5\}$

Conjunto $(0,2)$-regular: $\{1,3,5\}$

Existência de conjuntos (k, τ)-regulares

Proposição:

Seja G um grafo e $IM \subset E(G)$. Então IM é um emparelhamento induzido perfeito de G se e somente se $L(IM)$ é um conjunto $(0, 1)$-regular de $L(G)$.

$$\Downarrow$$

Se um grafo p-regular G, tal que $|E(G)| = m$, tem um emparelhamento perfeito M e um emparelhamento induzido perfeito IM então

★ $|IM| = |L(IM)| = \frac{m}{2p-1}$;

★ $|M \cap IM| = |L(M) \cap L(IM)| = \frac{m}{p(2p-1)}$.

Existência de conjuntos (k,τ)-regulares

- Se um grafo fortemente regular G com parâmetros (n,p,a,c) tem um conjunto $(0,\tau)$-regular, então a determinação de G pode fazer-se fixando S (por exemplo, fazendo $S=\{1,\ldots,|S|\}\subset V(K_n)$) e acrescentando às restrições poliédricas (18)-(19) as restrições:

$$
\begin{aligned}
< G, K^{p}_{v;S} > &= p && \forall v \in S, && (20)\\
< G, K^{\tau}_{u;S} > &= \tau && \forall u \notin S, && (21)\\
< G, K^{p-\tau}_{w;S} > &= p-\tau && \forall w \notin S, && (22)
\end{aligned}
$$

onde $E(K^{p}_{v;S})=\{vj : j\in V(K_n)\setminus S\}$, $E(K^{\tau}_{u;S})=\{uj : j\in S\}$, $E(K^{p-\tau}_{w;S})=\{wj : j\in V(K_n)\setminus(S\cup\{w\})\}$ e $V(K^{p}_{v;S})=V(K^{\tau}_{u;S})=V(K^{p-\tau}_{w;S})=V(K_n)$.

Grafos de Moore e problemas em aberto

- Os grafos de Moore têm a sua origem no artigo
Hoffman, A.J. and Singleton, R.R. *On Moore graphs with diameter 2 and 3*, IBM J. Res. Develop., 4 (1960): 497-504.

- A designação adoptada está ligada ao problema, proposto por Moore, da *determinação da maior ordem* $n_{\Delta,d}$ *de um grafo com grau máximo* Δ *e diâmetro no máximo* d (problema do *grau/diâmetro*). Um majorante (conhecido por majorante de Moore e denotado por $M_{\Delta,d}$) vem dado por

$$n_{\Delta,d} \quad \leq \quad M_{\Delta,d} = 1 + \Delta + \Delta(\Delta - 1) + \ldots + \Delta(\Delta - 1)^{d-1}.$$

A igualdade $n_{\Delta,d} = M_{\Delta,d}$ verifica-se se

1. $d = 1$ e $\Delta \geq 1$, ou
2. $d = 2$ e $\Delta \in \{2, 3, 7\}$ e possivelmente $\Delta = 57$, ou
3. $d \geq 3$ e $\Delta = 2$.

Grafos de Moore e problemas em aberto

- Um grafo com diâmetro d e cintura $2d+1$ designa-se por grafo de Moore.

  Propriedades:

  - ★ Os grafos de Moore são grafos fortemente regulares com parâmetros $(5,2,0,1), (10,3,0,1), (50,7,0,1)$ e, possivelmente, $(3250,57,0,1)$.
  - ★ Os independente máximo do grafo de Moore com parâmetros $(10,3,0,1)$ é $(0,2)$-regular e o independente máximo do grafo de Moore com parâmetros $(50,7,0,1)$ é $(0,3)$-regular.
  - ★ O quarto grafo de Moore (se existir) tem um número de independência não superior a 400 e se for igual a 400 então o independente máximo é $(0,8)$-regular.

Grafos de Moore e problemas em aberto

- O grafo de Moore com parâmetros $(10, 3, 0, 1)$ é o grafo de Petersen. O grafo de Moore com parâmetros $(50, 7, 0, 1)$ é conhecido por grafo de Hoffman-Singleton.

- Para além do problema da existência do quarto grafo de Moore, um outro problema em aberto, relacionado com os grafos de Moore, consiste em factorizar K_{50} em 7 grafos de Hoffman-Singleton (ou provar que uma tal factorização não existe), ou seja, verificar se existem grafos de Hofman-Singleton $G_1, G_2, \ldots, G_7$, tais que

$$A_{K_{50}} = \sum_{j=1}^{7} A_{G_j}.$$

Referências

- Barbosa. R., Cardoso, D. M. *On regular-stable graphs* (2003). To appear in Ars-combinatoria.
- Bose, R.C. *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs*, Pacific J. Math. 13 (1963): 389-419.
- Cardoso, D. M. and P. Rama, *Spectral results on regular graphs with* (k,τ)*-regular sets*. Universidade de Aveiro. Cadernos de Matemática CM02/I22 (2002): 14 p. (Submitted to Discrete Mathematics)
- Godsil, C. D., *Algebraic Combinatorics*. Chapman & Hall Mathematics Series, New York (1993).
- Godsil, C. D. and G. Royle, *Algebraic Graph Theory*. Springer-Verlag, New York (2001).
- Thompson, D. M., *Eigengraphs: constructing strongly regular graphs with block designs*. Utilitas Math., 20 (1981): 83-115.