AGRA II: Aritmética, grupos y análisis

An ICTP-CIMPA Research School

Formas de Hilbert

Ariel Pacetti

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD S. ANTONIO ABAD, CUSCO, PERU, del 8 al 22 de Agosto de 2015

Índice general

1. *Reinterpretación de las formas modulares clásicas*

1.1. Formas modulares como formas en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

La principal referencia para esta parte es el libro [Gel75]. Recordar que las formas modulares eran formas holomorfas en el semiplano de Poincaré $\mathfrak{h} = \{z \in \mathbb{C} \;:\; \Im(z) > 0\}$. Para entender la relación de estas funciones con el cuerpo de números racionales, debemos entender como es que este cuerpo aparece en la teoría. Recordar que el grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ de matrices reales de 2×2 con determinante 1 actúa en $\mathfrak{h}$ de manera transitiva, dado que si $z = x + iy$ es un elemento de $\mathfrak{h}$,

$$x + iy = \begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} \cdot i$$

Luego podemos identificar $\mathfrak{h}$ con el cociente de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ módulo el estabilizador de i, o sea

$$\mathfrak{h} \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\,\mathrm{SO}(2), \tag{1.1}$$

donde $\mathrm{SO}(2)$ es el grupo ortogonal, dado por matrices de la forma

$$r(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 1. Probar que si $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ es una matriz de 2×2 de determinante 1 que estabiliza el punto i, entonces existe un $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $M = r(\theta)$.

Por Γ vamos a denotar un subgrupo de congruencia, como $\Gamma_0(N)$. Para una primera lectura de estas notas, basta suponer que Γ es todo el grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, y vamos a asumirlo en varias ocasiones (diciendo que sucede en el caso general). A una forma modular $f \in M_k(\Gamma)$, le podemos asociar una función $\phi_f : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, de la siguiente manera:

$$\phi_f(g) = f(g \cdot i)j(g, i)^{-k}. \tag{1.2}$$

Es claro que ϕ_f es cero si y sólo si f lo es. Notar que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ posee una acción a izquierda de Γ (por el que estudiamos invariancia de las formas modulares), y una acción a derecha de $\mathrm{SO}(2)$ también. Ambas acciones son de vital importancia para entender las formas modulares como formas automorfas.

Proposición 1. La función ϕ_f satisface las siguientes propiedades:

1. $\phi_f(\gamma g) = \phi_f(g)$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

2. $\phi_f(gr(\theta)) = \exp(ik\theta)\phi_f(g)$.

3. Si f es cuspidal, entonces ϕ_f es una función acotada y
$$\int_{\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} |\phi_f(g)|^2 dg < \infty.$$

4. Si f es cuspidal, entonces ϕ_f es cuspidal, lo que quiere decir que para todo $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ y todo $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$,
$$\int_0^1 \phi_f\left(\gamma \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) g\right) dx = 0.$$

Demostración. 1. Por definición,
$$\begin{aligned}\phi_f(\gamma g) &= f(\gamma g \cdot i) j(\gamma g, i)^{-k} \\ &= j(\gamma, g \cdot i)^k f(g \cdot i) j(\gamma, g \cdot i)^{-k} j(g, i)^{-k} = \phi_f(g).\end{aligned}$$

2. Recordar que $\mathrm{SO}(2)$ es justamente el normalizador de i, con lo cual
$$\begin{aligned}\phi_f(gr(\theta)) &= f(gr(\theta) \cdot i) j(gr(\theta), i)^{-k} \\ &= f(g \cdot i) j(g, r(\theta) \cdot i)^{-k} j(r(\theta), i)^{-k} = \phi_f(g) \exp(-i\theta)^{-k}.\end{aligned}$$

3. Como se mencionó en las notas de R. Miatello, la compactificación de $\Gamma\backslash\mathfrak{h}$ se obtiene agregando la cúspide de infinito al semiplano complejo superior (o finitos puntos para subgrupos de congruencia) y definiendo un abierto base de él. Si $f(z) \in M_k(\Gamma)$, entonces la función $F(z) = \Im(z)^{k/2}|f(z)|$ es invariante por la acción de Γ. Ahora si $f(z)$ es cuspidal, decrece de manera exponencial al acercarse a la cúspide de infinito, con lo cual $F(z)$ tiende a cero al acercarnos a tal cúspide. Luego $F(z)$ se extiende de manera continua a un compacto, y por lo tanto está acotada.

Ahora, si tomamos $z = g \cdot i = \frac{ai+b}{ci+d}$, donde $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, entonces $\Im(z) = \frac{1}{|ci+d|^2}$, con lo cual
$$\left| F\left(\frac{ai+b}{ci+d}\right) \right| = \left| f\left(\frac{ai+b}{ci+d}\right) \right| |ci+d|^{-k} = |\phi_f(g)|.$$

Para poder siquiera enunciar la finitud de la integral (que implica que la función está en un espacio L^2), debemos decir con respecto a que medida estamos integrando. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ lo podemos parametrizar por (x, y, θ), donde $\theta \in [0, 2\pi)$ (corresponde al compacto), $x \in (-\infty, \infty)$ e $y \in (0, \infty)$. Luego la medida de Haar es la medida invariante del semiplano de Poincaré $\frac{dxdy}{y^2}$ multiplicada por la medida $\frac{1}{2\pi}d\theta$ (esta normalización hace con que el compacto tenga medida 1). Así,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} |\phi_f(g)|^2 dg &= \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{h}}\int_0^{2\pi} \left|\phi_f\left(\left(\begin{smallmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{1/2}\end{smallmatrix}\right) r(\theta)\right)\right|^2 \frac{dxdy}{y^2}d\theta \\ &= \int_{\Gamma\backslash\mathfrak{h}} |f(x+iy)|^2\, y^k\, \frac{dxdy}{y^2} = ||f||,\end{aligned}$$

donde $||f||$ denota la norma de Petersson introducida en las notas de R. Miatello.
4. Como estamos asumiendo que $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, la acción a derecha de γ es trivial. Luego, si llamamos $z = g \cdot i$, tenemos que

$$\int_0^1 \phi_f\left(\gamma\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) g\right) dx = j(g,i)^{-k}\int_0^1 f(z+x)dx = a_0(f) = 0.$$

En el caso general, nos queda la integral no de f, sino de $f|[\gamma]_k$, que corresponde a mirar la expansión de Fourier en otras cúspides. Pero el hecho de ser cuspidal implica que el primer coeficiente de Fourier en todas las cúspides es cero. □

Luego a cada forma modular $f \in S_k(\Gamma)$ le hemos asociado una función ϕ_f en $L^2(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$. ¿Como caracterizar la imagen?

Dentro del conjunto de funciones C^∞ de $\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (que son densas en $L^2(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$), hay un operador que juega un rol fundamental, el llamado *operador de Casimir*. Este operador, en las coordenadas (x, y, θ), se puede definir como

$$\Delta = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - y\,\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}. \tag{1.3}$$

Proposición 2. La función $f \to \phi_f$ da una biyección entre $S_k(\Gamma)$ y las funciones ϕ en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ que satisfacen:

1. $\phi(\gamma g) = \phi_f(g)$ para todo $\gamma \in \Gamma$.
2. $\phi(gr(\theta)) = \exp(ik\theta)\phi_f(g)$.
3. $\Delta\phi = -\frac{k}{2}(\frac{k}{2} - 1)\phi$.
4. ϕ es una función acotada y cuspidal.

Demostración. Corroboremos que ϕ_f satisface todas las propiedades. Vimos que si $f \in S_k(\Gamma)$, entonces ϕ_f satisface todas las propiedades salvo la tercera. Para ver esta, recordar que $\phi_f\left(\left(\begin{smallmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2}\end{smallmatrix}\right) r(\theta)\right) = f(x+iy)y^{k/2}e^{ik\theta}$. Claramente:

- $\frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}\phi_f(z,\theta) = (ik)\frac{\partial f(z)}{\partial x} y^{k/2} e^{ik\theta}$.
- $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi_f(z,\theta) = \frac{\partial^2 f(z)}{\partial x^2} y^{k/2} e^{ik\theta}$.
- $\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi_f(z,\theta) = (\frac{\partial^2 f(z)}{\partial y^2} y^{k/2} + k\frac{\partial f(z)}{\partial y} y^{k/2-1} + f(z)\frac{k}{2}(\frac{k}{2}-1)y^{k/2-2})e^{ik\theta}$.

Luego,

$$\Delta\phi_f = \left(-y^{k/2+2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(z) - y^{k/2+1}ik\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)f(z) \right.$$
$$\left. -\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2}-1\right)y^{k/2}f(z)\right)e^{ik\theta}.$$

Como $f(z)$ es holomorfa, los dos primeros términos se anulan. Para probar la recíproca, necesitamos demostrar que si ϕ satisface las condiciones, y definimos $f(x+iy) = \phi(g)j(g,i)^k$, donde $g = \left(\begin{smallmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2}\end{smallmatrix}\right)$, obtenemos una forma modular. La condición de invariancia se deduce fácilmente de las fórmulas de la demostración de la Proposición 1. Lo que resulta mas complicado con esta definición es verificar justamente que la función f es holomorfa. Daremos una idea de esta demostración en la siguiente sección.

$\square$

1.2. Interpretación del operador de Casimir

Notar que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ actúa en $L^2(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ vía la acción regular a derecha, esto es $g\cdot\phi(h) = \phi(hg)$, con lo cual podemos considerar las representaciones irreducibles de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ en tal espacio. Vamos a denotar por $d : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times L^2(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})) \to L^2(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ a dicha representación.

Definición. Un *grupo de Lie* es un grupo con una estructura de variedad diferenciable, para el cual la operación de grupo y la función inversa son C^∞.

El grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ es un grupo de Lie real, y lo que obtuvimos fue una representación de él. Recordar que en general, si G es un grupo topológico localmente compacto, una representación de G es un par (π, H), donde H es un espacio de Hilbert, y $\pi : G \times H \to H$ es tal que $(g,f) \to \pi(g)f$ es continua. Si (π, H) es una representación de un grupo de Lie G, resulta conveniente estudiar las representaciones del álgebra de Lie de G.

Definición. Un *álgebra de Lie* es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ junto con una operación binaria $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ llamada corchete de Lie, que satisface las siguientes propiedades:

- (Bilineal) $[aX+bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$ y $[X, aY+bZ] = a[X,Y] + b[X,Z]$.

- (Alternada) $[X, X] = 0$.
- (Jacobi) $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$.

Todo grupo de Lie tiene asociada un álgebra de Lie, que está dada como espacio vectorial por el espacio tangente en la identidad, y el corchete está dado por la función exponencial. Recordar que la función exponencial es una función

$$\exp : \mathfrak{g} \to G, \tag{1.4}$$

definida como $\exp(X) = \gamma(1)$, donde $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ es tal que $\gamma(0) = 1$, $\gamma'(0) = X$ y $F_X(\gamma(t)) = \gamma(t)$, donde F_X es un campo invariante a derecha asociado a X (lo que implica que $\gamma(t)$ es un morfismo de grupos). La exponencial es un difeomorfismo local (ya que su diferencial es la identidad). Luego el corchete satisface

$$\exp(X)\exp(Y)\exp(X)^{-1}\exp(Y)^{-1} = \exp(\frac{1}{2}[X, Y] + \cdots), \tag{1.5}$$

donde los puntos suspensivos quieren decir que son términos de orden al menos 3.

Ejercicio 2. Probar que si $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, entonces su álgebra de Lie esta dada por las matrices de traza cero, la exponencial es la exponencial usual de matrices, y el corchete está dado por $[X, Y] = XY - YX$.

Si (π, H) es una representación de un grupo localmente compacto G, decimos que $f \in H$ es C^1 si vale que para todo $X \in \mathfrak{g}$ existe el límite

$$\pi(X)f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \pi(\exp(tX))f = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\pi(\exp(tX))f - f). \tag{1.6}$$

Recursivamente, decimos que f es C^k si es C^1 y $\pi(X)f$ es C^{k-1} para todo $X \in \mathfrak{g}$. Definimos el espacio de vectores suaves H^∞ como el espacio de vectores f que están en C^k para todo $k \in \mathbb{N}$. Por definición, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G actúa en H^∞. No es difícil ver que $\pi[X, Y] = \pi(X)\pi(Y) - \pi(Y)\pi(X)$, con lo cual (π, H) es una representación de $\mathfrak{g}$.

Proposición 3. El subespacio H^∞ satisface:

- H^∞ es G invariante.
- H^∞ es denso en H.

Demostración. Ver [Bum97, Proposición 2.4.2]. □

Supongamos que (π, H) es una representación unitaria e irreducible de G, y sea K un subgrupo compacto de G (nuestro interés es en $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ y $K = \mathrm{SO}(2)$). Luego podemos estudiar la restricción a K de nuestra representación. Si τ es una representación irreducible de K, denotamos por H_τ el subespacio de H donde K actúa por τ. Por el teorema de Peter-Weyl (ver por ejemplo [Bum97, Teorema 2.4.1]),

$$H = \bigoplus_{\tau}^{\perp} H_\tau. \tag{1.7}$$

Una representación se dice *admisible* si los subespacios H_τ son de dimensión finita. Vale que toda representación unitaria irreducible de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ es admisible, con lo cual en la descomposición anterior los espacios H_τ tiene dimensión finita. Notar que en dicha descomposición, los vectores cuya proyección a los subespacios H_τ son cero para casi toda representación (salvo finitas), son densos y tienen la particularidad de que si miramos el subespacio

$$\pi(K)v = \langle \pi(k)v \ : \ k \in K \rangle,$$

es de dimensión finita. Los vectores K *finitos* son los que satisfacen esta propiedad, y denotamos H_{fin} es subespacio de vectores finitos. El compacto K actúa en H_{fin}. Sea $H_0 = H_{fin} \cap H^\infty$.

Proposición 4. El subespacio H_0 es denso en H, y tiene una estructura de $(\mathfrak{g}, K)$-módulo. Además, ambas representaciones satisfacen la compatibilidad

$$\pi(g)\pi(X)\pi(g^{-1})f = \pi(\mathrm{Ad}(g)X)f, \qquad \forall\, X \in \mathfrak{g}, g \in K. \tag{1.8}$$

Demostración. Mirando la descomposición (1.7), es claro que $H_\tau^\infty = H^\infty \cap H_\tau$ es denso en H_τ, con lo cual la primera afirmación se deduce del hecho de que sumas finitas de vectores suaves es suave. La compatibilidad es inmediata. □

Recordar que al álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ podemos asociarle su álgebra envolvente, que se define como

$$U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \otimes_{\mathbb{R}}^k \mathfrak{g}/I, \qquad I = \langle X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y] \ : \ X, Y \in \mathfrak{g} \rangle. \tag{1.9}$$

Donde $\otimes_{\mathbb{R}}^k \mathfrak{g}$ es el producto tensorial usual, y el producto esta dado por el producto tensorial $\otimes^i \mathfrak{g} \times \otimes^j \mathfrak{g} \to \otimes^{i+j} \mathfrak{g}$. Es casi inmediato que cualquier representación de $\mathfrak{g}$ se extiende a una representación de $U(\mathfrak{g})$ (por preservar el corchete, ver [Bum97, Proposición 2.3]).

Proposición 5. Sea V un $(\mathfrak{g}, K)$ modulo admisible irreducible, y sea $\mathfrak{z}$ un elemento del centro de $U(\mathfrak{g})$. Entonces $\mathfrak{z}$ actúa como un escalar en V.

Demostración. Como X es un elemento del centro, $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{z} = \mathfrak{z}$, con lo cual la acción de K conmuta con la de $\mathfrak{z}$. Luego X deja fijo los espacios V_τ de (1.7). Como estos son de dimensión finita e irreducibles, por el Lema de

Schur, V_τ actúa como un escalar en cada uno de ellos. Por otro lado, si λ es un autovalor en algún espacio, y miramos $V_\lambda = \{v \in V \,:\, \pi(\mathfrak{z})v = \lambda v\}$, esto es un subespacio no vacío, e invariante por la acción de $\mathfrak{g}$ (porque $\mathfrak{z}$ conmuta con $\mathfrak{g}$) y de K. Como V es irreducible, $V_\lambda = V$. $\square$

En nuestro caso, $K = \mathrm{SO}(2)$, que es un grupo abeliano compacto, con lo cual sus representaciones están dadas por caracteres. Las mismas están parametrizadas por los enteros, y están dadas por $\chi_k(\theta) = e^{ik\theta}$. Luego cualquier representación admisible de $\mathrm{SL}_2(R)$, se descompone como

$$V = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} V(k).$$

El conjunto $\sigma = \{k \in \mathbb{Z} \,:\, V(k) \neq \emptyset\}$ se llama el conjunto de K-*tipos*.

Tomemos los siguientes generadores de $U(\mathfrak{g})$:

$$\hat{R} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \qquad \hat{L} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \quad \text{y} \quad \hat{H} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right). \tag{1.10}$$

Es fácil ver que satisfacen las relaciones: $[\hat{H}, \hat{R}] = 2\hat{R}$, $[\hat{H}, \hat{L}] = -2\hat{L}$ y $[\hat{R}, \hat{L}] = \hat{H}$. Si definimos

$$-4\Delta = \hat{H}^2 + 2\hat{R}\hat{L} + 2\hat{L}\hat{R},$$

(donde multiplicación es en $U(\mathfrak{g})$), entonces vale que Δ es un elemento del centro de $U(\mathfrak{g})$ (ver [Bum97, Teorema 2.2.1]) que se llama *Casimir*. Para relacionar el operador de Casimir, con el introducido en la sección anterior, es preciso extender la acción de $\mathfrak{g}$ a su complexificación (para poder hacer un cambio de coordenadas acorde). Si V es un $(\mathfrak{g}, K)$-módulo, podemos mirar la complexificación de V, dada por $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. A la vez, podemos mirar la complexificación de $\mathfrak{g}$, donde el espacio vectorial es el complexificado, y el corchete lo extendemos de manera que sea $\mathbb{C}$-bilineal. Definamos los elementos

$$R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}, \qquad L = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Estos son conjugados a los anteriores por la matriz $-\frac{1+i}{2}\left(\begin{smallmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{smallmatrix}\right)$, con lo cual satisfacen las mismas relaciones (y dan el mismo Δ por estar en el centro).

Si V es un $(\mathfrak{g}, K)$-modulo irreducible, sabemos que

$$V = \sum_k V(k),$$

donde cada $V(k)$ es de dimensión finita. Denotemos $W = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Proposición 6. En la notación anterior valen.

1. $W\phi = ik\phi$, con lo cual $H\phi = k\phi$.
2. $V(k) = \{v \in V \ : \ Hv = kv\}$.
3. $RV(k) \subset V(k+2)$.
4. $LV(k) \subset V(k-2)$.
5. Cada $V(k)$ es de dimensión a lo sumo 1, y si $V(j)$, $V(k)$ son no nulos, entonces $j \equiv k \pmod 2$.

Demostración. (1) Por definición, si $\phi \in V(k)$, $W\phi(g) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \phi(g\exp(tW))$. Como $\exp(t \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{smallmatrix}\right)$,

$$dW\phi(g) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp(ikt)\phi(g) = ik\phi(g).$$

(2) Es claro de (1).
(3) Recordar que $[H,R] = 2R$, con lo cual

$$HR\phi = [H,R]\phi + RH\phi = 2R\phi + Rk\phi = (k+2)R\phi.$$

Luego de (2) se obtiene el enunciado. (4) se obtiene de una cuenta similar.
(5) Sea $V(k)$ no nulo, y tomemos ϕ un elemento no nulo en él. Luego podemos mirar

$$W = \mathbb{C}\phi \oplus \bigoplus_{n>0} \mathbb{C}R^n\phi \oplus \bigoplus_{n>0} \mathbb{C}L^n\phi. \tag{1.12}$$

Si vemos que esto es un $(\mathfrak{g},K)$-submódulo no nulo, por ser V irreducible deben coincidir, lo que demuestra la primera parte. Basta calcular $RL\phi$ y $LR\phi$. Sabemos que Δ actúa por un escalar en V, denotémoslo por λ. Utilizando que $-4\Delta = H^2 + 2RL + 2LR = H^2 - 2H + 4RL$, y $\phi \in V(k)$, tenemos que

$$-4\lambda\phi = \Delta\phi = (k^2+2k)\phi + 4LR\phi = (k^2-2k)\phi + 4RL\phi.$$

Luego tanto $LR\phi$ como $RL\phi$ están en $\mathbb{C}\phi$. La segunda parte es automática ahora, dado que sabemos que los espacios indexados por pares son invariantes, y los impares también, luego al ser el espacio irreducible, uno sólo de ellos puede ser no nulo. $\square$

Recordar que denotamos por $d : \mathfrak{g} \times C^\infty(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})) \to C^\infty(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ la acción regular a derecha. Dada $f \in S_k(\Gamma)$, su representación asociada está dada por el módulo que ϕ_f genera vía dicha acción, o sea $V_f = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \cdot \phi_f$. Mirándolo como $(\mathfrak{g},K)$-módulo, sabemos que al restringir la representación a K se descompone como

$$V_f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} V_f(j).$$

Proposición 7. La representación V_f es irreducible. Mas aún, vale:

1. $\Delta\phi_f = \frac{k}{2}(1-\frac{k}{2})\phi_f$, y actúa de igual manera en V_f.
2. $V_f(j) = 0$ si $j < k$.
3. $V_f(k) = \mathbb{C}\phi_f$.

Demostración. Como vimos anteriormente, la acción de dH es diagonal en cada sumando, con lo cual basta calcular la acción de dL y dR. Como $L = \frac{1}{2}(\hat{H} - 2i\hat{R} - H)$, vamos a calcular la acción de $d\hat{H}$ y $d\hat{R}$ en ϕ_f.

$$d\hat{R}\phi_f \begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi_f \left(\begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$
$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi_f \begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2}+y^{1/2}t \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} y^{k/2} f(iy+x+ty) = y^{k/2+1}\frac{\partial f}{\partial x}(x+iy).$$

$$d\hat{H}\phi_f \begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi_f \left(\begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \right) =$$
$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} e^{tk} y^{k/2} f(iye^{2t} + x) = y^{k/2}\left(kf(x+iy) - 2y\frac{\partial f}{\partial y}(x+iy) \right).$$

Juntando todo, tenemos que

$$dL(\phi_f) = \frac{1}{2} y^{k/2+1}(-2i)\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z) \right) = 0, \qquad (1.13)$$

por ser la función f holomorfa.

Calculemos la acción de -4Δ en V_f. Como V_f es el generado por ϕ_f y el operador de Casimir está en el centro, su acción es igual en todo V_f, con lo cual basta calcularla en ϕ_f. Recordar que

$$-4\Delta = H^2 + 2RL + 2LR. \qquad (1.14)$$

Sabemos que $L\phi_f = 0$, con lo cual

$$-4\Delta\phi_f = (H^2 + 2LR)\phi_f = (H^2 - 2[R, L])\phi_f = (H^2 - 2H)\phi_f. \qquad (1.15)$$

Sabemos que $H\phi_f = -k\phi_f$, con lo cual $-2\Delta\phi_f = (k^2 - 2k)\phi_f$. Dividiendo por -4 obtenemos (1).

Para ver (2), sabemos que $L\phi_f = 0$, resta ver que pasa al aplicar $LR\phi_f$. Como tanto el operador de Casimir como H actúan de manera diagonal en $V_f(k)$, de (1.15) se ve que $LR\phi_f$ es un múltiplo de ϕ_f. En general, si calculamos $LR^n\phi_f$ (con $n \geq 2$), utilizando (1.14), vemos que $LR^n\phi_f$ es un múltiplo de $R^{n-1}\phi_f$ mas $RL(R^{n-1}\phi_f)$. La hipótesis inductiva dice que $LR^{n-1}\phi_f$ es un múltiplo de $R^{n-2}\phi_f$, con lo cual $LR^n\phi_f$ es un múltiplo de $R^{n-1}\phi_f$. Esto termina la demostración. $\square$

Observación. El punto crucial de esta construcción, es que en la representación V_f asociada a f, el elemento ϕ_f es un vector de peso mínimo, en el sentido que genera el primer subespacio no nulo.

Terminemos ahora la demostración de la Proposición 4: al tomar una función ϕ_f como en el enunciado, la representación que obtenemos tiene autovalor para el Casimir $\frac{k}{2}(1 - \frac{k}{2})$. Haciendo una cuenta parecida a las hechas anteriormente, es fácil verificar que la representación como $(\mathfrak{g}, K)$-módulo que induce es exactamente como la descripta en la Proposición 7. Luego $L\phi_f = 0$, lo que por (1.13) implica que la función es holomorfa.

Observación. Lo fundamental del operador de Casimir, es que $\mathbb{C}[\Delta]$ es el centro de $U(\mathfrak{g})$, con lo cual es (salvo escalares) el único operador que conmuta con la acción de K (y por lo tanto se diagonaliza).

Definición. La representación de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ descripta anteriormente se llama *serie discreta* de peso k.

2. *Formas automorfas como formas en los adèles*

Al pensar a las formas modulares como formas de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, nos surge el problema natural de tratar de definir a los operadores de Hecke en ellas. Dichos operadores no tienen una definición elemental en este mundo automorfo. Es por esto que necesitamos extender el dominio de definición para incluir los adèles y así sí poder definirlos.

2.1. Adèles e idèdes

El anillo de adèles fue introducido por Claude Chevalley (1909-1984). En estas notas (y durante el curso), utilizaremos esta noción solamente para el caso de cuerpos de números. Son de gran utilidad en la teoría algebraica de números. Algunas referencias son [Neu92], [Ste12],[Wei95], [Mil14].

Sea $\mathbb{Q}$ el cuerpo de números racionales. Una valuación en $\mathbb{Q}$ es una función $v : \mathbb{Q}\backslash\{0\} \to \mathbb{Z}$ que satisface:

- $v(nm) = v(n) + v(m)$.
- $v(n+m) \geq \min\{v(n), v(m)\}$.

A veces resulta útil extender la valuación a todo el cuerpo, decretando que $v(0) = \infty$. Los ejemplos que vamos a considerar de valuaciones son los siguientes: dado p un primo (que podemos suponer positivo), todo número racional no nulo lo podemos escribir de manera única como $p^r \frac{a}{b}$, donde $r \in \mathbb{Z}$ y $p \nmid ab$. Esto nos permite definir una función

$$v_p : \mathbb{Q}\backslash\{0\} \to \mathbb{Z}, \qquad v_p\left(p^r \frac{a}{b}\right) = r. \tag{2.1}$$

Es fácil ver que esta función es una valuación, y se la denomina la *valuación p-ádica*.

Ejercicio 3. Probar que si p es un número primo, entonces v_p es efectivamente una valuación.

Ejercicio 4. Probar que si miramos al anillo de polinomios $\mathbb{Q}(x)$, y definimos la valuación dada por el orden de anulación en cero de un polinomio no nulo, satisface las propiedades de una valuación.

A una valuación v uno puede asociarle un valor absoluto sobre el cuerpo. Si elegimos $\alpha \in \mathbb{R}$ de manera que $0 < \alpha < 1$, entonces definimos el valor absoluto *no-arquimedeano*

$$| \, . \, |_v : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \text{ por}$$
$$|m|_v = \begin{cases} \alpha^{v(m)} & \text{si } m \neq 0. \\ 0 & \text{si } m = 0. \end{cases}$$

Distintas elecciones de α dan valores absolutos equivalentes, en el sentido que dan los mismos los abiertos. El valor absoluto p-ádico es el asociado a la valuación v_p, tomando la normalización usual $\alpha = \frac{1}{p}$. El mismo se denota por $|m|_p$. Así, $|3|_3 = \frac{1}{3}$ y $|\frac{4}{9}|_3 = 9$.

Claramente el valor absoluto $| \, . \, |_v$ asociado a una valuación satisface:

1. $|m|_v = 0$ si y sólo si $m = 0$.
2. $|nm|_v = |n|_v |m|_v$.
3. $|n + m|_v \leq \max\{|n|_v, |m|_v\}$.

La última desigualdad, implica la desigualdad triangular clásica, pero es mucho mas fuerte que esta (y se suele llamar *ultramétrica*).

Ejercicio 5. Probar que con el valor absoluto p-ádico, el conjunto de números enteros está acotado. Mas aún, $|n|_p \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ (o sea todos los números enteros están a distancia a lo sumo 1 del cero).

No es difícil ver que un valor absoluto sobre un cuerpo satisface la propiedad ultramétrica si y sólo si los enteros están acotados (ver [Mil14, Proposition 7.2]).

Teorema 8 (Ostrowski)**.** Todo valor absoluto no trivial de $\mathbb{Q}$ es equivalente a uno de los siguientes:

- El valor absoluto clásico $|x|_\infty$.
- El valor absoluto p-ádico $|x|_p$ para algún primo p.

Recordar que la condición de que dos valores absolutos sean equivalentes es que den los mismos abiertos en el conjunto. Para la demostración, ver por ejemplo [Mil14, Theorem 7.12].

Ejercicio 6. Probar que los valores absolutos que aparecen en el Teorema de Ostrowski son todos no equivalentes.

Para tener una manera unificada de hablar de los distintos valores absolutos, se suele introducir la noción de lugares, donde los lugares están compuestos por los valores absolutos no-arquimedeanos (correspondientes a los números primos), y uno extra asociado al valor absoluto usual, denominado lugar del infinito.

Dado un valor absoluto en un cuerpo, podemos completarlo con respecto a dicho valor absoluto.

Ejercicio 7. Probar que al completar un cuerpo con respecto a un valor absoluto obtenemos nuevamente un cuerpo, o sea las operaciones se pueden extender a la completación, y siguen satisfaciendo los axiomas de un cuerpo. Probar a la vez que el valor absoluto se extiende a la completación.

Si completamos a los números racionales con el valor absoluto clásico, obtenemos el cuerpo $\mathbb{R}$ de números reales. No obstante, si completamos a $\mathbb{Q}$ con el valor absoluto p-ádico, obtenemos otro cuerpo, que notamos por $\mathbb{Q}_p$. Por ejemplo, la sucesión $\{p^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a cero en $\mathbb{Q}_p$. Esto permite caracterizar al conjunto de números p-ádicos como sumas

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ \sum_{n\geq N_0} a_n p^n \ : \ a_n \in \{0, \ldots, p-1\} \right\}.$$

Ejercicio 8. Probar esta caracterización de la siguiente manera:

- Probar que todo entero tiene una tal descripción (como suma finita), que corresponde a mirar al número en base p.
- Probar que si $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy con el valor absoluto p-ádico, entonces los primeros términos de tal expresión se vuelven constantes a partir de un cierto n.
- Probar que si $n \in \mathbb{Z}$ es coprimo con p, entonces $\frac{1}{n}$ tiene una tal expresión. (sugerencia: invertir la expresión de n formalmente). Deducir que todo racional se escribe de esta manera.
- Terminar el argumento.

De manera análoga, podemos definir $\mathbb{Z}_p$ como el completado de $\mathbb{Z}$ con respecto al valor absoluto p-ádico. Notar que todos los elementos así construidos dentro de $\mathbb{Q}_p$ tienen valor absoluto a lo sumo 1. Es fácil ver que

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \ : \ |x|_p \leq 1\},$$

o sea corresponde a la bola unidad. Notar que $\mathbb{Z}_p$ es cerrado (por definición), y a la vez es abierto, porque el valor absoluto p-ádico toma un conjunto discreto de valores (así no alcanza ningún valor entre 1 y p, luego podemos definir $\mathbb{Z}_p$ como la bola abierta de radio $3/2$). Esto hace con que $\mathbb{Q}_p$ sea totalmente disconexo como espacio topológico. Notar que $\mathbb{Z}_p$ es compacto (por ser cerrado y acotado). Este hecho será de vital importancia.

Ejercicio 9. El propósito de este ejercicio es probar que $\sqrt{-1}$ es un elemento en $\mathbb{Z}_5$. Como vimos antes, todo elemento de $\mathbb{Z}_5$ se puede escribir como

$$a_0 + a_1 \cdot 5 + a_2 \cdot 5^2 + a_3 \cdot 5^3 + \cdots$$

Luego debemos determinar los coeficientes a_n.

- Probar que existe un a_0 que hace que $a_0^2 \equiv -1 \pmod{5}$.
- Construido a_0, probar que existe a_1 tal que $(a_0+5a_1)^2 \equiv -1 \pmod{25}$.
- Demostrar el enunciado con algún argumento inductivo.

Luego no sólo $\mathbb{Q}_5$ es un cuerpo totalmente distinto a $\mathbb{R}$, sino que hay polinomios que tienen raíces en él, pero no son reales.

Teorema 9 (Fórmula del producto)**.** Si $n \in \mathbb{Q}$, entonces

$$|n| \prod_{p \text{ primos}} |n|_p = 1.$$

La demostración es totalmente elemental, y la dejamos como ejercicio para el lector.

Sea S un conjunto finito de lugares que contenga al lugar del infinito. Definimos al conjunto de S-adèles, y lo denotamos $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^S$, al conjunto

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^S = \prod_{p \notin S} \mathbb{Z}_p \times \prod_{p \in S} \mathbb{Q}_p \times \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Este anillo es un anillo topológico con la topología producto. El anillo de *adèles* es la unión sobre los conjuntos S-finitos de los conjuntos $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^S$. Equivalentemente, podemos definir los adèles como el producto directo restringido con respecto al maximal $\mathbb{Z}_p$ para los primos finitos, donde la topología es la producto. Así, $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ resulta un anillo topológico localmente compacto.

Notar que claramente $\mathbb{Q}$ es un subanillo de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$, donde podemos pensar los números racionales como vectores infinitos del mismo elemento, y es claro que cualquier número racional r está en $\mathbb{Z}_p$ para todos los primos p salvo finitos (que dividen al denominador), con lo cual es un adèle.

2.2. Formas modulares como funciones de los adèles

Queremos extender las definiciones de los adèles a otros grupos, como el grupo de matrices de 2×2. Dado un primo p, definimos $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ al grupo de matrices inversibles de 2×2 con coeficientes en el cuerpo de números p-ádicos $\mathbb{Q}_p$.

Ejercicio 10. Vimos anteriormente que el anillo de enteros p-ádicos $\mathbb{Z}_p$ es compacto. Probar que el grupo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ es compacto. (sugerencia: ver que es cerrado dentro del compacto $\mathbb{Z}_p^4$).

Análogamente, al mirar el valor absoluto usual, y su completación, denotamos por $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ al grupo de matrices de 2×2 con coeficientes en el cuerpo de números reales $\mathbb{R}$. Con todos estos grupos, queremos formar al grupo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, el grupo de matrices de 2×2 con coeficientes en el anillo de adèles.

Dicho grupo se puede definir como el producto directo restringido de los grupos $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ con respecto a los compactos $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. Esto es, los elementos de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ son tiras de elementos $(g_2, g_3, \ldots, g_\infty)$ donde $g_p \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ y $g_\infty \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ que satisfacen que para todos los primos p salvo finitos, $g_p \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. Sea $\{K_p\}_p$ un conjunto de subgrupos compactos donde cada $K_p \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (por ejemplo $K_p = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$) de forma tal que:

- $K_p = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ para casi todo primo p (o sea todos salvo finitos).
- El determinante $\det : K_p \to \mathbb{Z}_p^\times$ es suryectivo.

Nos interesa particularmente al tratar de estudiar las formas modulares en $S_2(\Gamma_0(N))$, los compactos $K_p(N)$ dados por

$$K_p(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p) \ : \ c \equiv 0 \pmod{N} \right\}. \tag{2.3}$$

Entonces, vale el siguiente resultado.

Teorema 10 (Aproximación fuerte)**.** Con las notaciones anteriores, la siguiente igualdad se verifica:

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ \prod_p K_p(N).$$

Demostración. Ver por ejemplo Teorema 3.2 de [Hid00] □

Luego para definir una forma automorfa en $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, tenemos que entender como se comporta en $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$, como actúa $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$, y como actúan los subgrupos compactos K_p. Si $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, lo descomponemos como $g = \gamma g_\infty k_0$, donde $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$, $g_\infty \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ y $k_0 \in \prod_p K_p$. Dada $f \in S_k(\Gamma_0(N))$, definimos $\phi_f : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) \to \mathbb{C}$ por

$$\phi_f(g) = f(g_\infty \cdot i) j(g_\infty, i)^{-k}, \text{ donde } g = \gamma g_\infty k_0.$$

El Teorema 10 nos asegura que esto da una función bien definida, dado que es fácil ver que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ \prod_p K_p = \Gamma_0(N)$. Juntándolo con la Proposición 2, tenemos:

Proposición 11. La función $f(z) \to \phi_f(g)$ da un isomorfismo entre $S_k(\Gamma_0(N))$ y el espacio de funciones ϕ en $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ que satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\phi(\gamma g) = \phi(g)$ para todo $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$.
2. $\phi(gk_0) = \phi(g)$ para todo $k_0 \in \prod_p K_p$.
3. $\phi(gr(\theta)) = \exp(ik\theta)\phi(g)$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$.
4. La función ϕ, vista como función de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ es C^∞ y satisface la ecuación diferencial
$$\Delta\phi = -\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2} - 1\right)\phi.$$
5. $\phi(zg) = \phi(g)$ para todo $z \in Z_\mathbb{A} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{smallmatrix}\right) \ : \ t \in \mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times \right\}$.
6. (Crecimiento moderado) Para todo $c > 0$ y todo conjunto compacto Ω de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, existen constantes C, N tales que
$$|\phi\left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) g\right)| \le C|a|^N.$$
7. ϕ es cuspidal, o sea
$$\int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}_\mathbb{Q}} \phi\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) g\right) dx = 0 \text{ para casi todo } g.$$

Queremos hacer dos observaciones de esta Proposición.

Observación. Si en lugar de trabajar con $S_k(\Gamma_0(N))$, permitimos que las formas tengan Nebentypus, o sea miramos formas en $S_k(\Gamma_0(N), \epsilon)$, entonces usando la relación entre caracteres de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ y los caracteres de Hecke, podemos asociarle a ϵ un carácter $\psi : \mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times \to \mathbb{C}^\times$ trivial en $\mathbb{Q}^\times$ (esto es el caso unidimensional de la correspondencia anterior), y obtenemos una función ϕ_f que satisface las relaciones anteriores, pero agregando a la acción del compacto y del centro a la acción de ψ, o sea reemplazamos 2. y 5. por

$2'$. $\phi(gk_0) = \phi(g)\psi(k_0)$.
$5'$. $\phi(zg) = \phi(g)\psi(z)$.

Observación. Sin entrar demasiado en detalles técnicos, el grupo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ por ser localmente compacto posee una medida de Haar invariante (consultar el libro [Bum97] por ejemplo para ver una descripción explícita, y en realidad al ser un grupo unimodular no es preciso aclarar si es invariante por al acción a derecha o izquierda), lo que permite integrar funciones. La definición de la medida es compatible con la identificación

$$Z_{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}} \operatorname{GL}_2(\mathbb{Q}) \backslash \operatorname{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) / K_0 K_\infty \simeq \Gamma_0(N) \backslash \operatorname{SL}_2(\mathbb{R}) / \operatorname{SO}(2),$$

donde $K_0 = \prod_p K_p(N)$ como en (2.3). Luego si queremos integrar ϕ_f, tenemos que

$$\int_{Z_{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}} \operatorname{GL}_2(\mathbb{Q}) \backslash \operatorname{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})} |\phi_f(g)|^2 dg = \int_{\Gamma_0(N) \backslash \mathfrak{h}} |f(z)|^2 y^k \frac{dxdy}{y^2} < \infty. \tag{2.4}$$

Decimos que una función ϕ en $\operatorname{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ es de cuadrado integrable si vale que $\int_{Z_{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}} \operatorname{GL}_2(\mathbb{Q}) \backslash \operatorname{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})} |\phi(g)|^2 dg < \infty$, y denotamos a este espacio por $L^2(\operatorname{GL}_2(\mathbb{Q}) \backslash \operatorname{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}))$. Lo que acabamos de ver es que ϕ_f es de cuadrado integrable. El espacio de funciones de cuadrado integrable y que además son holomorfas, en el sentido de la Proposición 11, 7. lo denotamos por $L_0^2(\operatorname{GL}_2(\mathbb{Q}) \backslash \operatorname{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}))$.

2.3. Operadores de Hecke

Ahora que podemos pensar a las formas modulares como funciones en $\operatorname{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ de cuadrado integrable, podemos definir a los operadores de Hecke como ciertos operadores de convolución en este espacio. Esta noción se generaliza fácilmente a otros cuerpos de números.

Sea p un primo tal que $p \nmid N$, con lo cual $K_p(N) = \operatorname{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. Definimos H_p como el conjunto

$$H_p = \operatorname{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \operatorname{GL}_2(\mathbb{Z}_p), \tag{2.5}$$

esto es el conjunto de todas las matrices de 2×2 con coeficientes en $\mathbb{Z}_p$ de determinante $p\mathbb{Z}_p^\times$. Notar que este es un conjunto que es invariante bajo el producto tanto a derecha como izquierda por el compacto (comparar con la sección 2.3. de las notas de M.Harris). Luego definimos el operador de Hecke $\tilde{T}(p)$ como convolucionar a derecha con la característica de H_p (en la componente p-ésima simplemente), esto es

$$\tilde{T}(p)\phi(g) = \int_{H_p} \phi(gh_p) dh_p.$$

Es bastante claro ver que si $\phi \in L^2(\operatorname{GL}_2(\mathbb{Q}) \backslash \operatorname{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}))$, entonces $\tilde{T}(p)\phi$ también es de cuadrado integrable, y además satisface las mismas propiedades de la Proposición 11. Para verificar la segunda propiedad, notar que la invariancia en todas las coordenadas salvo la p-ésima es clara. En la coordenada p-ésima, notar que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)H_p = H_p$, y la medida de Haar es invariante por traslación, así

$$\int_{H_p} \phi(gk_0h_p)dh_p = \int_{H_p} \phi(gh_p)dh_p.$$

Luego $\tilde{T}(p)$ define un operador tanto en $L^2(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}))$ como en $L^2_0(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}))$.

Lema 12. Si $f \in S_k(\Gamma_0(N))$ entonces $p^{k/2-1}\tilde{T}(p)\phi_f = \phi_{T(p)f}$.

Demostración. La idea de la demostración es mirar el método de eliminación Gaussiana para matrices de 2×2, que nos permite dar la descomposición disjunta

$$H_p = \bigcup_{i=0}^{p-1} \begin{pmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \cup \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p).$$

Como ϕ es invariante por la acción de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, y como la medida de Haar está normalizada de manera que $\mu(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)) = 1$, nos queda que

$$p^{k/2-1}\tilde{T}(p)\phi_f(g) = p^{k/2-1}\sum_{i=0}^{p-1} \phi\left(g\begin{pmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + p^{k/2-1}\phi\left(g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}\right) \tag{2.6}$$

Recordar que $\phi_f(g) = f(g_\infty \cdot i)j(g_\infty, i)^{-k}$. Sea $s_p \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ cualquiera de los $p+1$ representantes anteriores. Afirmamos que dada $k_p = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, y s_p uno de los representantes, existe un único representante $\tilde{s}_p$ tal que $\tilde{s}_p^{-1}k_ps_p \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ (este es un lindo ejercicio de matrices de 2×2). Definimos el siguiente elemento de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$:

$$(t_p)_q = \begin{cases} 1 & \text{si } q \neq p \\ \tilde{s}_p & \text{si } p = q. \end{cases}$$

Notar que este elemento no está en el compacto (en p no tiene determinante una unidad), pero el elemento $\tilde{s}_p/t_p$ (o sea poner en todas las coordenadas el mismo elemento, salvo en p, donde ponemos un 1) sí lo está. Luego, si escribimos $g = \gamma g_\infty k_0$, entonces $gt_p = \gamma\tilde{s}_p(\tilde{s}_p^{-1}g_\infty)(\tilde{s}_p^{-1}k_0t_p)$. Por el ejercicio, el último término está en el compacto (claramente lo está en todas las coordenadas salvo la p-ésima), con lo cual $\phi_f(gt_p) = f(\tilde{s}_p^{-1}g_\infty \cdot i)j(\tilde{s}_p^{-1}g_\infty, i)^{-k} = f\left(\frac{z+j}{p}\right)p^{-k/2}$. Reemplazando en (2.6), tenemos la bien conocida fórmula

$$p^{k/2-1}\tilde{T}(p)\phi_f(g) = \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1} f\left(\frac{z+i}{p}\right) + p^{k-1}f(pz).$$

$\square$

Notar que es claro que los operadores de Hecke conmutan entre ellos (por actuar en distintas coordenadas), y no es difícil ver que son autoadjuntos para el producto interno de $L^2(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}))$, con lo cual nuestra correspondencia preserva autofunciones.

2.4. Correspondencia entre formas modulares y representaciones adèlicas

Como vimos anteriormente, en $L^2(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}))$ tenemos una acción natural de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ a derecha. Esta representación se parte como una parte continua (que proviene de las series de Eisenstein) y una parte discreta, que corresponde a las formas en $L_0^2(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}))$ (i.e. las cuspidales). Si restringimos la acción regular al espacio de formas cuspidales, se puede ver que dicho operador es un operador compacto, con lo cual el espacio se parte como suma (infinita) de representaciones irreducibles, cada una de ellas con multiplicidad finita. Mas aún, Jacquet-Langlands demostraron que la multiplicidad de las representaciones irreducibles es exactamente uno.

Toda representación irreducible en $L_0^2(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}))$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ se parte como producto tensorial restringido de representaciones "locales", o sea de representaciones de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ y de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, luego es muy importante entender las representaciones de dichos grupos. Las mismas se conocen completamente, y por ejemplo se pueden ver en [Gel75], capítulo 4 (ver también las notas de M. Harris, sección 2.4.1 en adelante). La relación entre las formas automorfas y las representaciones de grupo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ está dada por la siguiente equivalencia:

- Si $f \in S_k(\Gamma_0(N))$ es autofunción para los operadores de Hecke, el subespacio generado por ϕ_f dentro de $L_0^2(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}))$ bajo la acción de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ es una representación irreducible, o sea $H_f = \pi_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})}\phi_f$ es un subespacio irreducible.
- (Casselman) Sea π una representación unitaria irreducible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. Si π es tal que aparece dentro de la representación regular a derecha de $L_0^2(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ y es tal que la representación π_∞ en la componente del infinito es una serie discreta de peso k, entonces existe un nivel N (que se puede definir a partir de las representaciones locales π_p), y una forma modular $f \in S_k(\Gamma_0(N))$ autofunción para los operadores de Hecke, tal que $\pi \simeq H_f$.

Para ver los detalles de esta correspondencia, ver el capítulo 5 de [Gel75] y las referencias que allí se mencionan.

3. *Formas de Hilbert*

3.1. Definiciones y propiedades básicas

El estudio de las formas fue introducido por David Hilbert y por Otto Blumenthal a finales del siglo XIX. Referencias estándares para su estudio son los libro [vdG88] y [Fre90], aunque las notas [Bru08] son muy amenas también. La idea es obtener análogos de dimensión mayor de cocientes del plano complejo superior. Para facilitar la exposición, nos concentraremos en el caso de formas de Hilbert para cuerpos cuadráticos reales (que fueron las primeras estudiadas), que ya poseen suficiente grado de generalidad, y así evitar el uso de índices. Al final diremos como funciona el caso general (que es totalmente análogo).

Por K denotaremos un cuerpo cuadrático real, esto es $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, donde $d > 0$ es un no cuadrado en $\mathbb{Q}$. Cualquiera de estos cuerpos tiene exactamente dos inmersiones reales, o sea dos maneras de meter al cuerpo dentro del cuerpo de números reales. Ellas están dadas por:

$$\tau_1(a + b\sqrt{d}) = a + b\sqrt{d}, \qquad \tau_2(a + b\sqrt{d}) = a - b\sqrt{d}.$$

A partir de las inmersiones τ_1 ó τ_2 podemos mirar al grupo $\mathrm{GL}_2(K)$ dentro de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Como en el semiplano complejo superior sólo actúan las matrices de determinante positivo, si Γ es un subgrupo cualquiera de $\mathrm{GL}_2(K)$, denotamos por $\Gamma^+ = \{\gamma \in \Gamma \ : \ \det(\gamma) \gg 0\}$, donde $u \gg 0$ significa que tanto $\tau_1(\nu) > 0$ como $\tau_2(\nu) > 0$.

Notar que no podemos mirar el cociente por la acción de $\mathrm{GL}_2(K)^+$ dado que para que un cociente tenga estructura de variedad, precisamos que el grupo actuando sea discreto. La manera de solucionarlo es tomar no el semiplano complejo superior, sino dos copias del mismo, y mirar la acción de $\mathrm{GL}_2(K)^+$ a través de ambas. Luego, si denotamos por $\mathcal{O}_K$ el anillo de enteros de K, tiene sentido mirar la acción de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)^+$ en $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ dada por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (z_1, z_2) = \left(\frac{\tau_1(a)z_1 + \tau_1(b)}{\tau_1(c)z_1 + \tau_1(d)}, \frac{\tau_2(a)z_2 + \tau_2(b)}{\tau_2(c)z_2 + \tau_2(d)} \right).$$

Como sucede con el caso clásico, este cociente tiene una estructura de variedad diferenciable, pero no puede ser proyectiva por no ser compacta. Para obtener una compactificación, uno puede agregar las cúspides usuales, y considerar no $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$, sino $\mathfrak{h}^2 \cup \mathbb{P}^1(K)$, y la acción de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)^+$ en dicho espacio, donde la acción de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)^+$ en $\mathbb{P}^1(K)$ está dada por el producto matricial, o sea $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)[\alpha : \beta] = [a\alpha + b\beta : c\alpha + d\beta]$.

Ejercicio 11. Recordar que todo ideal $\mathfrak{a}$ de K está generado por dos elementos de K, o sea $\mathfrak{a} = \langle \alpha, \beta \rangle$. Probar que la asignación entre $\mathbb{P}^1(K)$ y clases de ideales de K, que a $[\alpha : \beta]$ le asocia $\langle \alpha, \beta \rangle$ da una biyección entre las cúspides de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$ y el grupo de clases de ideales. Luego, el número de cúspides necesarias para compactificar el cociente depende de un invariante del cuerpo, a saber el número de clases.

La superficie que obtenemos al compactificar agregando las cúspides (llamada la compactificación de Baily-Borel), resulta una variedad algebraica proyectiva (o sea está dada por ceros de polinomios dentro de algún espacio proyectivo), pero es una variedad singular. El problema es que los puntos que pusimos para hacerla compacta, son todos singulares (porque deberíamos haber puesto cosas de codimensión 1, o sea de dimensión 1, que son curvas, no puntos). Uno puede obtener una superficie no singular mediante un proceso de “blow up” de puntos singulares, pero no nos vamos a preocupar por estos tecnicismos (ver [vdG88] para más detalles).

El problema de que pueden existir ideales no principales, no solamente afecta al número de cúspides, sino a toda la teoría de las formas de Hilbert, en esta formulación clásica. Dado un ideal $\mathfrak{b}$, definimos el grupo

$$\mathrm{GL}_2^+(\mathcal{O}_K, \mathfrak{b}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;:\; a, d \in \mathcal{O}_K, b \in \mathfrak{b}^{-1}, c \in \mathfrak{b} \right\}.$$

Estos grupos son todos maximales (¡y no conjugados si $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ pertenecen a distintas clases de ideales!), con lo cual para estudiar las formas modulares, debemos mirarlos a todos ellos. Igual que para las formas clásicas, también tenemos los subgrupos de congruencias. Dado un ideal $\mathfrak{n}$, definimos

$$\Gamma_0(\mathfrak{n}, \mathfrak{b}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\mathcal{O}_K, \mathfrak{b}) \;:\; c \in \mathfrak{n}\mathfrak{b} \right\}.$$

Vamos a denotar por $X_0(\mathfrak{n}, \mathfrak{b})$ al cociente $\Gamma_0(\mathfrak{n}, \mathfrak{b}) \backslash \mathfrak{h}^2 \cup \mathbb{P}^1(K)$. Esto tiene estructura de superficie, salvo las cúspides, y los puntos elípticos (los puntos donde hay matrices no diagonales que los tienen como puntos fijos) donde uno debería desingularizar la superficie.

Definición. Una función holomorfa $f : \mathfrak{h}^2 \to \mathbb{C}$ es una forma modular de peso $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$, donde $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ para $\Gamma_0(\mathfrak{n}, \mathfrak{b})$ si para todo $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(\mathfrak{n}, \mathfrak{b})$ vale

$$f(\gamma \cdot (z_1, z_2)) = \tau_1(\det(\gamma))^{-k_1/2} \tau_2(\det(\gamma))^{-k_2/2} \\ (\tau_1(c) z_1 + \tau_1(d))^{k_1} (\tau_2(c) z_2 + \tau_2(d))^{k_2} f(z_1, z_2). \quad (3.1)$$

Denotamos por $M_{\mathbf{k}}(\Gamma_0(\mathfrak{n},\mathfrak{b}))$ al espacio de dichas funciones.

Notar la similitud con la definición clásica, salvo que ahora al tener la función mas variables, aparecen productos de los términos $j(g,i)$ del caso unidimensional. Hay un tema no menor que llama la atención en la definición, que es que en ningún momento pedimos que la función sea holomorfa en las cúspides (que sí lo pedimos en el caso clásico). Para poder entender esto, debemos entender quién es el grupo de isotropía de la cúspide de infinito (las matrices que la fijan), y poder entender en particular el desarrollo de Fourier de las formas de Hilbert. Es fácil ver, que dicho grupo es justamente

$$\left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;:\; \varepsilon \in \mathcal{O}_K^{\times,+}, \mu \in \mathfrak{b}^{-1} \right\}.$$

Si nos olvidamos de las unidades por un momento (ellas jugarán un rol fundamental mas adelante), tenemos invariancia por el retículo $\mathfrak{b}^{-1}$, vía la identificación $\mu \to \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Pero si nuestra función es invariante por un retículo M, al considerar su expansión de Fourier, debemos mirar los caracteres de dicho retículo. Ellos están dados por las funciones $\exp(2\pi i(\nu_1 z_1 + \nu_2 z_2))$, donde $(\nu_1, \nu_2) \in M^{\perp}$, donde

$$M^{\perp} = \{\nu \in K \;:\; \mathrm{Tr}(\nu\mu) \in \mathbb{Z}\; \forall \mu \in M\},$$

esto es el dual con respecto a la forma cuadrática dada por la traza (como se vió en las notas de R. Miatello). En resumen, si $f(z_1,z_2) \in M_{\mathbf{k}}(\Gamma_0(\mathfrak{n},\mathfrak{b}))$, su expansión de Fourier es de la forma

$$f(z_1,z_2) = \sum_{\nu \in \mathfrak{b}\delta^{-1}} a_\nu \exp(2\pi i z_1 \tau_1(\nu)) \exp(2\pi i z_2 \tau_2(\nu)), \tag{3.2}$$

donde δ es el diferente de $\mathcal{O}_K$ (su dual con respecto a la forma traza anterior). Como la expansión está definida en términos de pares, la condición de holomorfía en las cúspides debería decir que si ν tiene alguna de sus dos inmersiones negativas, entonces el coeficiente a_ν es cero.

Teorema 13 (Principio de Koecher)**.** Si $f(z_1,z_2)$ es una forma de Hilbert, entonces todos los coeficientes de Fourier a_ν donde $\tau_1(\nu) < 0$ o $\tau_2(\nu) < 0$ son nulos.

El principio de Koecher dice justamente que la condición de holomorfía es automática para cualquier forma de Hilbert, y por lo tanto no es necesario agregarla. Decimos que una forma de Hilbert es *cuspidal* si el término constante de la expansión de Fourier (notar que el 0 siempre está en el dual de un retículo) es nulo en todas las cúspides. Dicho espacio lo denotamos $S_{\mathbf{k}}(\Gamma_0(\mathfrak{n},\mathfrak{b}))$.

Observación. Si el peso $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ tiene las dos coordenadas iguales, se llama un *peso paralelo*, y se dice que la forma es de peso paralelo k (estas son las formas mas interesantes desde un punto de vista geométrico de la superficie). Si el peso no es paralelo, entonces el Principio de Koecher implica que toda forma modular es automáticamente cuspidal también.

Si $f, g \in M_{\mathbf{k}}(\Gamma)$, y una de ellas es cuspidal, podemos definir un producto interno entre ellas (el producto de *Petersson*) de manera similar al caso clásico, esto es

$$\langle f, g\rangle = \iint_{\Gamma\backslash\mathfrak{h}^2} f(z_1, z_2)\overline{g(z_1, z_2)} y_1^{k_1} y_2^{k_2} \frac{dx_1 dy_1}{y_1^2}\frac{dx_2 dy_2}{y_2^2}. \tag{3.3}$$

Ejercicio 12. Ver que para la acción de $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_K)$, $\frac{dx_1dy_1}{y_1^2}\frac{dx_2dy_2}{y_2^2}$ es una medida invariante en $\mathfrak{h}^2$. Verificar que la integral recién definida converge si alguna de las dos funciones es cuspidal.

Teorema 14. El espacio vectorial $M_{\mathbf{k}}(\Gamma_0(\mathfrak{n}, \mathfrak{b}))$ tiene dimensión finita.

Existen fórmulas para calcular la dimensión del espacio de formas cuspidales (que se obtienen de aplicar el Teorema de Riemann Roch en dimensiones mayores), pero son bastante difíciles de expresar e involucran cálculos de desingularización de puntos elípticos y cúspides. Ver [vdG88] Proposición 4.1 por ejemplo para el caso en que no hay puntos elípticos.

3.2. Serie L de formas de Hilbert

Queremos poner toda la información de los coeficientes de Fourier de una forma modular en un objeto analítico que codifique su información. El problema es que hay demasiados coeficientes de Fourier, y los coeficientes de Fourier de una forma de Hilbert no son todos independientes (como en el caso clásico), sino que hay muchas relaciones entre ellos, debido a las unidades (que juegan un rol fundamental como mencionamos anteriormente). Si $\varepsilon \in \mathcal{O}_K^\times$ es una unidad, la matriz $\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(\mathfrak{n}, \mathfrak{b})$, y su acción en (z_1, z_2) está dada por $(\tau_1(\varepsilon)z_1, \tau_2(\varepsilon)z_2)$. Luego, si $f \in M_{\mathbf{k}}(\Gamma)$,

$$f(z_1, z_2) = \tau_1(\varepsilon)^{k_1/2}\tau_2(\varepsilon)^{k_2/2} f(\tau_1(\varepsilon)z_1, \tau_2(\varepsilon)z_2).$$

Si miramos la expansión de Fourier de ambos lados de la igualdad llegamos a la fórmula

$$a_{\varepsilon\nu} = a_\nu \tau_1(\varepsilon)^{k_1/2}\tau_2(\varepsilon)^{k_2/2}. \tag{3.4}$$

Denotemos por U_K^+ al conjunto de unidades de $\mathcal{O}_K$ que son totalmente positivas. Luego si $\mathbf{k}$ es paralelo y $\varepsilon \in U^+$, $\tau_1(\varepsilon)^{k/2}\tau_2(\varepsilon)^{k/2} = \mathcal{N}(\varepsilon)^{k/2} = 1$, con lo cual el coeficiente de Fourier es invariante por esta acción (que da infinitos valores de ν distintos).

Para un valor cualquiera $\mathbf{k}$, la ecuación (3.4) implica que la expresión

$$a_\nu \tau_1(\nu)^{-k_1/2}\tau_2(\nu)^{-k_2/2}$$

es invariante por la acción de U_K^+, o sea que es un número asociado a un generador totalmente positivo del ideal $\langle \nu \rangle$. Notar que el exponente elegido no es único, si cambiamos ambos exponentes por un mismo número, también queda invariante (porque los elementos de U_K^+ tienen norma 1). Para evitar problemas que dependen de la normalización, vamos a restringirnos al caso de peso paralelo.

Definimos la L-serie asociada a una forma de Hilbert f de peso paralelo como

$$L(f,s) = \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{b}\delta^{-1}/U^+ \\ \nu \gg 0}} \frac{a_\nu}{\mathcal{N}(\nu\delta\mathfrak{b}^{-1})^s} = \sum_{[\mathfrak{a}]=[\mathfrak{b}^{-1}\delta]} \frac{a_\mathfrak{a}}{\mathcal{N}(\mathfrak{a})^s}, \tag{3.5}$$

donde la suma es sobre los ideales de $\mathcal{O}_K$ en la misma clase estricta que $\mathfrak{b}^{-1}\delta$ del grupo de clases, y el coeficiente $a_\mathfrak{a}$ es cualquiera asociado a un generador totalmente positivo de dicho ideal.

Notar que la suma no involucra a todos los ideales enteros, sólo una clase del grupo de clases estricto. Para formas de peso paralelo y nivel 1, si miramos la función L completa $\Lambda(f,s) = \mathcal{D}(K)^s(2\pi)^{-2s}\Gamma(s)^2 L(f,s)$, vale

Teorema 15. La función $\Lambda(f,s)$ se extiende de manera meromorfa a todo el plano complejo y satisface la ecuación funcional

$$\Lambda(f,s) = (-1)^k \Lambda(f,k-s).$$

Demostración. Ver [Bru08], Teorema 1.44. En dichas notas, sólo se consideran matrices de determinante 1 para el ideal $\mathfrak{b} = \mathcal{O}_K$, pero mirando cualquier otro maximal, y utilizando la ecuación funcional para la matriz $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \frac{1}{B} \\ B & 0 \end{smallmatrix}\right)$, donde $B = \mathcal{N}\,\mathfrak{b}$, la misma cuenta funciona. □

Como veremos en la próxima sección, para poder estudiar los operadores de Hecke, es preciso mirar las formas modulares para un conjunto de representantes del grupo de clases estricto de K juntas. Sea $\{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_h\}$ un tal conjunto de representantes. Definimos

$$M_\mathbf{k}(\mathfrak{n}) = \bigoplus_{i=1}^{h} M_\mathbf{k}(\Gamma_0(\mathfrak{n}, \mathfrak{b}_i)). \tag{3.6}$$

Con lo cual una forma de nivel $\mathfrak{n}$ es una tupla de funciones invariantes cada una de ellas por un subgrupo de congruencias diferente. Es en este conjunto donde podremos definir la acción de los operadores de Hecke. Si $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_h) \in M_\mathbf{k}(\mathfrak{n})$, y $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_K$ es un ideal cualquiera, definimos el coeficiente de Fourier $c(\mathfrak{m}, \mathbf{f}) = a_\nu(f_i)$, donde $\mathfrak{m} = \nu\mathfrak{b}_i$, con $\nu \gg 0$.

Luego la L-serie de una forma modular de Hilbert $\mathbf{f} \in M_{\mathbf{k}}(\mathfrak{n})$ es

$$L(\mathbf{f}, s) = \sum_{\mathfrak{m}} \frac{c(\mathfrak{m}, \mathbf{f})}{\mathcal{N}\,\mathfrak{m}^s}.$$

Es claro que dicha L-serie coincide con la suma de las L-series de cada una de ellas.

3.3. Operadores de Hecke

La teoría de operadores de Hecke esta bien explicada en el artículo [Shi78] en término de cocientes dobles. La noción de cocientes dobles es el análogo discreto de la definición del conjunto H_p de (2.5), y la demostración del Lema 12 muestra como pasar de clases dobles a coclases a derecha y obtener la formulación clásica de los operadores de Hecke. A pesar de la gran utilidad de los cocientes dobles y sus propiedades, resultan un poco avanzados para un primer estudio de las formas modulares (al lector interesado le recomendamos mirar la referencia clásica [Shi94]).

Lo que vamos a hacer en cambio es dar la definición del operador de Hecke en términos de coeficientes de Fourier de funciones en $M_{\mathbf{k}}(\mathfrak{n})$ como en (3.6).

Definición. Si $\mathbf{f} \in M_{\mathbf{k}}(\mathfrak{n})$ y $\mathfrak{p}$ es un ideal primo que no divide a $\mathfrak{n}$, el operador de Hecke $T(\mathfrak{p})$ actuando en $\mathbf{f}$ corresponde a la forma modular cuya expansión de Fourier está dada por

$$c(\mathfrak{m}, T(\mathfrak{p})\mathbf{f}) = \mathcal{N}\,\mathfrak{p} c(\mathfrak{p}\mathfrak{m}, \mathbf{f}) + c(\mathfrak{m}\mathfrak{p}^{-1}, \mathbf{f}),$$

donde $c(\mathfrak{m}\mathfrak{p}^{-1}, \mathbf{f}) = 0$ si $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}$.

Notar que para calcular $T(\mathfrak{p})\mathbf{f}$, es necesario conocer no una sola componente de la forma $\mathbf{f}$, sino varias de ellas. Solamente los operadores de Hecke correspondientes a ideales principales están definidos en cada componente por separado (y definen una acción en cada $M_{\mathbf{k}}(\mathfrak{n}, \mathfrak{b})$).

Como en el caso clásico, el álgebra de operadores de Hecke con índice coprimo con $\mathfrak{n}$ es un álgebra conmutativa, y cada operador de Hecke es autoadjunto con respecto al producto de Petersson. Existe además una familia de operadores (de Atkin-Lehner) $W_{\mathfrak{p}}$ para cada primo $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{n}$, y las autofunciones para todos estos operadores son las que satisfacen una ecuación funcional. En resumen, con las definiciones correctas, las formas modulares de Hilbert se comportan de manera análoga a las formas modulares clásicas.

3.4. Interpretación automorfa

Queremos hacer el análogo al Capítulo 2 para formas de Hilbert. Un ideal primo $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_K$ define una valuación, y podemos completar K con respecto a dicha valuación. El cuerpo (completo) resultante lo denotamos $K_{\mathfrak{p}}$. Para definir los adèles necesitamos considerar todos los valores absolutos de K.

Teorema 16 (Ostrowski)**.** Si K es un cuerpo cuadrático real, todos los valores absolutos de K son:

- Los arquimedeanos dados por las inmersiones τ_1, τ_2, o sea $|x|_{\tau_i} = |\tau_i(x)|$.
- El valor absoluto no-arquimedeano $|x|_{\mathfrak{p}}$ asociado a un ideal primo $\mathfrak{p}$.

Si S es un conjunto finito de primos, los S-adèles son

$$\mathbb{A}_K^S = \prod_{\mathfrak{p}\notin S} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \times \prod_{\mathfrak{p}\in S} K_{\mathfrak{p}} \times \mathbb{R}_{\tau_1} \times \mathbb{R}_{\tau_2}.$$

Luego definimos el anillo de adèles como la unión de los S-adèles sobre todos los conjuntos finitos S. De manera análoga, definimos $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_K)$. Definamos los compactos $K_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{n})$ como en (2.3), y denotemos $K(\mathfrak{n}) = \prod_{\mathfrak{p}} K_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{n})$.

Teorema 17 (Aproximación fuerte)**.** Con las notaciones anteriores, la siguiente igualdad se verifica:

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_K) = \bigsqcup_{i=1}^{h} \mathrm{GL}_2(K) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t_i \end{pmatrix} \left(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_{\tau_1}^+ \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_{\tau_2}^+ \times K(\mathfrak{n})\right),$$

donde $t_i \in \mathbb{A}_K^\times$ corresponde al ideal $\mathfrak{b}_i^{-1}$, esto es $\mathfrak{b}_i = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(t_i(\mathfrak{p}))}$.

En el caso en que el número de clases estricto sea 1, entonces aproximación fuerte dice exactamente lo mismo que en $\mathbb{Q}$, pero en general hacen falta todas las superficies $X_0(\mathfrak{n}, \mathfrak{b})$.

Proposición 18. Hay una identificación entre

$$\mathrm{GL}_2(K)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_K)/\left(\mathrm{SO}(2)_{\tau_1} \times \mathrm{SO}(2)_{\tau_2} \times K(\mathfrak{n})\right) \leftrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma(\mathfrak{n}, \mathfrak{b}_{\mathfrak{i}})\backslash \mathfrak{h}^2.$$

Demostración. Denotemos por K_∞ al grupo $\mathrm{SO}(2)_{\tau_1} \times \mathrm{SO}(2)_{\tau_2}$ y por $M_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t_i \end{pmatrix}$. Por el Teorema de aproximación fuerte, tenemos

$$\begin{aligned}
&\mathrm{GL}_2(K)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_K)/K_\infty K(\mathfrak{n}) = \\
&\quad = \bigsqcup_{i=1}^{h} \mathrm{GL}_2(K)\backslash \left(\mathrm{GL}_2(K) M_i \,\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_\infty^+ \times K(\mathfrak{n})\right)/K_\infty K(\mathfrak{n}) \\
&\qquad = \bigsqcup_{i=1}^{h} (M_i^{-1} \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_\infty^+ K(\mathfrak{n}) M_i \cap \mathrm{GL}_2(K))\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_\infty^+/K_\infty.
\end{aligned}$$

Pero $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+_\infty$ lo podemos identificar con $\mathfrak{h}^2$ mirando la acción en el punto (i,i), y justamente el estabilizador es K_∞. Es elemental verificar que $M_i^{-1}\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+_\infty K(\mathfrak{n})M_i \cap \mathrm{GL}_2(K) = \Gamma_0(\mathfrak{n},\mathfrak{b}_i)$. $\square$

Luego podemos definir las formas automorfas de Hilbert copiando la definición clásica, y sabemos que coincide con las formas $\mathbf{f} \in M_{\mathbf{k}}(\mathfrak{n})$. Esto justifica el por qué debemos mirar tuplas de funciones en lugar de una sola de ellas.

Definición. Una *forma automorfa de Hilbert* de peso $\mathbf{k}$ y nivel $K(\mathfrak{n})$ para K es una función $\phi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_K) \to \mathbb{C}$ que satisface:

1. $\phi(\gamma g) = \phi(g)$ para todo $\gamma \in \mathrm{GL}_2(K)$.

2. $\phi(gk_0) = \phi(g)$ para todo $k_0 \in K(\mathfrak{n})$.

3. $\phi(g(r(\theta_1)_{\tau_1}, r(\theta_2)_{\tau_2})) = \exp(i(k_1\theta_1 + k_2\theta_2))\phi(g)$ para todo $\theta 1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$.

4. La función ϕ, vista como función de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+_\infty$ es C^∞ y satisface las ecuaciones diferenciales
$$\Delta\phi_{\tau_j} = -\frac{k_j}{2}\left(\frac{k_j}{2} - 1\right)\phi, \text{ para } j = 1, 2.$$

5. $\phi(zg) = \phi(g)$ para todo $z \in Z_{\mathbb{A}} = \left\{\left(\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{smallmatrix}\right) \,:\, t \in \mathbb{A}_K^\times\right\}$.

6. (Crecimiento moderado) Para todo $c > 0$ y todo conjunto compacto Ω de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_K)$, existen constantes C, N tales que
$$|\phi\left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) g\right)| \leq C|a|^N.$$

7. Además, ϕ se dice cuspidal si satisface
$$\int_{K\backslash\mathbb{A}_K} \phi\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) g\right) dx = 0 \text{ para casi todo } g.$$

Existe una biyección entre las formas automorfas de Hilbert y las formas de Hilbert, que sigue la correspondencia clásica. Además, usando las formas automorfas de Hilbert es claro como definir los operadores de Hecke, dados como un operador de convolución, y una demostración similar a la dada en el Lema 12 muestra la buena definición de dichos operadores, y sus propiedades.

3.5. Digresión de formas de Hilbert

Como ya mencionamos en reiteradas ocasiones, las formas de Hilbert son el análogo de las formas clásicas, pero para cuerpos de números totalmente reales. El trato que le hemos dado hasta acá sigue la línea original de estudio, y resulta muy fructífero para muchas aplicaciones. No obstante, el hecho de pasar de una curva (dimensión 1) a variedades de dimensión mayor, tiene sus claras desventajas. La primera de ellas es de índole computacional, dado que para calcular el espacio de formas de Hilbert es necesario trabajar con espacios de dimensión grande para los cuales es difícil calcular la cohomología (en la práctica, los métodos modernos para calcularlas se separan en dos: calcular las formas usando funciones theta, como explicado en el curso de G. Tornaría, o calcular explícitamente la cohomología de las curvas de Shimura que se introduciran en el curso de M. Harris).

Un gran problema teórico es que las formas de Hilbert también deberían tener representaciones de Galois asociadas, pero esto no es nada inmediato a partir de su definición. En el caso en que $[K:\mathbb{Q}]$ sea impar, o en que la forma de Hilbert $\mathbf{f}$ posea un primo Steinberg o supercuspidal, esto se puede hacer gracias a las curvas de Shimura (y será explicado en el curso de M. Harris). En general, la manera es mediante un proceso de aproximación p-ádico, y fue hecho por Taylor.

A la vez, si nos restringimos a formas de peso paralelo 2, estas están asociadas a formas diferenciales, pero ahora la forma diferencial $f(z_1, z_2)dz_1dz_2$ es una 2-forma diferencial de la superficie, o sea que vive en el $H^2(X_0(\mathfrak{n}, \mathfrak{b}), \mathbb{C})$. No hay ninguna construcción natural para asociarle un retículo de rango 2 a una forma modular que sea autofunción para los operadores de Hecke con autovalores racionales (como sucede en el caso clásico). Nuevamente, el uso de Curvas de Shimura nos permitirá en muchos casos poder resolver este problema también.

3.6. Caso general

A pesar de que sólo miramos formas de Hilbert para cuerpos cuadráticos reales, la misma se generaliza de manera directa a cuerpo de números totalmente real K. Estos son cuerpos de la forma $K = \mathbb{Q}[\alpha]$, donde α es raíz de un polinomio racional irreducible cuyas raíces son todas reales. A tal cuerpo podemos asociarle las llamadas *inmersiones reales*, estas son todas las maneras distintas de meter al cuerpo dentro del cuerpo de números reales, y justamente están dadas por enviar α a cualquier otra raíz de su polinomio minimal (hay justamente n de ellas, donde n es el grado del minimal de α que coincide con el grado de la extensión $[K:\mathbb{Q}]$). Ahora todas las cuentas están indexadas no por dos, sino por n parámetros, y dichos parámetros se pueden enumerar a partir de las inmersiones del cuerpo K. Notar que el peso de una forma de Hilbert está indexado por inmersiones, y no hay manera de "ordenarlas". Todo lo hecho en las secciones anteriores sigue valiendo con exactamente la misma demostración, pero hemos obviado las cuentas para evitar el uso de índices que simplemente dificultan la presentación.

Bibliografía

[Bru08] Jan Hendrik Bruinier. Hilbert modular forms and their applications. In *The 1-2-3 of modular forms*, Universitext, pages 105–179. Springer, Berlin, 2008.

[Bum97] Daniel Bump. *Automorphic forms and representations*, volume 55 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[Fre90] Eberhard Freitag. *Hilbert modular forms*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[Gel75] Stephen S. Gelbart. *Automorphic forms on adèle groups*. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1975. Annals of Mathematics Studies, No. 83.

[Hid00] Haruzo Hida. *Modular forms and Galois cohomology*, volume 69 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[Mil14] J.S. Milne. Algebraic number theory. `http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/ANT.pdf`, 2014.

[Neu92] Jürgen Neukirch. *Algebraic number theory*, volume 322 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1992. Translated from the 1992 German original and with a note by Norbert Schappacher, With a foreword by G. Harder.

[Shi78] Goro Shimura. The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms. *Duke Math. J.*, 45(3):637–679, 1978.

[Shi94] Goro Shimura. *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, volume 11 of *Publications of the Mathematical Society of Japan*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994. Reprint of the 1971 original, Kanô Memorial Lectures, 1.

[Ste12] William Stein. Algebraic number theory, a computational approach. `http://modular.math.washington.edu/books/ant/`, 2012.

[vdG88] Gerard van der Geer. *Hilbert modular surfaces*, volume 16 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[Wei95] André Weil. *Basic number theory.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the second (1973) edition.