



Exame Final de Métodos Estatísticos

Data: 01/06/2004

Duração: 3 horas

Nome: _____ N.º: _____

Curso: _____

Regime: _____

Declaro que desisto _____

As cotações deste exame encontram-se na seguinte tabela. Responda às questões utilizando o espaço reservado para o efeito. Tenha em atenção a clareza e apresentação das suas respostas.

Questão	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6 i	1.6 ii	2.1	2.2	2.3	2.4	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2	4.3	4.4	5.1	5.2	5.3	5.4
Cotação	1	0.5	0.5	0.5	1	0.5	1	1	1.5	1.5	1	1	1	1.5	1.5	0.5	0.5	1	0.5	0.5	1	1

“Eles não sabem que o sonho é uma constante da vida, tão concreta e definida como outra coisa qualquer...”

in Pedra Filosofal, de António Gedeão

Mas há outras constantes!

1. Nos laboratórios da disciplina de Mecânica são realizadas experiências com vista a determinar diferentes constantes ou parâmetros físicos. Uma dessas experiências tem como objectivo determinar o coeficiente de viscosidade de um fluido a partir do cálculo da velocidade limite de um corpo (uma esfera de aço) que se move através do fluido (com movimento rectilíneo uniforme).

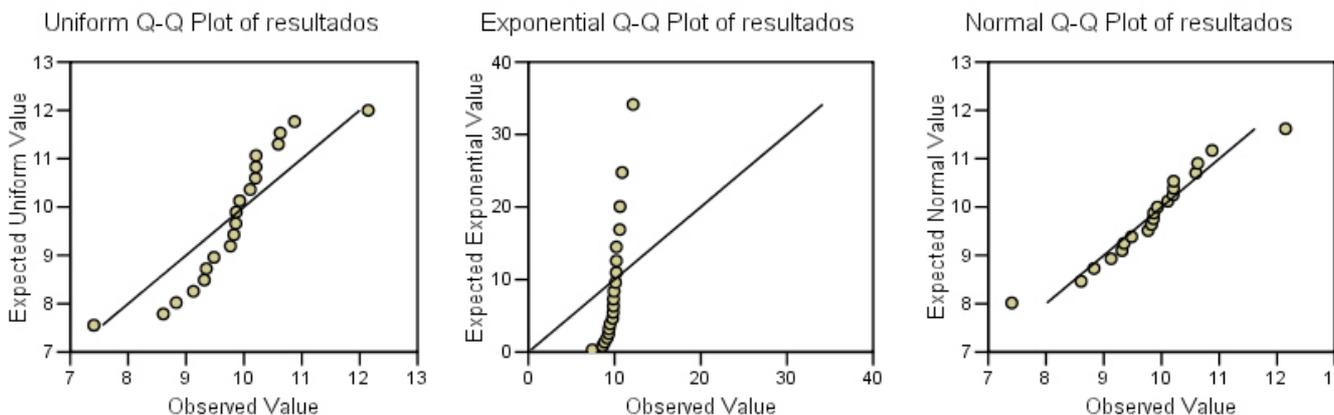
Numa turma foram recolhidos os tempos, x_i , medidos por 20 grupos para o deslocamento de uma esfera com o mesmo diâmetro e considerando distâncias iguais. Os tempos medidos (em s) e ordenados são apresentados na seguinte tabela:

7,41	8,61	8,83	9,13	9,31	9,35	9,48	9,77	9,83	9,86	9,87	9,93	10,11	10,20	10,21	10,21	10,59	10,63	10,88	12,15
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

1.1) Complete a seguinte tabela de medidas amostrais:

média	mediana	variância corrigida	desvio padrão corrigido	mínimo	máximo	amplitude	$Q_{1/4}$	$Q_{3/4}$	distância inter-quartil
9,8164		0,930					9,3234	10,2087	

1.2) Com base nos dados construíram-se os seguintes QQ-plots:



Se tivesse que escolher uma das distribuições consideradas para modelar as observações qual escolheria? Assinale com um X a resposta:

Uniforme	Expon.	Normal

1.3) Para confirmar a escolha da distribuição efectuaram-se os seguintes testes de ajustamento. Ao nível de significância de 0.05, o que pode concluir?

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

	Uniforme	Exponencial	Normal
Kolmogorov-Smirnov Z	4,249	2,388	0,634
Asymp. Sig. (2-tailed)	0,001	0,000	0,816
Exact Sig. (2-tailed)	0,002	0,000	0,976

1.4) Utilizando o método dos momentos forneça estimativas para o(s) parâmetro(s) da distribuição escolhida para modelar os dados.

1.5) Com base nas estimativas calculadas na alínea anterior determine um valor aproximado (ou seja, uma estimativa) para a probabilidade de uma medição ao acaso se encontrar entre 9 e 11, $P(9 < X < 11)$.

(Se não resolveu a alínea anterior considere que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com $\mu=10$ e $\sigma^2=1$).

1.6) O método de medição da viscosidade de um fluido a partir do cálculo da velocidade limite nem sempre funciona bem porque algumas das esferas colam à superfície dos tubos e essas medições ficam invalidadas, pois as esferas deixam de ter um movimento rectilíneo uniforme. Suponha que a probabilidade de uma medição ficar **invalidada** é 0.06. Considere uma variável aleatória, X , que conta o número de medições **válidas** num conjunto de 100 experiências.

- (i) Indique a distribuição de X .
- (ii) Calcule, utilizando o Teorema do Limite Central, um valor aproximado para $P(X > 90)$.

2. Uma forma de obter valores aproximados para a constante π consiste em medir o perímetro e o diâmetro de vários objectos circulares e dividir o perímetro pelo diâmetro. (Recorde que num círculo de perímetro p e diâmetro d se tem $p = \pi d$).

Uma turma de 16 alunos do 6º ano de escolaridade obteve uma amostra de 16 valores aproximados para π medidos pelo processo anteriormente descrito com base em objectos circulares que os alunos trouxeram de casa, tais como tachos e panelas. Suponha que as medições são bem modeladas pela distribuição Normal de parâmetros (π, σ^2) .

Construiu-se um intervalo de confiança a 95% para π tendo-se obtido]2.76725;3.51275[

2.1) Indique qual a média e o desvio padrão da amostra que os alunos obtiveram.

2.2) Qual o grau de confiança que se deve considerar por forma a obter um intervalo de confiança para π com largura 1.0325?

Nome: _____ N.º: _____

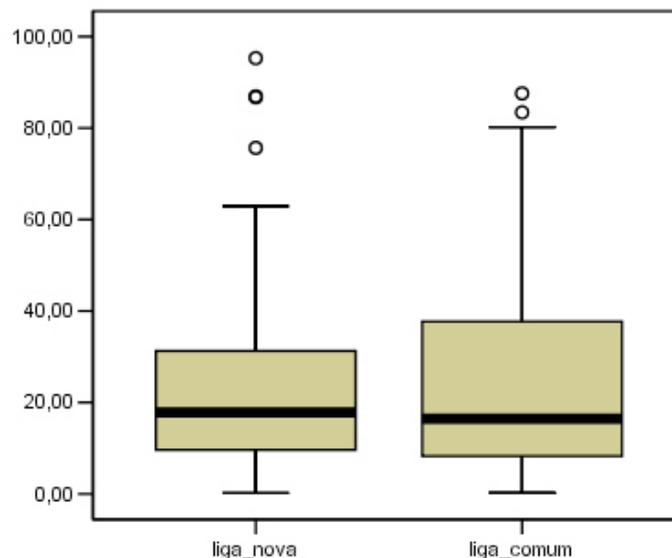
- 2.3) Teste, ao nível de significância de 0.05 e utilizando o cálculo da região crítica, as hipóteses:
(Se não resolveu as alíneas anteriores considere $s_c^2=0.49$)

$$H_0: \sigma^2 = 0.5 \quad \text{vs} \quad H_1: \sigma^2 < 0.5$$

- 2.4) Calcule o *p-value* do teste considerado na alínea anterior.

3. Na indústria automóvel ou aeronáutica procura-se desenvolver novos materiais que apresentem boas características de durabilidade e resistência mas com baixa densidade. Um conjunto de investigadores desenvolveu uma nova liga metálica que pretende ter metade da densidade da liga habitualmente usada na chapa exterior dos aviões mas com as mesmas qualidade no que respeita a resistência a choques.

Recortaram-se 20 placas de cada uma das ligas e mediu-se em circunstâncias idênticas a resistência à ruptura e a densidade de cada uma. Construiu-se o seguinte gráfico com base nos valores da resistência à ruptura por tracção (em Mpa)



Os *p-values* do teste de ajustamento de Kolmogorov-Smirnov à distribuição Normal realizados às duas amostras são 0.002 para a liga nova e 0.003 para a liga comum.

Pretendendo testar se a resistência é de facto igual para ambas as ligas no que respeita à localização efectuaram-se os seguintes testes:

T-Test

Group Statistics

TipodeLiga		N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Resist	Liga Nova	20	27,3092	27,29901	6,10424
	Liga Comum	20	28,2295	22,55182	5,04274

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper
Resist	Equal variances assumed	0,473	0,496	-0,116	38	0,908	-0,92027	7,91777	-16,94895	15,10841
	Equal variances not assumed			-0,116	36,693	0,908	-0,92027	7,91777	-16,96773	15,12718

Wilcoxon Signed Ranks Test

Ranks

		N	Mean Rank	Sum of Ranks
Resist_LC - Resist_LN	Negative Ranks	8	12,63	101,00
	Positive Ranks	12	9,08	109,00
	Ties	0		
	Total	20		

- a. Resist_LC < Resist_LN
- b. Resist_LC > Resist_LN
- c. Resist_LC = Resist_LN

Test Statistics(b)

		Resist_LC - Resist_LN
Z		-0,149
Asymp. Sig. (2-tailed)		0,881
Exact Sig. (2-tailed)		0,898
Exact Sig. (1-tailed)		0,449
Point Probability		0,014

- a. Based on negative ranks.
- b. Wilcoxon Signed Ranks Test

Sign Test

Frequencies

		N
Resist_LC - Resist_LN	Negative Differences(a)	8
	Positive Differences(b)	12
	Ties(c)	0
	Total	20

- a. Resist_LC < Resist_LN
- b. Resist_LC > Resist_LN
- c. Resist_LC = Resist_LN

Test Statistics(b)

		Resist_LC - Resist_LN
Exact Sig. (2-tailed)		0,503
Exact Sig. (1-tailed)		0,252
Point Probability		0,120

- a. Binomial distribution used.
- b. Sign Test

Mann-Whitney Test

Ranks

TipodeLiga		N	Mean Rank	Sum of Ranks
Resist	Liga Nova	20	19,80	396,00
	Liga Comum	20	21,20	424,00
	Total	40		

Test Statistics(b)

		Resist
Mann-Whitney U		186,000
Wilcoxon W		396,000
Z		-0,379
Asymp. Sig. (2-tailed)		0,705
Exact Sig. [2*(1-tailed Sig.)]		0,718
Exact Sig. (2-tailed)		0,718
Exact Sig. (1-tailed)		0,359
Point Probability		0,010

- a. Not corrected for ties.
- b. Grouping Variable: TipodeLiga

3.1) Indique, justificando, qual destes testes escolheria para o problema em causa.

3.2) Uma vez que se receia que a nova liga tenha resistência inferior à liga comum, diga para que níveis de significância é que se rejeita a hipótese nula de igualdade de resistência à ruptura (média ou mediana) a favor duma maior resistência na liga comum. (Não se esqueça de indicar o valor do *p-value* do teste que está a efectuar).

3.3) No que respeita aos valores da densidade, um estudo prévio das amostras permitiu concluir que as populações de onde foram retiradas podem ser caracterizadas através de distribuições Normais. Sejam μ_N e σ_N^2 a média e a variância da distribuição dos valores de densidade da liga nova e μ_C e σ_C^2 os respectivos parâmetros respeitantes à liga comum.
Pretende-se testar

$$H_0: \mu_C = 2\mu_N \quad vs \quad H_1: \mu_C \neq 2\mu_N$$

Supondo que as variâncias σ_N^2 e σ_C^2 são conhecidas, proponha uma estatística de teste a utilizar e indique a sua distribuição sob validade de H_0 .

4. A aceleração da gravidade, g , é um parâmetro físico que pode ser determinado através de diferentes métodos, tais como o estudo do movimento de um corpo num plano horizontal ou num plano inclinado ou o estudo de um pêndulo balístico. Nos laboratórios de Mecânica estes e outros métodos são utilizados para estimar g . Para cada um dos métodos utilizados foram realizadas várias medições e no final foi comparado o desempenho (ou precisão) dos diferentes métodos através da realização de uma análise de variância (ANOVA), planeamento equilibrado e completamente aleatorizado:

ANOVA

valores

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	66,480	3	22,160	0,01
Within Groups	80		
Total			

4.1) Complete a tabela.

4.2) Quantos métodos alternativos foram comparados?

4.3) Quantas observações foram feitas para cada método?

4.4) Quais são os níveis de significância para os quais se conclui que os métodos conduzem a resultados semelhantes?

5. Da comparação dos vários métodos alternativos para estimar a aceleração da gravidade chegou-se à conclusão que o estudo do movimento de um corpo num plano inclinado, a partir do repouso, é um método que fornece resultados razoáveis. A expressão teórica que permite calcular g pressupõe uma relação linear entre o deslocamento do corpo e o quadrado do tempo que o corpo demora a percorrer essa distância num plano inclinado, $x-x_0=0,5.g.\text{sen}\theta.t^2$.

Transformando adequadamente as variáveis envolvidas nesta relação podemos considerar a seguinte relação linear $Y=g.z$

onde

$$Y = x - x_0 \quad \text{e} \quad z = 0,5.\text{sen}\theta.t^2$$

Numa experiência em que se tentou minimizar os erros experimentais foram medidos 20 pares de valores de deslocamento em função do quadrado do tempo e foi realizada uma análise de regressão linear às variáveis transformadas y e z . Considere que são válidos os pressupostos de aplicação do modelo de regressão e que a tabela obtida nessa regressão é a seguinte:

Coefficients(a)

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	-,003	,002		-1,669	,112
	z	9,846	,032	1,000	310,396	,000

a Dependent Variable: y

5.1) Poderá considerar que a ordenada na origem não é significativamente diferente de zero aos níveis usuais de significância 1, 5 e 10%?

5.2) O resultado da alínea anterior surpreende-o? Porquê?

5.3) Sabendo que muitos resultados experimentais vêm afectados de erros de leitura e erros sistemáticos de realização, será possível obter num laboratório de ensino um valor para g que se aproxime do valor esperado para a aceleração da gravidade à nossa latitude? Considerando esse valor $g = 9,8\text{m/s}^2$ e baseando-se no intervalo de confiança a 95% que se obtém para o declive, $IC_{0,95} =]9.779 ; 9.912[$, teste ao nível de significância de 5%, as hipóteses

$$H_0: g = 9.8 \quad \text{vs} \quad H_1: g \neq 9.8$$

5.4) Estabeleça a correspondência entre os seguintes intervalos de confiança a 95% colocando a letra respectiva em cada um dos espaços em branco.

A:]0.190 ; 0.197[B:]-0.008 ; 0.001[C:]0.183 ; 0.204[D:]9.779 ; 9.912[

	Intervalo de confiança para b_0
	Intervalo de confiança para b_1
	Intervalo de confiança a 95% para o valor médio quando $z=0.02$
	Intervalo de confiança a 95% para uma observação futura quando $z=0.02$