Grupos e Representações

Ficha 3 – Primeiro Semestre 2025

Exercícios para pensar e discutir em classe. A letra G vai denotar um grupo finito e V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão finita.

(1) Se V e W são representações irredutíveis de G, então

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)\overline{\chi_W(g)} = \begin{cases} 1 & \text{se } V \simeq W, \\ 0 & \text{no caso contrario.} \end{cases}$$

Se $g \in G$, denotamos por $c(g)$ o numero de elementos da classe de conjugação de g. Sejam $\{g_1, \ldots, g_n\}$ representantes das classes de conjugação de G. Logo cada fila da tabela de caracteres do grupo G é um elemento em $\mathbb{C}^n$, e elas são ortonormais para o produto interno

$$\langle (x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots y_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{c(g_i)}{|G|} x_i \overline{y_i}.$$

O objectivo deste exercício é demonstrar formulas de ortogonalidade por colunas na tabela de caracteres do grupo G.

(a) Sejam $A, B \in M_{n\times n}(K)$ matrizes. Demonstrar que $A \cdot B = 1$ se e somente se $B \cdot A = 1$.

(b) Sejam $V_1, \ldots, V_n$ as representações irredutíveis do grupo G. Usando o item anterior, demonstrar que para todo $g \in G$,

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\chi_{V_i}(g)}\chi_{V_i}(g) = \frac{|G|}{c(g)}.$$

(sugestão considerar as matrizes $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ definidas por $A_{i,j} = \chi_{V_i}(g_j)$ e $B_{i,j} = \frac{c(g_i)}{|G|}\overline{\chi_{V_j}(g_i)}$.)

(c) Demonstrar que se $g, h \in G$ não são conjugados, então

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\chi_{V_i}(g)}\chi_{V_i}(h) = 0.$$

(2) Seja $H \subset G$ um subgrupo, e sejam V_1, V_2 representações de H. Demonstrar que

$$\mathrm{Ind}_H^G(V_1 \oplus V_2) \simeq \mathrm{Ind}_H^G V_1 \oplus \mathrm{Ind}_H^G V_2.$$

(3) Sejam $H \subset K \subset G$ subgrupos e seja V uma representação de H. Demonstrar que

$$\mathrm{Ind}_K^G(\mathrm{Ind}_H^K V) \simeq \mathrm{Ind}_H^G V.$$

(4) Seja $H \subset G$ um subgrupo. Seja G/H a representação de permutação de G no conjunto de coclasses G/H. Demonstrar que se V é uma representação de G, então

$$\mathrm{Ind}_H^G(Res_H(V)) \simeq V \otimes G/H.$$

(5) Calcular as representações irredutíveis dos grupos diedrais D_5 e D_6.

(6) Calcular as representações irredutíveis do grupo diedral D_n para n um número natural ímpar.

(7) Seja $H < G$ um subgrupo, e seja $\rho : H \to \mathrm{GL}(V)$ uma representação irredutível de dimensão pelo menos 2. Demonstrar que $\mathrm{Ind}_H^G \rho$ não tem subrepresentações de dimensão 1.