

Conjuntos parcialmente ordenados, polinómios cromáticos e Sudoku

Domingos Moreira Cardoso

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro - CEOC

Colóquio de Matemática
19 de Janeiro de 2009, Universidade do Minho, Braga

1 Conceitos básicos

- Conjuntos parcialmente ordenados
- Representação de conjuntos parcialmente ordenados

2 Inversão de Möbius

- Resultados preliminares
- Teorema da inversão de Möbius

3 Colorações de vértices em grafos

- Colorações próprias e número cromático
- Um exemplo de aplicação
- Colorações parciais e aplicações ao Sudoku

4 Menores

- Contrações de um grafo
- Contrações definidas por colorações parciais

5 Polinómios cromáticos

- Polinómio das extensões cromáticas
- Determinação de polinómios cromáticos

6 Referências e bibliografia

Reflexividade, antissimetria e transitividade

- Uma relação binária em X é um subconjunto $R \subseteq X \times X$. Usualmente, em vez de $(x_i, x_j) \in R$, escrevemos $x_i R x_j$.
- Sendo I a relação identidade e R^{-1} a inversa da relação R definida em X , esta relação é
 - reflexiva: se $I \subseteq R$ ($\forall x \in X \ xRx$);
 - anti-simétrica: se $R \cap R^{-1} \subseteq I$ ($xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$);
 - transitiva: se $R^2 \subseteq R$ ($xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$).
- Uma relação R é uma **relação de ordem parcial** se é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

conjunto parcialmente ordenado (cpo)

Um **conjunto parcialmente ordenado (cpo)** é uma conjunto X onde está definida uma relação de ordem parcial que se denota por $P = (X, \preceq)$, onde \preceq é a relação de ordem parcial definida em X .

Digrafo de comparabilidade e diagrama de um cpo

- Dois elementos $x, y \in P = (X, \preceq)$, onde P é um cpo, dizem-se **comparáveis** se $x \preceq y$ ou $y \preceq x$, caso contrário dizem-se **incomparáveis**.
- Dados dois elementos $x, y \in P$, diz-se que y **cobre** x se $x \preceq y$ e $\nexists z \in X \setminus \{x, y\}$ tal que $x \preceq z \preceq y$.
- Uma relação binária R definida em X pode representar-se pelo seu **digrafo de comparabilidade** que é o digrafo $\vec{G}(R)$ cujo conjunto de vértices é $V(\vec{G}(R)) = X$ e o conjunto dos arcos é $A(\vec{G}(R))$, onde $(x, y) \in A(\vec{G}(R))$ se e só se $x \neq y \wedge xRy$.
- No caso da relação binária definir o cpo $P = (X, \preceq)$, o **diagrama** de P é o digrafo $\vec{D}(P)$ obtido de $\vec{G}(P)$ eliminado os arcos (x, y) tais que y não cobre x .

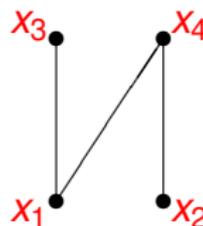
Diagrama de Hasse de um cpo

O **diagrama de Hasse** de $P = (X, \preceq)$ é semelhante a $\vec{D}(P)$, mas a orientação dos arcos é ignorada e é representado no plano de tal forma que $x \prec y$ se e só se existe um caminho ascendente entre x e y .

Como exemplo, considere-se o cpo $P = (X, \preceq)$, onde $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ e

$$\prec = \{(x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_4)\}.$$

O diagrama de Hasse de P vem dado por:



A função ζ e o produto de convolução

- Dado um cpo $P = (X, \preceq)$, designa-se por função zeta de P a função

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \preceq y \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Esta função representa o cpo P .
- Sendo $\mathcal{F}(X)$ o conjunto das funções $f : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, com a propriedade $f(x, y) = 0$ se $x \not\preceq y$, vamos definir em $\mathcal{F}(X)$ o produto de convolução $f * g = h$, tal que

$$h(x, y) = \begin{cases} \sum_{x \preceq z \preceq y} f(x, z)g(z, y), & \text{se } x \preceq y \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Logo, se $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{F}(X)$, então $f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3$.

A função delta de Kronecker

- Outra função bem conhecida pertencente a $\mathcal{F}(X)$ é a função delta de Kronecker, definida por

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = y \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Esta função δ comporta-se como elemento unidade, relativamente ao produto de convolução $*$.

Com efeito, sendo $f \in \mathcal{F}(X)$ e $x, y \in X$,

se $x \not\preceq y$, então $f(x, y) = 0$ e

$$(\delta * f)(x, y) = (f * \delta)(x, y) = f(x, y);$$

se $x \preceq y$, então $(\delta * f)(x, y) = \sum_{x \preceq z \preceq y} \delta(x, z) f(z, y) = f(x, y) = \sum_{x \preceq z \preceq y} f(x, z) \delta(z, y) = (f * \delta)(x, y)$.

Logo, $\delta * f = f * \delta = f$.

Elementos inversos (relativamente ao produto de convolução)

Se $f \in \mathcal{F}(X)$ é tal que $f(x, x) \neq 0 \quad \forall x \in X$,

- então existe uma função $g \in \mathcal{F}(X)$ tal que

$$g(x, x) = \frac{1}{f(x, x)}, \quad \text{for all } x \in X,$$

$$g(x, y) = - \sum_{x \preceq z \prec y} g(x, z) \frac{f(z, y)}{f(y, y)}, \quad \text{se } x \prec y,$$

que é o *inverso à esquerda* de f . Com efeito,

$$(g * f)(x, y) = \sum_{x \preceq z \preceq y} g(x, z) f(z, y) = \delta(x, y).$$

- De modo semelhante se conclui que existe uma função $h \in \mathcal{F}(X)$ que é o *inverso à direita* de f , ou seja, $f * h = \delta$.
- Tendo em conta a associatividade do produto $*$,

$$g = g * \delta = g * (f * h) = (g * f) * h = \delta * h = h.$$

A função de Möbius

A função de *Möbius*, μ , define-se como sendo o inverso (relativamente ao produto de convolução $*$) da função ζ .

$$\mu * \zeta = \zeta * \mu = \delta.$$

Como consequência, $\sum_{x \preceq z \preceq y} \mu(x, z) \zeta(z, y) = \delta(x, y)$ se $x \preceq y$ ou, de modo equivalente,

$$\sum_{x \preceq z \preceq y} \mu(x, z) = \delta(x, y), \quad \text{para } x \preceq y.$$

Logo, $\forall x, y \in X$ tais que $x \preceq y$

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = y \\ -\sum_{x \preceq z \prec y} \mu(x, z), & \text{se } x \prec y. \end{cases}$$

Fórmula da inversão de Möbius

Teorema [da inversão de Möbius]

Seja $P = (X; \preceq)$ um cpo finito e considerem-se as funções $f, g : P \rightarrow \mathbb{R}$. Então

$$g(y) = \sum_{x \preceq y} f(x), \quad \forall y \in P$$

se e só se

$$f(y) = \sum_{x \preceq y} g(x) \mu(x, y) \quad \forall y \in P.$$

Prova. Sem perda de generalidade, vamos assumir que P tem elemento mínimo $\hat{0}$.

(\Rightarrow) Considere-se a função $f' : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f'(z, x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } z \preceq x, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e a função $g' = f' * \zeta$.

Prova do teorema da inversão de Möbius (continuação)

Então, $\forall y \in P$,

$$\begin{aligned} g(y) &= \sum_{x \preceq y} f(x) = \sum_{\hat{0} \preceq x \preceq y} f'(\hat{0}, x) = \sum_{\hat{0} \preceq x \preceq y} f'(\hat{0}, x) \zeta(x, y) \\ &= (f' * \zeta)(\hat{0}, y) = g'(\hat{0}, y). \end{aligned}$$

Adicionalmente, dado que $f' * \zeta = g' \Leftrightarrow f' = g' * \mu$, vem

$$\begin{aligned} f(y) &= f'(\hat{0}, y) = (g' * \mu)(\hat{0}, y) = \sum_{\hat{0} \preceq x \preceq y} g'(\hat{0}, x) \mu(x, y) \\ &= \sum_{x \preceq y} g(x) \mu(x, y). \end{aligned}$$

(\Leftarrow) A prova da implicação recíproca é semelhante.

O número cromático de um grafo

Definição [coloração, coloração própria e k -coloração]

Seja G um grafo cujo conjunto de vértices é $V(G)$ e o conjunto de arestas é $E(G)$. Uma **coloração** dos vértices de G é uma função $f: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$. Se para todas as arestas do grafo se verifica a implicação $ij \in E(G) \Rightarrow f(i) \neq f(j)$, a coloração diz-se **própria** e, independentemente da função f ser ou não sobrejectiva, também se designa por **k -coloração própria** de G .

Definição [número cromático]

O menor k para o qual G admite uma k -coloração própria dos seus vértices designa-se por **número cromático** de G e denota-se por $\chi(G)$.

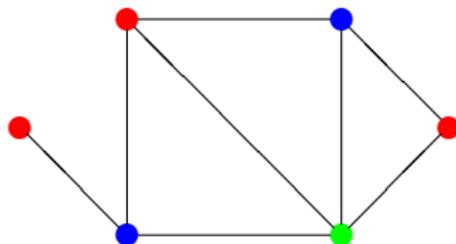
Majorante e minorante para o número cromático

- Dado um grafo arbitrário G , conhecem-se os seguintes limites inferior e superior para o número cromático

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1,$$

onde $\omega(G)$ é o número de clique e $\Delta(G)$ o máximo grau dos vértices.

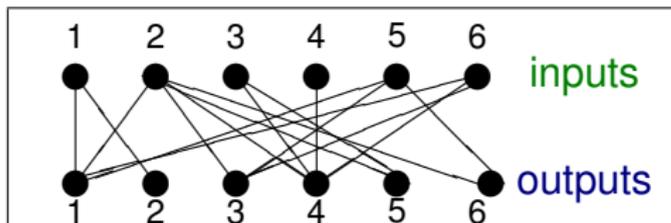
- O grafo H representado na figura admite uma 3-coloração.



- Uma vez que $\omega(H) = 3 \leq \chi(H) \leq 5 = \Delta(H) + 1$ e H admite uma 3-coloração, $\chi(H) = 3$.

Produção de microcircuitos

- Nos microcircuitos, os fios de ligação são substituídos por filmes condutores depositados em camadas.
- As ligações distintas que se cruzam devem pertencer a camadas que estão isoladas umas das outras.



Exemplo de circuito com várias camadas

Considerando o circuito representado como um grafo cujas arestas são as ligações ij , podemos concluir que duas ligações ij e pq se cruzam se e só se

$$(i - p)(j - q) < 0.$$

Grafos planares e espessura de um grafo

Definição (grafo planar)

Um grafo diz-se planar se admite uma representação no plano sem arestas que se cruzem. Caso contrário, o grafo diz-se não planar.

Definição (espessura de um grafo)

Dado um grafo G de ordem n , designa-se por espessura (*thikness*) de G e denota-se por $t(G)$ o menor número de subgrafos de G planares, $P_1, \dots, P_{t(G)}$, disjuntos nas arestas, cuja união é G , ou seja, tais que

$$G = \cup_{i=1}^t P_i,$$

onde $t = t(G)$.

Determinação do menor número de camadas de um circuito

Modelo matemático

Na produção de circuitos, a determinação do menor número de camadas é equivalente à determinação da espessura do grafo que representa o circuito.

Exemplo do circuito apresentado

Considere-se um grafo H onde os vértices são as arestas do grafo G que representa o circuito e dois vértices ij e pq são adjacentes se e só se $(i - p)(j - q) < 0$. Nestas condições, a espessura de G é o menor número de subconjuntos em que se pode partir $V(H)$, em cada um dos quais não existem dois vértices adjacentes.

Determinação do menor número de camadas de um circuito

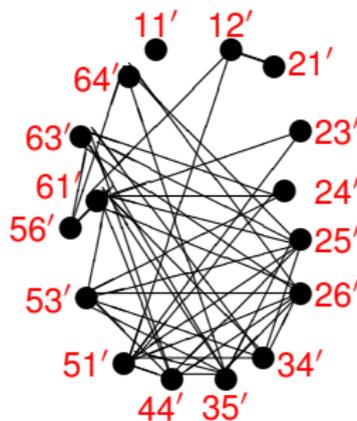


Figura 2: Grafo das intersecções das ligações

Determinação do menor número de camadas de um circuito

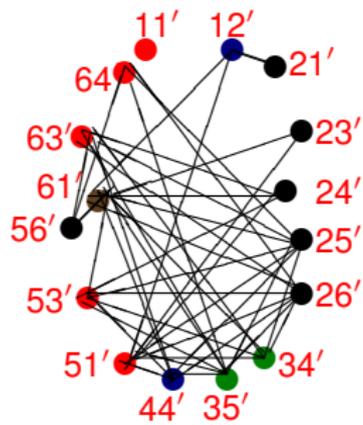


Figura 2: Grafo das intersecções das ligações

Determinação do menor número de camadas de um circuito

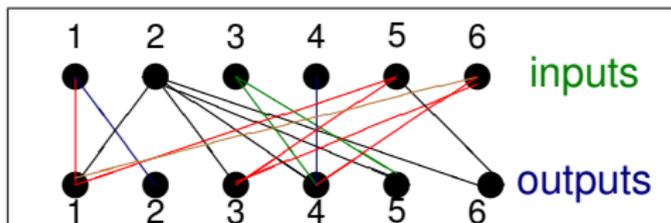


Figura 1: Exemplo de circuito com várias camadas

Completação de colorações parciais

Definição [coloração parcial]

Uma coloração parcial dos vértices (ou, simplesmente, coloração parcial) de um grafo G é uma coloração própria de um subconjunto de vértices $W \subseteq V(G)$.

Assim, podemos considerar uma coloração parcial de um grafo G como sendo uma função $c: W \rightarrow \{1, \dots, k\}$ tal que

$$\forall i, j \in W \subseteq V(G) \quad ij \in E(G) \Rightarrow c(i) \neq c(j).$$

Problema: Dado um grafo G com uma coloração parcial c , podemos estender esta coloração a uma coloração própria de todos os vértices de G ?

Uma tal extensão, caso exista, designa-se por **extensão cromática** de c .

O puzzle Sudoku

- Um Sudoku de ordem n é uma tabela S_n , com $n^2 \times n^2$ entradas divididas por $n \times n$ blocos, com $n \times n$ entradas cada, onde devemos escrever n números do conjunto $\{1, \dots, n\}$ de tal forma que em qualquer das linhas, colunas e blocos não existam dois números iguais.
- No início, algumas das entradas estão preenchidas e o objectivo é preencher as restantes.
- Puzzle Sudoku de ordem 2, S_2 , e respectiva solução

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 4 |
| 3 | | 2 | |
| | 1 | | 3 |
| 4 | | | |



| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| 4 | 3 | 1 | 2 |

Grafo de um Sudoku

A resolução de um puzzle Sudoku é um exemplo de determinação de uma extensão cromática de uma coloração parcial. Com efeito, basta considerar o grafo a seguir definido.

Definição [Grafo de um Sudoku]

Dado um Sudoku S_n , designa-se por grafo de S_n , $G(S_n)$, o grafo cujos vértices são as entradas (i, j) , com $1 \leq i, j \leq n^2$, onde dois vértices são adjacentes se correspondem a entradas na mesma linha ou coluna ou bloco.

As entradas de S_n inicialmente preenchidas definem uma coloração parcial c em $G(S_n)$ e o problema do preenchimento das restantes entradas corresponde à determinação de uma extensão cromática de c , com recurso a n^2 cores.

Problemas associados ao Sudoku

- A partir de um Sudoku, podemos obter outros Sudokus matematicamente equivalentes, aplicando as operações:
 - Permutação de símbolos;
 - Transposição da tabela;
 - Permutação de linhas (colunas) que passam pelos mesmos blocos;
 - Permutação de conjuntos de linhas (colunas) que contêm os mesmo blocos.

Estas operações formam um grupo de ordem $9! \times 6^8 \times 2$ [6].

- 1 Quantos puzzles Sudoku matematicamente não equivalentes existem?
- 2 Quando é que um puzzle Sudoku tem solução e quando é que ela é única?
- 3 Qual o número mínimo de entradas inicialmente preenchidas para puzzles Sudoku com solução única?

Uma resposta

Conhecem-se mais de **40 000** puzzles Sudoku matematicamente não equivalentes, com **17** entradas inicialmente preenchidas e solução única [6].

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | 1 | 2 |
| 4 | | | | 9 | | | | |
| | | | | | | | 5 | |
| | 7 | | 2 | | | | | |
| 6 | | | | | | 4 | | |
| | | | 1 | | 8 | | | |
| | 1 | 8 | | | | | | |
| | | | | 3 | | 7 | | |
| 5 | | 2 | | | | | | |

Sudoku S_3 , com **17** entradas preenchidas e solução única.

Outras questões

No entanto, a **existência de um puzzle Sudoku com 16 entradas inicialmente preenchidas e solução única é um problema em aberto.**

Outra questão: a existência de solução única depende do número de entradas inicialmente preenchidas?

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 6 | 3 | 5 | 2 | 1 | 4 | 7 | 8 |
| 5 | 7 | 2 | | | 4 | 1 | 6 | 3 |
| 1 | 8 | 4 | 3 | 6 | 7 | 5 | 2 | 9 |
| 6 | 2 | 9 | 1 | 5 | 3 | 8 | 4 | 7 |
| 4 | 1 | 7 | | | 6 | 3 | 5 | 2 |
| 8 | 3 | 5 | 7 | 4 | 2 | 6 | 9 | 1 |
| 2 | 9 | 8 | 4 | 3 | 5 | 7 | 1 | 6 |
| 3 | 5 | 1 | 6 | 7 | 9 | 2 | 8 | 4 |
| 7 | 4 | 6 | 2 | 1 | 8 | 9 | 3 | 5 |

Resultados sobre puzzles Sudoku

Teorema [4]

Qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, $\chi(G(S_n)) = n^2$.

Teorema [4]

Dado um grafo simples G e um subconjunto de vértices $W \subset V(G)$, seja $c: W \rightarrow \{1, \dots, k\}$ uma coloração parcial, onde $k = \chi(G) - 2$. Se existe uma extensão cromática de c , utilizando $\chi(G)$ cores, então o número destas extensões é não inferior a 2.

Como consequência, dado um puzzle Sudoku de ordem n com entradas inicialmente preenchidas, se essas entradas não utilizam pelo menos $n^2 - 1$ números distintos, então a solução do puzzle, caso exista, não é única.

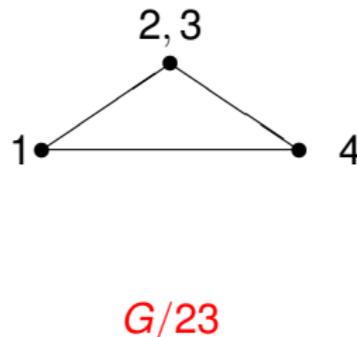
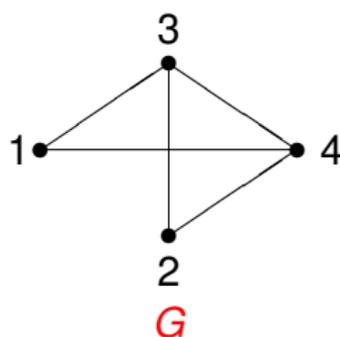
Contrações de arestas

Definição [de contração de arestas]

Dado um grafo G e uma aresta $ij \in E(G)$, a contração de ij que se denota por G/ij corresponde a substituir os vértices i e j por um único vértice que se denota por i,j , eliminando a aresta ij e arestas e lacetes eventualmente produzidos por esta operação. Mais geralmente, dado um subconjunto de arestas $E' = \{e_1, \dots, e_p\}$, a contração de E' que se denota por G/E' é o grafo que se obtém depois da contração das arestas em E' .

A ordem segundo a qual as arestas e_1, \dots, e_p são eliminadas é indiferente para o grafo G/E' obtido.

O cpo das contracções de G



A relação de contracção de zero ou mais arestas é uma relação de ordem parcial no conjunto das contracções de um grafo G . Dadas duas contracções de G , H e F , se H é uma contracção de F , escreve-se $H \preceq F$.

A partir de agora, vamos denotar o **cpo das contracções de um grafo G** por $P = (\mathcal{G}, \preceq)$, onde \mathcal{G} é o conjunto das contracções de G e \preceq a relação de contracção de zero ou mais arestas.

Colorações parciais e contrações

Dado um grafo G , $\emptyset \neq W \subseteq V(G)$ e uma coloração parcial

$$c: W \rightarrow \{1, \dots, k\},$$

vamos considerar o caso especial das c -contrações, cada uma das quais se obtém de G do seguinte modo:

- colorimos arbitrariamente os vértices em $V(G) \setminus W$, utilizando $\lambda \geq k$ cores;
- contraímos todas as arestas cujos extremos têm a mesma cor;
- eliminamos os lacetes e arestas paralelas ou com ambos os extremos em W que eventualmente se produzam.

A relação de c -contração

- Com uma c -contração, as arestas contraídas têm no máximo um vértice extremo em W , ou seja, pertencem ao corte $\partial(W)$ ou ao subgrafo induzido por $V(G) \setminus W$, obtendo-se um grafo com uma coloração própria dos seus vértices.
- Dadas duas c -contrações de G , G_1 e G_2 , se G_2 se obtém de G_1 por uma c -contração, escreve-se $G_2 \preceq_c G_1$ (ou $G_2 \prec_c G_1$, se $G_2 \neq G_1$).
- Sendo $\mathcal{C}_{G;c}$ o conjunto das c -contrações de G , o cpo

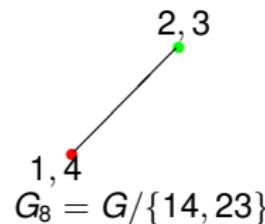
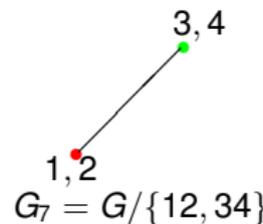
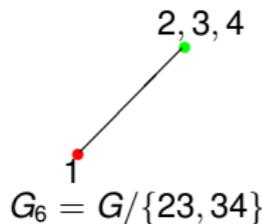
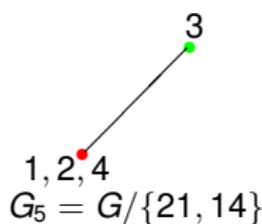
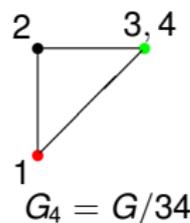
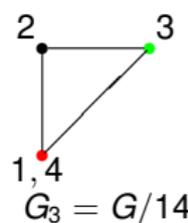
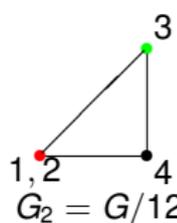
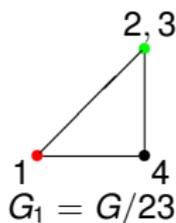
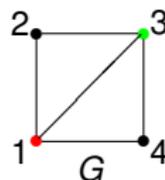
$$P = (\mathcal{C}_{G;c}, \preceq)$$

designa-se por cpo das c -contrações de G .

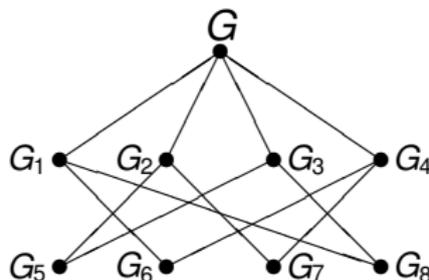
- É claro que o subgrafo induzido por W é isomorfo aos elementos minimais de P .

Um exemplo

A figura a seguir representa o grafo G com uma coloração parcial e os elementos de $\mathcal{C}_{G,c}$.



O diagrama de Hasse do cpo $P = (G, \preceq)$



Existe uma correspondência biunívoca entre as c -contrações com extensões cromáticas de c e as colorações arbitrárias dos vértices em $V(G) \setminus W$.

O número de extensões cromáticas de c

Teorema[3, 4]

Seja G um grafo de ordem n com uma coloração parcial

$$c: W \subseteq V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}, \text{ onde } |W| = w.$$

Se $f_c(G, \lambda)$ é o número de extensões cromáticas de c , utilizando $\lambda \geq k$ cores, então $f_c(G, \lambda)$ é um polinômio em λ , mônico, de grau $n - w$ e com coeficientes inteiros.

Prova. Seja $P = (\mathcal{C}_{G,c}, \preceq)$ o cpo das c -contrações de G . Para cada c -contração $G' \in P$, seja $f_c(G', \lambda)$ o número de extensões cromáticas de c relativamente a G' , utilizando λ cores e seja $q_c(G', \lambda)$ o número de colorações arbitrárias (não necessariamente próprias) dos vértices em $V(G') \setminus W$, utilizando as λ cores.

Prova (continuação)

É claro que $q_c(G', \lambda) = \lambda^{n'-w}$, onde n' denota o número de vértices de G' .

Se $\lambda \geq k$, então cada coloração arbitrária de vértices em $V(G') \setminus W$, utilizando λ cores, define uma extensão cromática de c para a única c -contracção $G'' \in \mathcal{C}_{G;c}$ que se obtém depois da contracção das arestas com vertices da mesma cor.

Consequentemente,

$$q_c(G, \lambda) = \lambda^{n-w} = \sum_{G' \preceq G} f_c(G', \lambda).$$

Finalmente, aplicando a fórmula da inversão e Möbius, vem

$$f_c(G, \lambda) = \sum_{G' \preceq G} \lambda^{n'-w} \mu(G', G).$$

Aplicação ao exemplo anterior

$$f_c(G, \lambda) = \sum_{G' \preceq G} \lambda^{n'-2} \mu(G'G). \text{ Logo,}$$

$$\begin{aligned} f_c(G, \lambda) &= \mu(G_5, G) + \mu(G_6, G) + \mu(G_7, G) + \mu(G_8, G) \\ &\quad + (\mu(G_1, G) + \mu(G_2, G) + \mu(G_3, G) + \mu(G_4, G))\lambda \\ &\quad + \mu(G, G)\lambda^2 \end{aligned}$$

e, dado que

$$\mu(G_5, G) = -(\mu(G_5, G_5) + \mu(G_5, G_3) + \mu(G_5, G_2)) = -(1 - 1 - 1) = 1;$$

$$\mu(G_6, G) = -(\mu(G_6, G_6) + \mu(G_6, G_4) + \mu(G_6, G_1)) = -(1 - 1 - 1) = 1;$$

$$\mu(G_7, G) = -(\mu(G_7, G_7) + \mu(G_7, G_4) + \mu(G_7, G_2)) = -(1 - 1 - 1) = 1;$$

$$\mu(G_8, G) = -(\mu(G_8, G_8) + \mu(G_8, G_3) + \mu(G_8, G_1)) = -(1 - 1 - 1) = 1;$$

$$\mu(G_1, G) = \mu(G_2, G) = \mu(G_3, G) = \mu(G_4, G) = -1;$$

$$\mu(G, G) = 1,$$

$$f_c(G, \lambda) = 4 - 4\lambda + \lambda^2.$$

$$f_c(G, 2) = 0; f_c(G, 3) = 1; f_c(G, 4) = 4.$$

Polinômio cromático de um grafo

- Whitney em **1932** mostrou que o número de colorações próprias distintas dos vértices de um grafo, em função do número λ de cores, é uma função polinomial.
- Birkhoff e Lewis, num estudo realizado em **1946**, baptizaram esta função de **polinômio cromático**.
- Dado um grafo G e um conjunto de λ cores, a função $f(G; \lambda)$ determina o número de colorações (próprias) dos vértices de G utilizando λ cores.
Logo, se $\lambda < \chi(G)$, então $f(G; \lambda) = 0$ e

$$\chi(G) = \min_{\lambda \in \mathbb{N}: f(G; \lambda) > 0} \lambda.$$

- É fácil concluir que $f(K_\nu; \lambda) = \lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - (\nu - 1))$ e $f(K_n; \lambda) > 0$, para $n \leq \lambda \in \mathbb{N}$.

Relação de recorrência clássica

Teorema

Se G é um grafo simples, então $\forall e \in E(G)$

$$f(G; \lambda) = f(G - e; \lambda) - f(G/e; \lambda),$$

onde $G - e$ e G/e denotam os grafos obtidos de G depois da eliminação e contracção da aresta e , respectivamente.

Seja G um grafo simples de ordem n .

- G é uma árvore se e só se $f(G; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$.
- Se G é um ciclo, então $f(G, \lambda) = (\lambda - 1)^n + (-1)^n(\lambda - 1)$.

Extensões dos polinômios das extensões cromáticas

Teorema [3]

Dado um grafo simples G e um subconjunto de vértices $W \subseteq V(G)$, se $\mathcal{C}_{W;\lambda}$ é o conjunto de todas as colorações parciais $c : W \mapsto \{1, \dots, \lambda\}$ de G , então

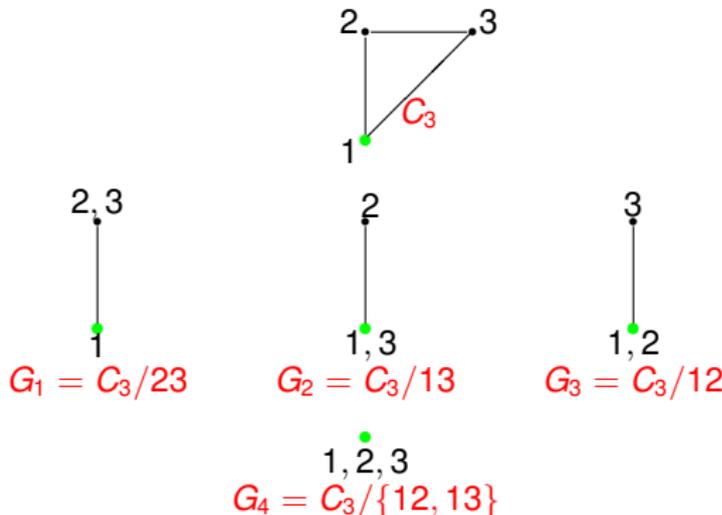
$$f(G, \lambda) = \sum_{c \in \mathcal{C}_{W;\lambda}} f_c(G, \lambda).$$

Corolário [3]

Dado um grafo simples G e um subconjunto de vértices $W \subseteq V(G)$, induzindo o subgrafo completo $K_w = G[W]$, onde $w = |W|$, se $\bar{c} : W \mapsto \{1, \dots, w\}$ é uma coloração parcial de G , então $f(G, \lambda) = f_{\bar{c}}(G, \lambda) \prod_{i=0}^{w-1} (\lambda - i)$.

Exemplo de aplicação

Vamos determinar o polinômio cromático de C_3 , $f(C_3, \lambda)$, com recurso à coloração parcial $c : W = \{1\} \rightarrow \{\text{verde}\}$, tendo em conta que o conjunto das c -contrações é constituído pelos grafos C_3 , G_1 , G_2 , G_3 e G_4 representados na figura a seguir.



Exemplo de aplicação (continuação)

Tendo presente o conjunto das c -contrações, com facilidade se determina o respectivo cpo, donde vem

$$\begin{aligned}
 f_c(C_3, \lambda) &= \sum_{G' \preceq_c C_3} \lambda^{n'-1} \mu(G', C_3) \\
 &= \mu(G_4, C_3) + (\mu(G_3, C_3) + \mu(G_2, C_3) + \\
 &\quad + \mu(G_1, C_3))\lambda + \mu(C_3, C_3)\lambda^2 \\
 &= -(\mu(G_4, G_4) + \mu(G_4, G_3) + \mu(G_4, G_2) + \mu(G_4, G_1)) + \\
 &\quad + (-\mu(G_3, G_3) - \mu(G_2, G_2) - \mu(G_1, G_1))\lambda + \lambda^2 \\
 &= -(1 - 1 - 1 - 1) + (-1 - 1 - 1)\lambda + \lambda^2 \\
 &= 2 - 3\lambda + \lambda^2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2).
 \end{aligned}$$

Logo, $f(C_3, \lambda) = \lambda f_c(C_3, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$.

Referências e bibliografia I

-  **[1]** R. A. BRUALDI, "Introductory Combinatorics," Pearson Prentice Hall, New Jersey 2004.
-  **[2]** G. D. Birkhoff and D. Lewis, "Chromatic polynomials," Trans. Amer. Math. Soc., 60 (1946): 355–451.
-  **[3]** D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, "Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos," Escolar Editora, 2008.
-  **[4]** A. M. Herzberg and M. R. Murty, "Sudoku Squares and Chromatic Polynomials," Vol. 54 Notices of the AMS, (2007): 708–717.
-  **[5]** R. P. STANLEY, "Enumerative Combinatorics," Vol. 1 Cambridge University Press, Cambridge 1997.

Referências e bibliografia II



[6] G. Royle, "Sudoku Patterns,"

<http://people.csse.uwa.edu.au/gordon/sudokupat.php>



[7] H. Whitney, "Non-separable and planar graphs," *Trans. Amer. Math. Soc.*, 34 (1932): 339–362.