Grupos e Representações

Ficha 1 – Primeiro Semestre 2025

Exercícios para pensar, resolver e discutir em classe. A letra G vai denotar um grupo finito, K um corpo, e V um K-espaço vetorial de dimensão finita.

(1) Encontrar todas as representações de dimensão 1 do grupo $\mathbb{Z}/n$.

(2) Seja $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ uma representação. Sejam B_1 e B_2 duas bases do K-espaço vetorial V. Demonstrar que as representações $\rho_1 : G \to \mathrm{GL}_n(K)$ e $\rho_2 : G \to \mathrm{GL}_n(K)$ obtidas a partir da base B_1 e B_2 são isomorfas.

(3) Seja $\rho : \mathbb{Z}/3 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ a representação definida por

$$\rho(1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Demonstrar que ρ tem duas subrepresentações de dimensão 1. Demonstrar que elas não são isomorfas.

(4) Seja $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ uma representação de um grupo cíclico G (i.e. todo elemento de G é da forma g^n para algum $n \in \mathbb{N}$). Demonstrar que se $W \subset V$ é um subespaço invariante pela acção de $\rho(g)$ (i.e. $\rho(g)w \in W$ para todo $w \in W$) então W é uma subrepresentação de V. Deduzir que todas as representações num $\mathbb{C}$-espaço vetorial irredutíveis dum grupo cíclico tem dimensão 1.

(5) (a) Sejam $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ duas matrizes que satisfazem $A \cdot B = B \cdot A$. Demonstrar que existe um vetor próprio comum de A e de B (i.e. existe $w \in \mathbb{C}^n$ tal que $A \cdot w = \lambda w$ e $B \cdot w = \mu w$ para $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$).

(b) Seja G um grupo finito abeliano, e $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ uma representação irredutível. Demonstrar que $n = 1$.

(6) Sejam $\rho_1 : G \to \mathrm{GL}(v)$ e $\rho_2 : G \to \mathrm{GL}(W)$ duas representações do grupo G. Demonstrar que a função $\rho_1 \oplus \rho_2 : G \to \mathrm{GL}(V \times W)$ definida por

$$\rho_1 \oplus \rho_2(g)(v, w) = (\rho_1(g)(v), \rho_2(g)(w))$$

é uma representação do grupo G.

(7) Seja $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$. Identifiquemos a base canónica $\{e_1, \ldots, e_n\}$ do espaço vetorial $\mathbb{C}^n$ com os elementos do grupo G (por exemplo via $g_i \leftrightarrow e_i$, $1 \le i \le n$). A **representação regular** do grupo G e a representação

$$\rho_{\mathrm{reg}} : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),$$

dada por $\rho_{\mathrm{reg}}(g)(e_i) = e_j$, onde $g \cdot g_i = g_j$.

(a) Escrever as matrizes da representação ρ_{reg} no caso $G = \mathbb{Z}/2$. Demonstrar que neste caso ρ_{reg} é isomorfa a $\mathbb{1} \oplus \theta_2$, onde $\theta_2 : \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{C}^\times$ é a representação que cumpre $\theta_2(\overline{1}) = -1$.

(b) Seja n um número natural, e seja G o grupo finito $\mathbb{Z}/n$. Seja $\zeta_n = \exp(2\pi i/n)$ uma raiz n-ésima primitiva da unidade. Para cada $i = 0, \ldots, n-1$, seja $\theta_i : G \to \mathbb{C}^\times$ a representação que cumpre $\theta_i(\overline{1}) = \zeta_n^i$ (em particular, $\theta_0 = \mathbb{1}$). Demonstrar que

$$\rho_{\mathrm{reg}} \simeq \mathbb{1} \oplus \theta_1 \oplus \theta_2 \oplus \cdots \oplus \theta_{n-1}.$$

(8) Sejam $g, h \in G$. O seu comutador é o elemento

$$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}.$$

O comutador do grupo G é o subgrupo gerado por comutadores, i.e.

$$[G, G] = \langle [g, h] | g, h \in G \rangle.$$

(a) Demonstrar que se G é abeliano, $[G, G] = 1$.

(b) Demonstrar que $[G, G]$ é um subgrupo normal de G, e $G/[G, G]$ é um grupo abeliano.

(c) Seja $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ uma representação de dimensão 1. Demonstrar que $[G, G] \subset \ker(\rho)$. Deduzir que ρ induz uma representação $\tilde{\rho} : G/[G, G] \to \mathrm{GL}(V)$.

(d) Dar às representações de dimensão 1 do grupo S_n.