Álgebras de Jordan em Optimização Cónica

Domingos M. Cardoso[a] **e Luís A. Vieira**[b]

[a]Universidade de Aveiro - [a]Universidade do Porto

Encontro CEOC/CIMA-UE sobre Optimização e Controlo Óptimo

Sumário

1. **Introdução às álgebras de Jordan.**

2. **Álgebras de Jordan euclidianas.**

3. **Barreira log-determinante sobre um cone simétrico.**

4. **Número de Carathéodory do cone dos quadrados.**

Introdução às álgebras de Jordan

Se $\mathbb{V}$ é um espaço vectorial real de dimensão finita, com a aplicação bilinear

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{V} \times \mathbb{V} & \longrightarrow & \mathbb{V} \\ (x, y) & \longmapsto & x \circ y, \end{array}$$

então $(\mathbb{V}, \circ)$ é uma álgebra. Adicionalmente, se para todo $x, y \in \mathbb{V}$,

- $x \circ y = y \circ x$;
- $x \circ (x^2 \circ y) = x^2 \circ (x \circ y)$, **onde** $x^2 = x \circ x$,

então $\mathbb{V}$ é uma álgebra de Jordan.

Introdução às álgebras de Jordan (cont.)

<u>**Propriedades e conceitos associados a**</u> $(\mathbb{V}, \circ)$:

- **É uma álgebra** *associativa em potência*, **ou seja, para todo o** $x \in V$ $x^2 \circ x = x \circ (x^2)$ **e, consequentemente,** $\forall p, q \in \mathbb{N}$,

$$x^p \circ x^q = x^{p+q}.$$

- **Se existe** $\mathbf{e} \in V$ **tal que** $\forall x \in V \;\; x \circ \mathbf{e} = \mathbf{e} \circ x = x$, **então** $\mathbf{e}$ **é o elemento** *unidade* **de** V.
- **A** *característica* **de** $x \in V$ **é o menor natural** $k = rank(x)$ **tal que** $\{\mathbf{e}, x, x^2, \ldots, x^k\}$ **é linearmente dependente.**
- **A** *característica da álgebra* **é o número natural**

$$r = \mathsf{rank}(V) = \max\{rank(x) : x \in V\}.$$

Introdução às álgebras de Jordan (cont.)

- Um elemento $x \in V$ diz-se *regular* se tem característica igual à característica da álgebra.
- Para cada elemento $x \in V$, existe um operador linear $L(x)$ de V, definido por $L(x)y = x \circ y$
- Se $x \in V$ é regular, então a restrição de $L(x)$ a $\mathbb{R}[x]$ é o operador linear $L_0(x) : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ tal que $L_0(x)\mathbf{e} = x$, $L_0(x)x = x^2$, . . ., $L_0(x)x^{r-2} = x^{r-1}$ e

$$\begin{aligned} L_0(x)x^{r-1} &= x^r \\ &= a_1(x)x^{r-1} - a_2(x)x^{r-2} + \cdots + (-1)^r a_r(x)\mathbf{e}. \end{aligned}$$

Introdução às álgebras de Jordan (cont.)

Nestas condições, a matriz do operador linear $L_0(x)$ na base $B = \{\mathbf{e}, x, x^2, \ldots, x^{r-1}\}$ é a matriz

$$M_{L_0(x)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{r-1}a_r(x) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{r-2}a_{r-1}(x) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & (-1)^{r-3}a_{r-2}(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1(x) \end{bmatrix},$$

onde cada $a_i(x)$ é um polinómios homogéneo de grau i, nas coordenadas de x, para uma base fixa de V.

Introdução às álgebras de Jordan (cont.)

Assim, $p(x,\lambda) = \lambda^r - a_1(x)\lambda^{r-1} + \ldots + (-1)^r a_r(x)$ é o polinómio característico da matriz $M_{L_0(x)}$. Adicionalmente, $x^r - a_1(x)x^{r-1} + \ldots + (-1)^r a_r(x)\mathsf{e} = 0$ e $p(x,\lambda)$ é o polinómio mónico de menor grau tal que $p(x,x) = 0$.

Uma vez que $a_1(x)$ e $a_r(x)$ são, respectivamente, o traço e o determinante da matrix $M_{L_0(x)}$, vem que

- $\mathrm{tr}(x) = a_1(x)$,
- $\det(x) = a_r(x)$.

Dado que o conjunto dos elementos regulares é denso em V, estes conceitos estendem-se aos elementos não regulares.

Introdução às álgebras de Jordan (cont.)

Um elemento $x \in V$ é *invertível* se existe $y \in \mathbb{R}[x]$ tal que $x \circ y = \mathbf{e}$. Neste caso, y é o *inverso* de x e $y = x^{-1}$. Designa-se por *representação quadrática* P de uma álgebra de Jordan V a função

$$\begin{aligned} P : V &\longrightarrow \mathrm{End}(V) \\ x &\longmapsto P(x), \end{aligned}$$

tal que $P(x) = 2L^2(x) - L(x^2) \;\; \forall x \in V$.

Verifica-se que $x \in V$ é invertível se e só se $P(x)$ é invertível e, nesse caso, $P(x)x^{-1} = x$ e $P^{-1}(x) = P(x^{-1})$.

Introdução às álgebras de Jordan (cont.)

Exemplo de uma álgebra de Jordan com elemento unidade:

A álgebra $(\mathbb{R}^n, \circ)$, tal que

$$(x_1, \ldots, x_n) \circ (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 y_1, \ldots, x_n y_n),$$

é uma álgebra de Jordan com unidade $\mathbf{e} = (1, \ldots, 1)$.

O conjunto $\{(1, \cdots, 1), \cdots, (x_1^{n-1}, \cdots, x_n^{n-1})\}$ é linearmente independente se e só se

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \Pi_{i>j}(x_i - x_j).$$

Introdução às álgebras de Jordan (cont.)

Logo, um elemento de $\mathbb{R}^n$ é regular se e só se todas as componentes são distintas. Adicionalmente, conclui-se que $rank(\mathbb{R}^n) = n$. Sendo $(x_1, \cdots, x_n)$ um elemento regular, o conjunto $\{(1, \cdots, 1), (x_1, \cdots, x_n), \cdots, (x_1^{n-1}, \cdots, x_n^{n-1})\}$ é linearmente independente e o conjunto

$$\{(1, \cdots, 1), (x_1, \cdots, x_n), \cdots, (x_1^n, \cdots, x_n^n)\}$$

é linearmente dependente. Logo,

$$\begin{aligned}(x_1^n, \cdots, x_n^n) &= a_1(\bar{x})(x_1^{n-1}, \cdots, x_n^{n-1}) + \cdots \\ &\quad + (-1)^{n-1} a_n(\bar{x})(1, 1, \cdots, 1),\end{aligned}$$

Introdução às álgebras de Jordan (cont.)

e estes n números reais $a_i(\bar{x})$, para $i = 1, \cdots, n$, são unicamente determinados pelo sistema

$$\begin{bmatrix} x_1^n \\ x_2^n \\ \vdots \\ x_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^{n-1} a_n(\bar{x}) \\ (-1)^{n-2} a_{n-1}(\bar{x}) \\ \vdots \\ (-1)^0 a_1(\bar{x}) \end{bmatrix}.$$

Finalmente,

- $\mathrm{tr}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$,
- $\det(x) = \Pi_{i=1}^n x_i$.

Álgebras de Jordan euclidianas

Uma álgebra de Jordan *euclidiana* **é uma álgebra de Jordan onde está definido um produto interno** $\langle \cdot, \cdot \rangle$ **tal que** $\langle u \circ v, w \rangle = \langle u, v \circ w \rangle$ **quaisquer que seja** $u, v, w \in V$**.**

Suponha-se que V **tem elemento unidade** $\mathbf{e}$**.**

Os elementos $c, d \in V$ **são** *ortogonais*, **relativamente à álgebra** V, **se** $c \circ d = 0$**. Adicionalmente,** $c \in V$ **é um** *idempotente* **se** $c^2 = c$**. Um** *sistema completo de idempotentes ortogonais* **é um conjunto de idempotentes ortogonais,** $\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$**, tais que** $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = \mathbf{e}$**.**

Álgebras de Jordan euclidianas (cont.)

Um idempotente diz-se *primitivo* **se não é soma de dois idempotentes não triviais. Um sistema completo de idempotentes ortogonais, onde cada idempotente é primitivo, designa-se por** *sistema de Jordan***.**

Dado um elemento $x \in V$, existem k números reais únicos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, todos distintos, e um único sistema completo de idempotetes ortogonais $\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ tal que

$$x = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_k c_k.$$

Adicionalmente, $c_j \in \mathbb{R}[x]$, para $j = 1, \ldots, k$.

Álgebras de Jordan euclidianas (cont.)

Os números λ_j designam-se por *valores próprios* **de x e a igualdade $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i$ por** *decomposição espectral* **de x.**

Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana com característica r. Então, para cada $x \in V$, existe um sistema de Jordan $\{c_1, c_2, \ldots, c_r\}$ e existem números reais $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ tais que $x = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j c_j$. Os λ_is, contando as multiplicidades, são unicamente de terminados por x.

Adicionalmente, $\det(x) = \Pi_{j=1}^{r} \lambda_j$ e $\mathbf{tr}(x) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j$.

Álgebras de Jordan euclidianas (cont.)

Voltando à álgebra de Jordan $(\mathbb{R}^n, \circ)$, tal que $(x_1, , x_2 \ldots, x_n) \circ (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n)$, podemos concluir que os idempotentes ortogonais primitivos são os vectores da base canónica, ou seja,

$$(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1).$$

- **A decomposição espectral de $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ é dada por $\bar{x} = \lambda_1(1, 0, \ldots, 0) + \lambda_2(0, 1, \ldots, 0) + \cdots + \lambda_n(0, 0, \ldots, 1)$.**
- **Donde vem que $\det(\bar{x}) = \Pi_{i=1}^n x_1$ e $\mathbf{tr}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$. Por sua vez, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são os valores próprios de $\bar{x}$.**

Álgebras de Jordan euclidianas (cont.)

Se c é um idempotente primitivo de V, então $\mathrm{tr}(c) = 1$ e, consequentemente, $\mathrm{tr}(\mathrm{e}) = r$. Uma álgebra de Jordan V diz-se *simples* se V não contém qualquer ideal não trivial. Qualquer álgebra de Jordan euclidiana é, de um modo único, soma directa de l álgebras de Jordan euclidianas simples

$$V = \bigoplus_{i=1}^{l} V_i.$$

- **Adicionalmente verifica-se que**

$$r(V) = \sum_{i=1}^{l} r(V_i).$$

Álgebras de Jordan euclidianas (cont.)

O cone dos quadrados de uma álgebra de Jordan V é o conjunto $Q = \{x^2 : x \in V\}$.

- **Se $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$, onde $\{c_1, c_2, \ldots, c_r\}$ é um sistema de Jordan de V, então $\lambda_i \geq 0$, para $i = 1, \ldots, r$, sse $x \in Q$ e $\lambda_i > 0$, para $i = 1, \ldots, r$, sse $x \in \mathrm{int}(Q)$.**
- **Por definição, um** *cone simétrico* **é aberto, não vazio, autodual e homogéneo.**
- **Um cone é simétrico sse é o interior do cone dos quadrados de alguma álgebra de Jordan euclidiana.**

Álgebras de Jordan euclidianas (cont.)

Se V é uma álgebra de Jordan euclidiana e $x \in V$ é definido positivo (ou seja, $x \in \text{int}(Q)$), então

- $P(x)$ **é definido positivo;**
- $P(x) = P(x^{\frac{1}{2}})P(x^{\frac{1}{2}})$;
- $P^{-1}(x^{\frac{1}{2}}) = P^{-\frac{1}{2}}(x)$.

Barreira log-determinante sobre um cone simétrico

Se Q é o cone dos quadrados de uma álgebra de Jordan euclidiana V e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno definido por $\langle x, y \rangle = \mathrm{tr}(x \circ y)$, então a função

$$\begin{aligned} F : \mathrm{int}(Q) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow -\log\det x, \end{aligned}$$

é tal que para todo o $x \in \mathrm{int}(Q)$ e todo o $h \in V$,

$$\begin{aligned} DF(x)[h] &= \langle -x^{-1}, h \rangle, \\ D^2F(x)[h,h] &= \langle P^{-1}(x)h, h \rangle. \end{aligned}$$

Barreira log-determinante sobre um cone simétrico (cont.)

Propriedades da função $F(x) = -\log\det x$, definida em $\mathbf{int}(Q)$.

- **F é uma função estritamente convexa.**
- **F é uma *barreira* para Q, ou seja,**

$$\lim_{int(Q)\ni x\to\partial(Q)} F(x) = \infty.$$

- **F é uma função de classe $\mathbb{C}^3$.**

Barreira log-determinante sobre um cone simétrico (cont.)

- Para todo o $x \in \text{int}(Q)$ e todo o $h \in E$ verifica-se a desigualdade:

$$|D^3F(x)[h,h,h]| \leq 2(D^2F(x)[h,h])^{\frac{3}{2}},$$

pelo que F é uma função autoconcordante em $\text{int}(Q)$.

- Uma vez que F é uma barreira para Q que é uma função autoconcordante em $\text{int}(Q)$ e existe $\vartheta \geq 1$ tal que

$$(DF(x)[h]|)^2 \leq \vartheta D^2F(x)[h,h],$$

então F é uma barreira ϑ-autoconcordante para Q.

Barreira log-determinante sobre um cone simétrico (cont.)

- **Se G é uma barreira definida num cone simétrico K, $\gamma \geq 1$, e, para cada $x \in \mathrm{int}(K)$ e cada $t > 0$,**

$$G(tx) = G(x) - \gamma \ln t,$$

então G diz-se uma barreira γ-logarítmica homogénea para K.

- **Se G é uma barreira γ-logarítmica homogénea para K que é uma função autoconcordante em $\mathrm{int}(K)$, então G diz-se uma barreira γ-normal para K.**

Barreira log-determinante sobre um cone simétrico (cont.)

A barreira F tem as seguintes propriedades:

- **É uma função autoconcordante em $\mathrm{int}(Q)$.**
- **É r-logarítmica homogénea, no sentido em que para todo o $x \in \mathrm{int}(Q)$ e todo o $t > 0$,**

$$F(tx) = F(x) - r\log(t).$$

- **É uma barreira r-normal para Q.**
- **É uma barreira r-autoconcordante para Q.**

Número de Carathéodory do cone dos quadrados

Sendo V uma álgebra de Jordan euclidiana e Q o seu cone dos quadrados, diz-se que $x \in Q \setminus \{0\}$ é uma direcção extrema de Q sse para todo o $y, z \in Q \setminus \{0\}$ $x = y + z \Rightarrow y = \lambda_1 x \ \wedge \ z = \beta_1 x$, com $\lambda_1 \geq 0$ e $\beta_1 \geq 0$.

- **Designa-se por número de Carathéodory de Q, e denota-se por $k(Q)$, o menor número k de direcções extremas de Q tal que para todo o $x \in Q$**

$$\exists x_1, \ldots, x_k \in Ex(Q) \quad \wedge \quad \exists \lambda_1 \ldots \lambda_k \geq 0,$$

tais que $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$.

Sendo V uma álgebra de Jordan euclidiana simples com elemento unidade e característica $r(V)$, e sendo Q o cone dos quadrados de V, prova-se que $r(V) = k(Q)$. Adicionalmente, no caso geral, onde V não é necessariamente simples, dado que

- $V = \bigoplus_{i=1}^{l} V_i$, **onde V_i é simples, para $i = 1, \ldots, l$;**
- $Q = \bigoplus_{i=1}^{l} Q_i$, **onde Q_i é o cone dos quadrados de V_i;**
- $r(V) = \sum_{i=1}^{l} r(V_i)$ **e** $k(Q) = \sum_{i=1}^{l} k(Q_i)$ **e** $r(V_i) = k(Q_i)$**;**
- **Podemos concluir que $r(V) = k(V)$.**