Grupos e Representações

Ficha 2 – Primeiro Semestre 2025

Exercícios para pensar, resolver e discutir em classe. A letra G vai denotar um grupo finito, K um corpo, e V um K-espaço vetorial de dimensão finita.

(1) Sejam $\rho_1 : G \to \mathrm{GL}(V)$ e $\rho_2 : G \to \mathrm{GL}(W)$ duas representações, e seja $\psi : V \to W$ um homomorfismo de representações. Demonstrar que $\ker(\psi)$ é uma subrepresentação de V e $\mathrm{Im}(\psi)$ (a imágem) é uma subrepresentação de W.

(2) O grupo S_n de permutações tem uma representação de permutação $\rho_{\mathrm{per}} : S_n \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$ definida por

$$\rho_{\mathrm{per}}(\sigma)(v_1, \ldots, v_n) = (v_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, v_{\sigma^{-1}(n)}).$$

Demonstramos no quadro que o espaço $\mathbb{C}^n$ é a soma direta das subrepresentações $\mathbb{1} \oplus V_{\mathrm{st}}$, onde V_{st} é a representação standard, dada por

$$V_{\mathrm{st}} = \{(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^n \ : \ v_1 + \cdots + v_n = 0\}.$$

Demonstrar que V_{st} é irredutível (sugestão: se $W \subset V_{\mathrm{st}}$ é uma subrepresentação não trivial, e $v \in W$, $v \neq 0$, construir a partir de v outros elementos no subespaço W que sejam uma base de V_{st}).

(3) Seja $G = S_3$ o grupo de permutações do conjunto $\{1, 2, 3\}$. Seja ρ_{reg} a representação regular do exercício (7) da ficha 1. Demonstrar que

$$\rho_{\mathrm{reg}} \simeq \mathbb{1} \oplus \mathrm{Sign} \oplus V_{\mathrm{st}}^{\oplus 2}.$$

(4) Uma *representação de permutação* de um grupo G é uma representação obtida como a composição

$$\rho_{\mathrm{per}} \circ \psi : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),$$

onde $\psi : G \to S_n$ é um homomorfismo de grupos, e ρ_{per} é a representação de permutação do exercício (2).

(a) Demonstrar que a representação regular do grupo G é uma representação de permutação.

(b) Demonstrar que uma representação de permutação é irredutível se e somente se $n = 1$.

(5) Seja $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ uma representação de G, e seja $\varepsilon : G \to \mathrm{GL}_1(K)$ uma representação de dimensão 1. Seja $v \in V$ um elemento qualquer, e definimos

$$w := \sum_{g \in G} \varepsilon(g)^{-1} \cdot \rho(g)(v) \in V.$$

Demonstrar que $W = \langle w \rangle$ é uma subrepresentação de V, e se $W \neq \{0\}$ então $W \simeq \varepsilon$ como representações do grupo G.

(6) Sejam $\rho_1 : G \to \mathrm{GL}(V)$ e $\rho_2 : G \to \mathrm{GL}(W)$ duas representações. Seja $\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V e $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ uma base de W e seja $\mathcal{B}_{V \otimes W} = \{v_1 \otimes w_1, v_1 \otimes w_2, \ldots, v_n \otimes w_m\}$ uma base de $V \otimes W$. Demonstrar que para todo $g \in G$

$$[(\rho_1 \otimes \rho_2)(g)]_{\mathcal{B}_{V \otimes W}} = [\rho_1(g)]_{\mathcal{B}_V} \otimes [\rho_2(g)]_{\mathcal{B}_W}.$$

(7) Seja $\rho_{\mathrm{per}} : S_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ a representação do exercício (1), e seja $\chi : S_n \to \mathbb{C}$ o seu carácter. Demonstrar que para todo $\sigma \in S_n$,

$$\chi(\sigma) = \#\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \sigma(i) = i\}.$$

(8) Seja $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ uma representação, e seja $\chi : G \to K$ o seu carácter. Seja $\mathrm{Sym}^2(V)$ o produto simétrico de ρ (respetivamente $\mathrm{Alt}^2(V)$ o produto alternado) e seja χ_s o seu carácter (respetivamente χ_a). Demonstrar que para todo elemento $g \in G$ vale

$$\chi_s(g) = \frac{1}{2}(\chi(g)^2 + \chi(g^2)),$$

e

$$\chi_a(g) = \frac{1}{2}(\chi(g)^2 - \chi(g^2)).$$

(9) Seja $G = S_4$. Dar a descomposição de $V_{\text{st}} \otimes V_{\text{st}}$ em soma de representações irredutíveis.

(10) Seja V uma representação de G. Demonstrar que

$$\chi_{V^*}(g) = \overline{\chi_V(g)},$$

para todo $g \in G$.

(11) Seja D_4 o grupo diedral de 8 elementos, ou seja o grupo dado pelos geradores e relações

$$D_4 := \langle r, s \ : \ r^4 = 1, \quad s^2 = 1, \quad rs = sr^{-1} \rangle.$$

(a) Demonstrar que D_4 tem 5 classes de conjugação (por tanto 5 representações irredutíveis, uma delas a representação trivial).

(b) Demonstrar que o grupo D_4 tem 3 subgrupos de índice 2 (por tanto normais). Cada um deles induz uma representação irredutível de dimensão 1.

(c) Usando as propriedades de ortogonalidade dos carateres, calcular a tabela de carateres do grupo D_4 (a representação que não é de dimensão 1 é induzida de uma representação de dimensão 1 do subgrupo normal gerado pela rotação r).

(12) Seja Q o grupo de *quaterniões*, ou seja o grupo $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ com as relações (de multiplicação):

$$i^2 = -1, \quad j^2 = -1, \quad k^2 = -1, \quad ij = -ji = k.$$

Calcular a tabela de caracteres do grupo Q. Demonstrar que o grupo Q não é isomorfo ao grupo D_4, mais os dois tem a mesma tabela de caracteres.

(13) Sejam V, W representações de G, e seja $\text{Hom}(V, W)$ o conjunto de homomorfismos de V em W.

(a) Demonstrar que $\text{Hom}(V, W)$ é um K-espaço vetorial.

(b) Seja V^* a representação dual de V. Demonstrar que

$$\text{Hom}(V, W) \simeq V^* \otimes W.$$

(sugestão: considerar a transformação linear $\psi : V^* \otimes W \to \text{Hom}(V, W)$ dada por $\psi(\sum_i f_i \otimes w_i)(v) = \sum_i f_i(v)w$)