
Probabilidade

Experiências aleatórias

Experiências aleatórias

- **Acontecimento:** Qualquer coleção de resultados de uma experiência.
- **Acontecimento elementar:** Um resultado que não pode ser simplificado ou reduzido.
- **Espaço de resultados – Ω :** Constituído por todos os acontecimentos elementares.

Probabilidade

- P - denota a probabilidade.
- A , B , e C - denota acontecimentos específicos.
- $P(A)$ - denota a probabilidade de ocorrer o acontecimento A .

Cálculo de probabilidades: conceito clássico

- Suponha que uma experiência é composta por n acontecimentos elementares distintos, em que cada um tem a *mesma chance* de ocorrer. Se o acontecimento A pode ocorrer em k desses n acontecimentos elementares, então

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{n}^\circ \text{ de casos favoráveis a } A}{\text{n}^\circ \text{ de acontecimentos elementares distintos}}$$

Cálculo de probabilidades: conceito clássico

- No cálculo do número de vezes que A pode ocorrer, ou do número total de acontecimentos elementares (todos os casos possíveis), recorre-se muitas vezes ao cálculo combinatório:
 - Arranjos com repetição
 - Arranjos sem repetição
 - Permutações
 - Combinações

Cálculo de probabilidades: conceito frequencista

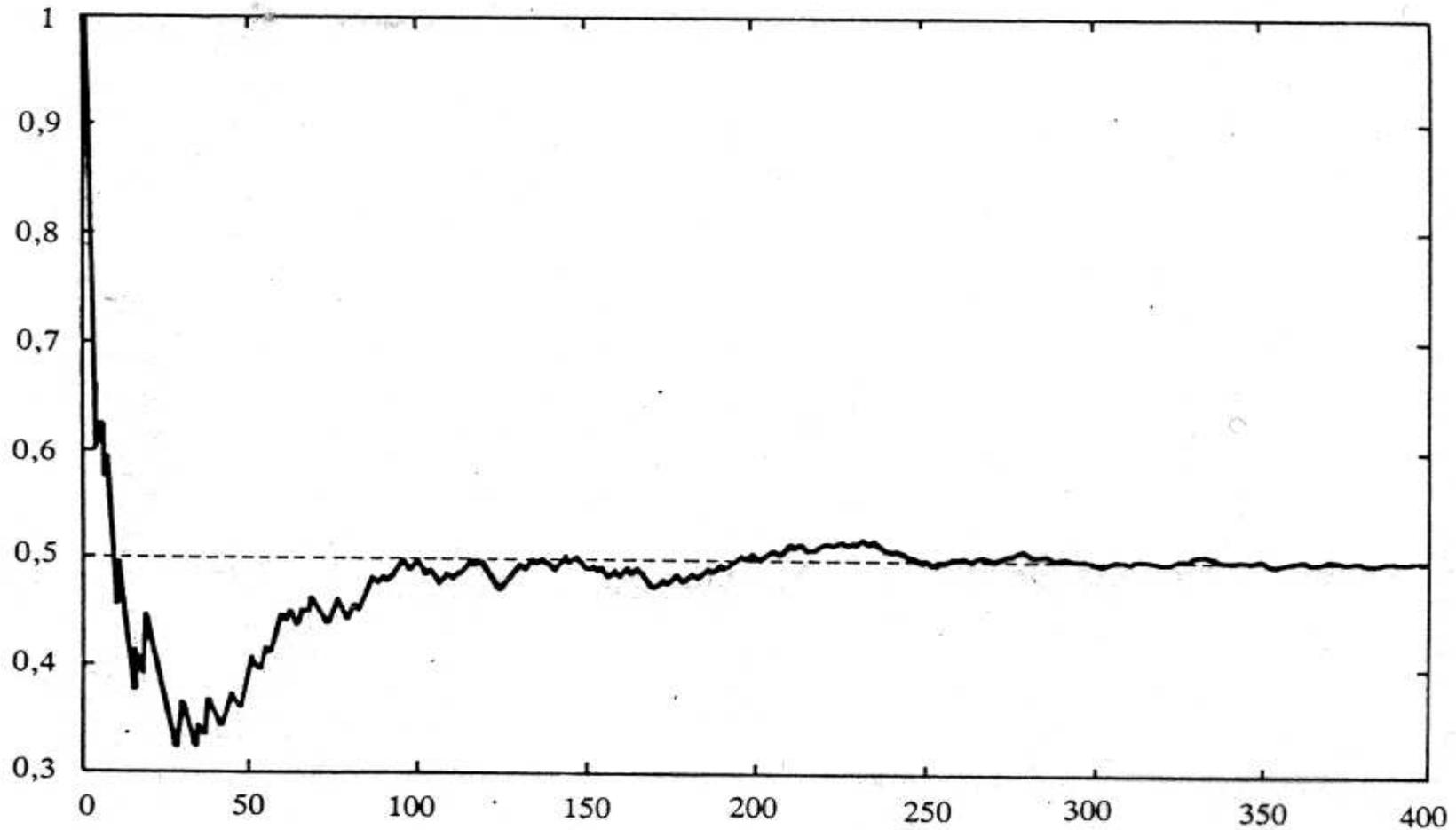
Realize (ou observe) uma experiência um grande n° de vezes, e conte o n° de vezes em que ocorreu o acontecimento A . Baseado nestes resultados, $P(A)$ é *estimada* por

$$P(A) = \frac{\text{n}^{\circ} \text{ de vezes que } A \text{ ocorreu}}{\text{n}^{\circ} \text{ de experiências realizadas}}$$

Lei dos grandes números

- Quando uma experiência é repetida um grande n° de vezes, o valor da frequência relativa de um acontecimento tende a se aproximar do valor da verdadeira probabilidade.

Estabilização das frequências relativas

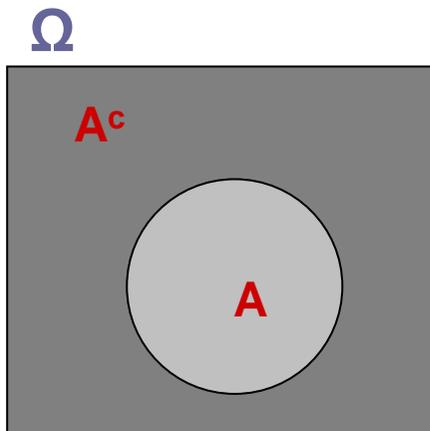


Valores das probabilidades

- A probabilidade de um acontecimento impossível é 0 (zero).
- A probabilidade de um acontecimento certo é 1.
- $0 \leq P(A) \leq 1$ para qualquer acontecimento A .

Acontecimentos complementares

- O complementar do acontecimento A , denotado por A^c , consiste em todos os acontecimentos nos quais o acontecimento A *não* ocorre.

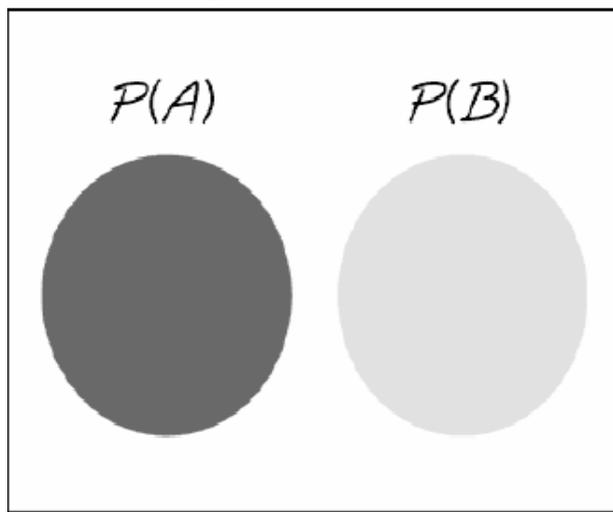


$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

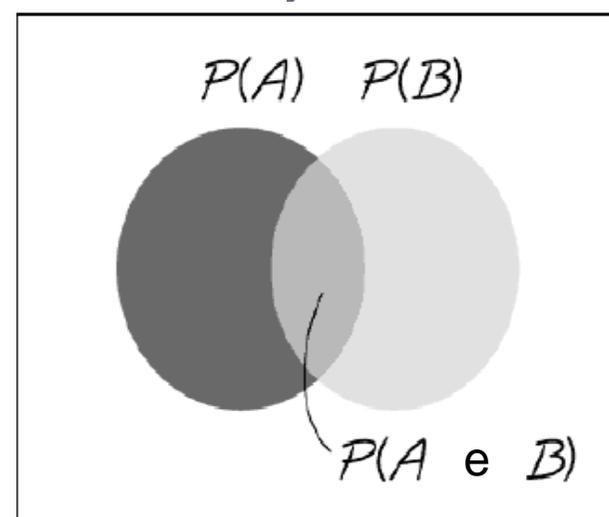
Acontecimentos disjuntos

- Os acontecimentos A e B são disjuntos (ou mutuamente exclusivos) se não podem ocorrer em simultâneo.

Acontecimentos
disjuntos



Acontecimentos
não disjuntos

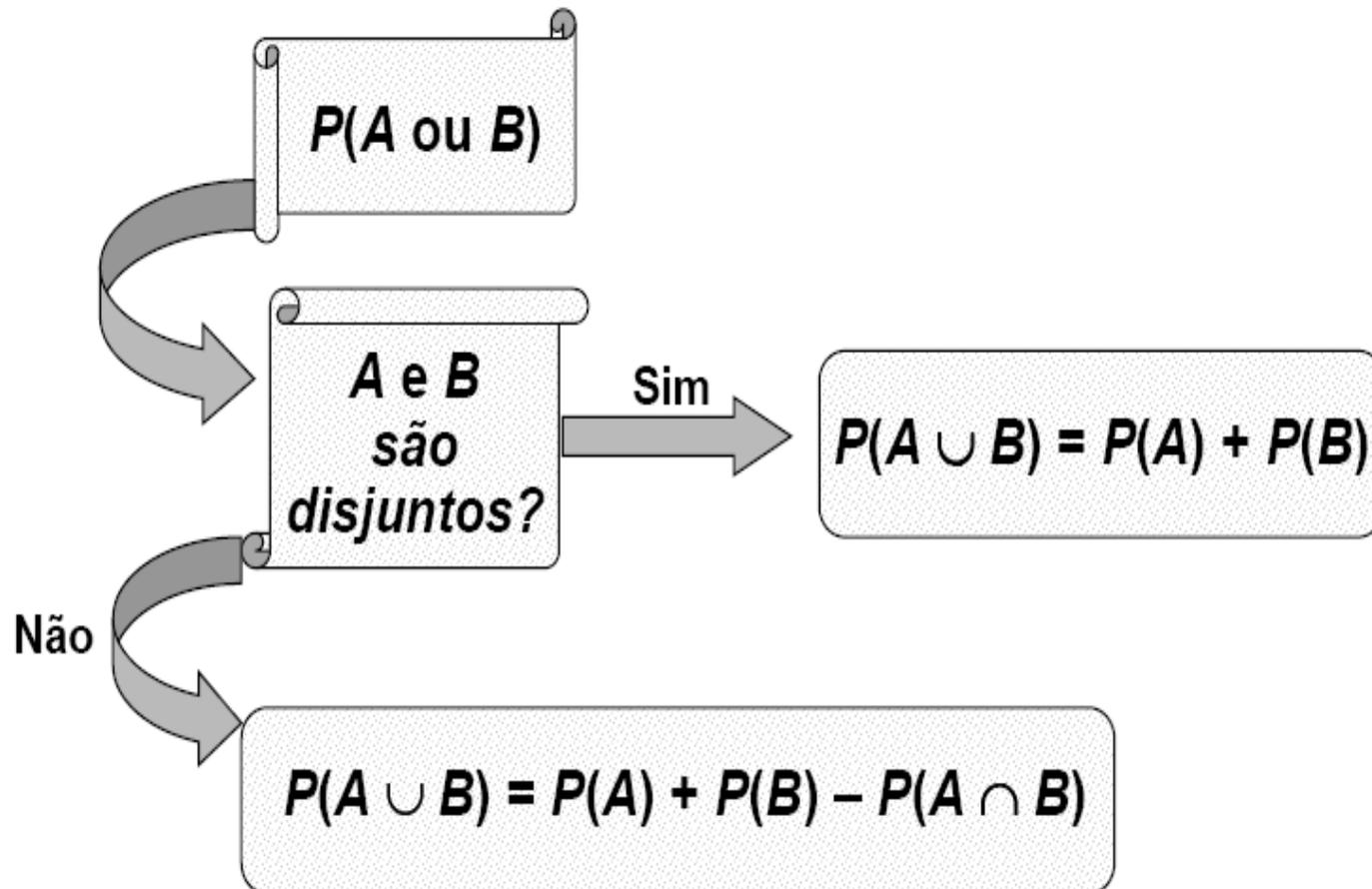


Reunião de acontecimentos

$$P(A \text{ ou } B) = P(A \cup B) =$$

= P (o acontecimento A ocorre ou o acontecimento B ocorre ou ambos ocorrerem)

Reunião de acontecimentos



Intersecção de acontecimentos

$$P(A \text{ e } B) = P(A \cap B)$$

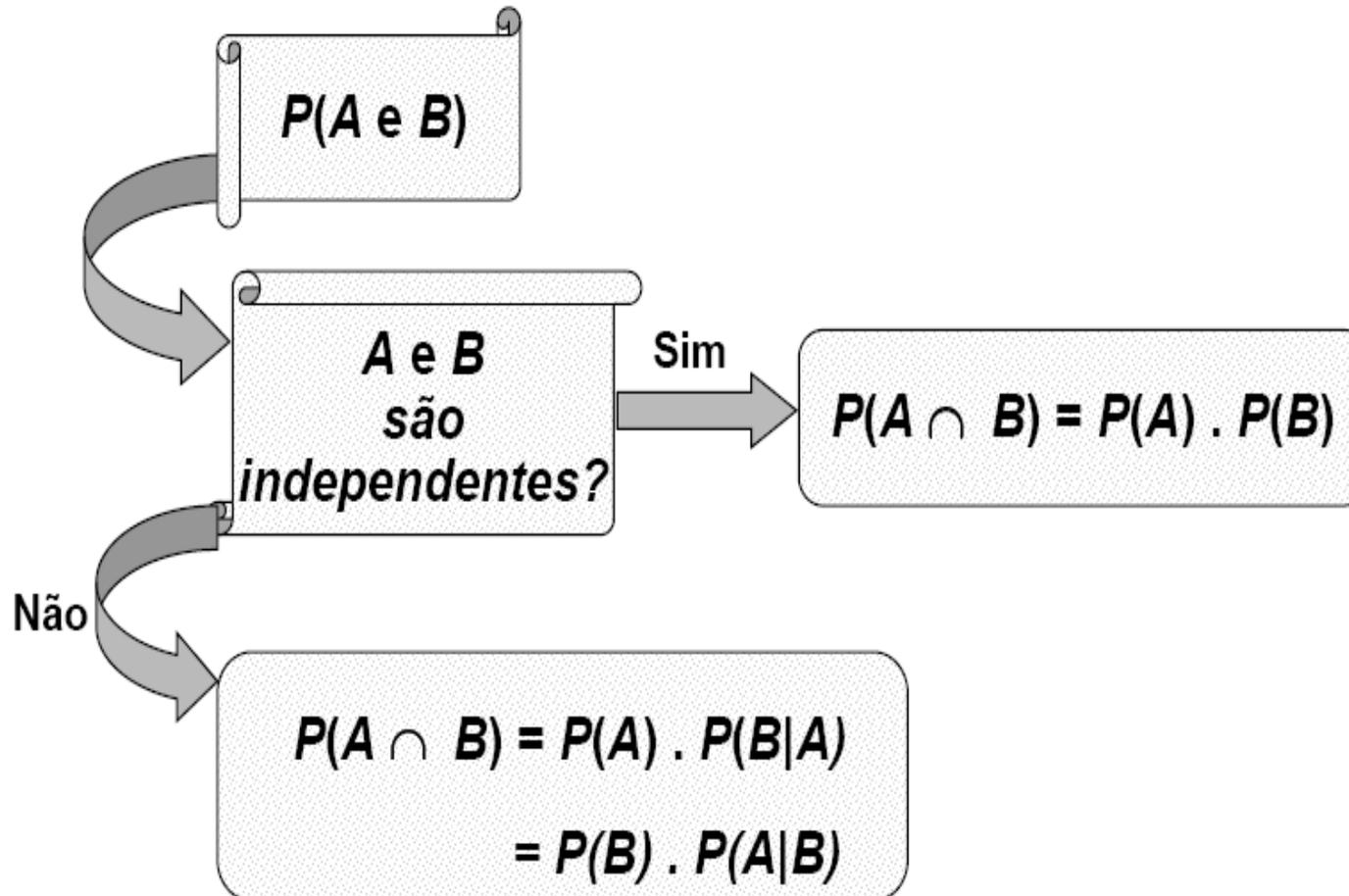
= P (o acontecimento A ocorre e o acontecimento B também ocorre)

Probabilidade condicionada

- $P(B|A)$ representa a probabilidade de o acontecimento B ocorrer após o acontecimento A ter ocorrido (lê-se $B|A$ como “ B dado A .”)

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Intersecção de acontecimentos



Resumindo

- Na regra da probabilidade da reunião de acontecimentos, a palavra “ou” em $P(A \text{ ou } B)$ sugere adição. Adicione $P(A)$ e $P(B)$, mas de tal forma a que cada acontecimento seja considerado apenas uma vez.
- Na regra da probabilidade condicionada, a palavra “e” em $P(A \text{ e } B)$ sugere multiplicação. Multiplique $P(A)$ e $P(B)$, mas certifique-se de que a probabilidade do acontecimento B tem em conta o facto de que o acontecimento A já ocorreu.

Exemplo

- Determine a probabilidade de um casal com 3 filhos ter pelo menos uma menina. Considere que a probabilidade de nascer menina é a mesma do que a probabilidade de nascer rapaz e que o sexo de uma criança é independente do sexo dos irmãos.

Exemplo: resolução

- A = “o casal ter pelo menos uma menina, de entre os 3 filhos”.
- Identifique o acontecimento complementar de A .
 A^c = “o casal não ter pelo menos uma menina, de entre os 3 filhos” = “os 3 filhos são rapazes” = “rapaz e rapaz e rapaz”
- Determine a probabilidade do complementar: $P(A^c) = P(\text{rapaz e rapaz e rapaz}) = 0.5 \times 0.5 \times 0.5 = 0.125$
(porque os acontecimentos são independentes a probabilidade conjunta é o produto das probabilidades individuais)
- Determine a probabilidade de A
 $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0.125 = 0.875$

Exemplo:

Num inquérito sociológico respeitante à importância atribuída à língua portuguesa dada pelos alunos (AL), pais (PA), professores (PR) e trabalhadores (TR), os resultados foram os seguintes:

	<i>MPI</i>	<i>PI</i>	<i>I</i>	<i>MI</i>
<i>AL</i>	57	269	1253	1278
<i>PA</i>	6	38	254	297
<i>PR</i>	3	33	214	330
<i>TR</i>	4	7	204	268

Seja o acontecimento $A = a \text{ pessoa seleccionada é um aluno}$ e o acontecimento $B = a \text{ pessoa seleccionada respondeu I}$

- $P(A) = \frac{57+269+1253+1278}{4515} = 0.63;$
- $P(B) = \frac{1253+254+214+204}{4515} = 0.42;$
- $P(A \cap B) = \frac{1253}{4515}.$

Admitamos que só estamos interessados em analisar as respostas dos alunos. Dispondo desta informação, qual é a probabilidade de que a resposta de um aluno, escolhido ao acaso seja I ?

$$P(B|A) = \frac{1253}{2857} = 0.43.$$

Exemplo:

- Consideremos a experiência aleatória que consiste em tirar ao acaso uma carta de um baralho de 52 cartas. Seja A o acontecimento “*saída de copa*” e B o acontecimento “*saída de figura*”.

São A e B acontecimentos independentes?

Exemplo: resolução

- São independentes se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = \frac{3}{13} \times \frac{13}{52}$$

$$P(A)P(B) = \frac{13}{52} \times \frac{12}{52} = \frac{3}{52}$$

Probabilidade

Distribuições de probabilidade
Variáveis aleatórias

Distribuições de probabilidades

- As Distribuições de Probabilidade descrevem o que *provavelmente* acontecerá em vez de o que realmente aconteceu.
- Dito de outra maneira, as distribuições de probabilidades descrevem as populações e a Estatística Descritiva descreve as amostras observadas.

Variáveis aleatórias

- Uma variável aleatória é uma variável (usualmente representada por X) que toma um certo valor numérico, determinado pelo acaso, de cada vez que a experiência é realizada. A variável aleatória associa números aos acontecimentos do espaço dos possíveis.
- Uma distribuição de probabilidade permite calcular a probabilidade correspondente a cada valor ou conjunto de valores da variável aleatória.

Variáveis discretas e contínuas

- Uma variável aleatória discreta toma um n^0 finito ou infinito numerável de valores.
- Uma variável aleatória contínua toma um n^0 infinito não numerável de valores, os quais podem ser associados com medidas numa escala contínua.

Variáveis discretas

- Ficam completamente definidas por qualquer uma das seguintes funções:

- **Função (massa) de probabilidade**

$$f(x) = P(X=x), \text{ para todo o } x \text{ possível}$$

(X representa a variável aleatória e x um valor que a variável assume)

- **Função de distribuição**

$$F(x) = P(X \leq x), \text{ para todo o } x \text{ real.}$$

Notar que $F(x) = \sum P(X=x_i)$ para todo o $x_i \leq x$. $F(x)$ representa a probabilidade acumulada até x.

Variáveis discretas

População

Amostra

$f(x)$



Frequência relativa

$F(x)$



Frequência relativa
acumulada

Exemplo:

- Seja X o número de filhas (raparigas) de um casal com 4 filhos. Consideremos que a probabilidade de nascer menina é igual à de nascer menino e que cada nascimento é independente dos restantes.
- X é uma variável aleatória que pode assumir os valores 0, 1, 2, 3 e 4.

Exemplo:

- $P(X=0)=f(0)=P(\text{rapaz e rapaz e rapaz e rapaz})=0.5^4 = 0.0625$
- $P(X=1)=f(1)=P(\text{"rapariga e rapaz e rapaz e rapaz" ou "rapaz e rapariga e rapaz e rapaz" ou "rapaz e rapaz rapariga e e rapaz" ou "rapaz e rapaz e rapaz e rapariga" })= 4 \times 0.5 \times 0.5^3 = 0.25$
- $P(X=2)=f(2)=P(\text{dois filhos serem rapazes e os outros dois raparigas})=\dots= {}^4C_2 \times 0.5^2 \times 0.5^2 = 0.375$
- $P(X=3)=f(3)=\dots=4 \times 0.5^3 \times 0.5 = 0.25$
- $P(X=4)=f(4)=P(\text{rapariga e rapariga e rapariga e rapariga})=0.5^4 = 0.0625$

Exemplo:

- Neste caso podemos resumir escrevendo

$$P(X=x)=f(x)= {}^4C_x 0.5^x \times 0.5^{4-x}, x=0,1,2,3,4.$$

- Também podemos calcular outras probabilidades, por exemplo a probabilidade de o casal ter no máximo 2 filhas.

$$P(X=0 \text{ ou } X=1 \text{ ou } X=2) = P(X \leq 2) = F(2) = f(0)+f(1)+f(2)=0.0625+0.25+0.375=0.6875$$

Parâmetros de uma variável discreta

■ $\mu = \Sigma[x \cdot f(x)]$ Média

■ $\sigma^2 = \Sigma [(x - \mu)^2 \cdot f(x)]$ Variância

■ $\sigma = \sqrt{\Sigma [(x - \mu)^2 \cdot f(x)]}$ Desvio Padrão

Parâmetros de uma variável discreta

- O valor médio de uma variável aleatória X é também designado por **valor esperado** e representado por $E[X]$

$$E[X] = \mu = \sum [x \cdot f(x)]$$

- A variância de uma variável aleatória X é também representada por $\text{Var}[X]$

$$\text{Var}[X] = \sigma^2 = \sum [(x - \mu)^2 \cdot f(x)]$$