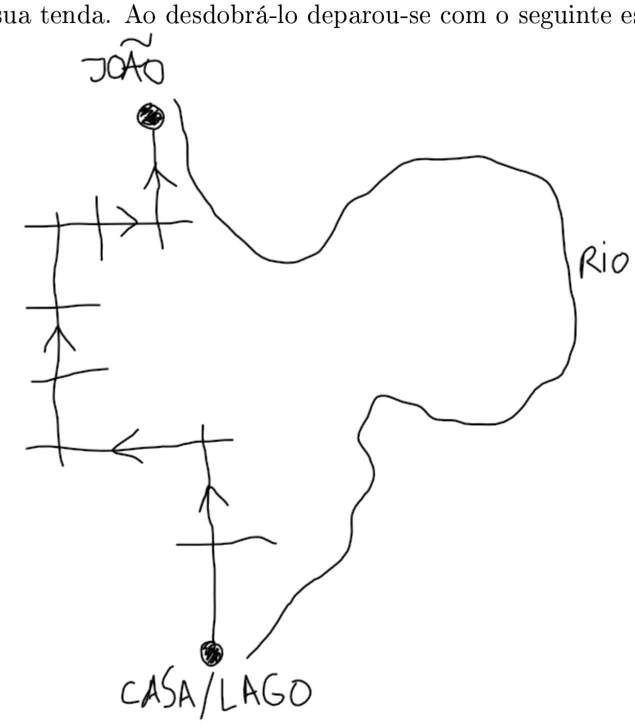
II. Inverter, compor e trocar (ou não)*

António Caetano

Projeto MATEAS (CIDMA†) e DMat-UA

Quando João saiu da sua tenda de manhã já o Sol ia alto e o resto do acampamento havia sido levantado. Tinha ficado pendurada até noite dentro a jogar no seu portátil e a comentar nas redes sociais suas prediletas. Na verdade, só tinha parado porque a bateria se tinha esgotado. Aliás, esse era um problema que tinha de resolver, já que não descobrira nas redondezas nenhuma tomada que pudesse usar para recarregar a bateria...

Surpreendida por a terem deixado sozinha, olhou em redor à procura de alguma explicação e reparou num pedaço de papel pendurado do lado de fora da sua tenda. Ao desdobrá-lo deparou-se com o seguinte esquema:



*Versão de 29 de agosto de 2016. Este trabalho está licenciado sob a Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-SemDerivações 4.0 Internacional. Para ver uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/.

†O CIDMA é financiado pela FCT através do projeto UID/MAT/04106/2013.

Claramente, o esquema tinha sido ali deixado propositadamente para que João o encontrasse, logo era a chave para reencontrar o mestre, o qual, como dera para perceber no dia anterior, gostava de jogos. Assim, o facto de não ser evidente como aquele esquema devia ser interpretado não a surpreendeu.

Enquanto comia alguma coisa foi pensando no assunto. Parecia tratar-se de uma espécie de mapa indicando como, a partir de um sítio identificado como casa/lago, se podia chegar até ao local onde a João se encontrava. Ou seja, parecia um mapa feito para alguém a encontrar, e não um mapa para ela encontrar o mestre. A menos que... Só podia ser: aquele esquema tinha sido usado anteriormente pelo mestre para se deslocar para o local onde tinha montado o acampamento. Quer dizer que o ponto de partida devia ser o local onde o mestre habitualmente vivia, e portanto o que havia a fazer era usar o mapa para se deslocar em sentido contrário ao indicado pelas setas!

Havia de facto um trilho que cruzava o local onde tinha estado o acampamento, mas como saber em que sentido seguir?

“Ah, o riacho, que deve ser o risco identificado como rio no esquema, fica à direita de quem chega, logo fica à esquerda de quem parte, não é?... O melhor é virar o mapa de pernas para o ar...”

Após ter arrumado os seus pertences na mochila fez-se ao caminho, seguindo pelo trilho no sentido que deixava o riacho do lado esquerdo. Foi reparando que nem as distâncias estavam à escala nem os trilhos na realidade eram tão retilíneos como no mapa, mas de resto não teve dificuldades em seguir o esquema em sentido inverso, virando para o lado correto em cada cruzamento onde o mapa lhe indicava que tinha de mudar de direção. Não tinha ainda passado meia hora quando, após vencer uma lomba, vislumbrou um lago a algumas dezenas de metros e uma casa construída parcialmente sobre o mesmo. Se alguma dúvida tivera de que tinha chegado à casa/lago assinalados no mapa, rapidamente desaparecera ao reconhecer o mestre junto à casa, em posição de meditação no alpendre sobre o lago.

Ao acercar-se do mestre reparou que este tinha à sua frente, poisados no chão, um pequeno quadro preto e alguns pedaços de giz. Tecnologia do século passado, pensou a João, enquanto se sentava em frente ao mestre, deixando o quadro preto entre os dois:

— Pregou-me um susto, mestre...

— Eu sabia que conseguirias resolver o enigma. Diz-me o que aprendeste com ele?

— A seguir um caminho ao contrário?

— Espero que mais do que isso. Qual a relação com a resolução de uma equação?

João não estava mesmo à espera de tal pergunta. Após pensar um bocado, arriscou:

— Bom, tal como numa equação havia uma incógnita, que neste caso era este local, a descobrir.

— Sim, e o que o mapa te dizia era como chegar do local incógnito a um local conhecido, que era onde estavas, de modo que o que fizeste foi seguir o caminho inverso do indicado.

O mestre pegou num pedaço de giz, preparando-se para escrever no quadro preto. João pensou que talvez fosse melhor mudar de posição, para não ficar a ver de pernas para o ar aquilo que o mestre iria escrever, mas ficou de boca aberta ao aperceber-se que o mestre escrevia (e com que destreza!) ele próprio de pernas para o ar, de modo a que João pudesse perceber sem esforço aquilo que estava a ser escrito. Enquanto isso, João sacara dos seus caderno e lápis, para poder tomar notas. O mestre continuou:

— É exatamente o que se faz para determinares a incógnita x por exemplo da equação $x + 5 - 2 + 3 = 10$: o que fazes é a partir do 10 seguir o caminho inverso: $10-3+2-5$ tem que dar o valor de x, já que subtrair 3 é o contrário de adicionar 3, etc.. Neste caso poderias também ter começado por fazer as contas $5 - 2 + 3$ e escrever a equação na forma equivalente $x + 6 = 10$, de modo que para determinares o valor de x bastaria calcular $10 - 6$, o que daria $x = 4$ de um modo mais rápido.

— Interessante! Mas essa era fácil, mestre. Posso aplicar o mesmo princípio por exemplo em... Deixe-me pensar... Por exemplo

$$\frac{2(x+7)-9}{3} = 4\,?$$

João tinha escrito esta equação no seu caderno e agora mostrava-a ao mestre.

— Claro, desde que percebas a ordem das operações. Tal como no caso do mapa, a primeira operação a inverter é a última operação indicada para se chegar ao valor final, que neste caso é 4.

— As operações a partir do x são, por ordem,

- adicionar 7,
- multiplicar por 2,
- subtrair 9,
- dividir por 3.

Logo para achar o x pelo processo sugerido calculo

$$\frac{4 \times 3 + 9}{2} - 7 = \frac{21}{2} - 7 = 10,5 - 7 = 3,5.$$

Suponho que dê o mesmo que pelo processo aprendido no Ensino Básico.

— Dá. Aliás, trata-se essencialmente do mesmo processo, embora provavelmente te tenhas habituado a mnemónicas sobre o que fazer quando se passa uma parcela, um fator ou um divisor para o outro lado da equação. Podes continuar a fazer como estás habituada, mas é bom lembrares-te do **princípio da inversão** aqui invocado, pois é um princípio mais básico, que não só permite recuperar essas mnemónicas (em caso de esquecimento) como é também um princípio fundamental em matemática: há muitos problemas que passam por se resolver uma equação, por não ser fácil aceder diretamente à incógnita, e inverter as operações pela ordem inversa é, à falta de melhor, um processo a ter sempre em mente.

— Mas, por exemplo, como aplicar esse princípio para resolver uma equação mais complicada?... Digamos como...

$$e^{x-2} = 6.$$

— Qual é a ordem das operações, desde o x até ao 6?
— Ora...

- Primeiro subtrair 2.
- Depois... Ãããã... Calcular o e elevado ao que der no passo anterior?

— Dito dessa maneira é capaz de complicar. Podes descrever a última operação como calcular a exponencial natural. Qual é a operação inversa dessa?
— Calcular o logaritmo natural ln.
— E então?
— Então, começando por inverter a última operação indicada, $x = \ln 6 + 2$. Posso pegar na calculadora para ver quanto dá?
— Deixa estar: para o efeito da nossa conversa a expressão que indicaste chega.

João ficou pensativa por momentos. Via-se que procurava mais um exemplo onde testar o princípio da inversão:
— E se for $2x^2 + 3x - 5 = 0$? A incógnita x aparece em dois sítios, por isso como é que estabeleço a ordem das operações? Parece que tenho de simultaneamente elevar o x ao quadrado e multiplicá-lo por 3!
— Boa questão. Não é evidente como proceder aqui usando o princípio da inversão, e no entanto deves lembrar-te que para este tipo de equações existe uma fórmula resolvente, que permite dizer neste caso que

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times (-5)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \vee x = 1.$$

Mas se procurares por uma demonstração dessa fórmula resolvente em abstrato verás que a equação inicial é modificada, com a ajuda de regras conhecidas, de modo a obter-se uma equação equivalente onde se pode usar o princípio da inversão. Ou seja, também aqui o princípio da inversão está subjacente ao método de resolução, embora na prática seja mais fácil utilizar logo a fórmula resolvente conhecida, concretizando para os coeficientes concretos em causa em cada caso.
— Quer dizer que com certos truques consigo fazer com que apareça só um x na equação e que depois já é possível estabelecer a ordem das operações na equação?
— É isso mesmo.
— Não estou a ver como. Poderia explicar melhor?
— Esta não é a altura mais adequada, para não perder o fio à meada do que queria discutir hoje contigo. Digo-te apenas que tem a ver com a técnica de completar o quadrado e com casos notáveis da multiplicação, de modo que mais tarde poderás fazer bom uso da Internet pesquisando por essas frases e também

por resolução de equações do segundo grau. A propósito, essas técnicas, e as próprias equações do segundo grau, ser-nos-ão úteis noutras situações, por isso é conveniente refrescares a tua memória a esse respeito.

A palavra Internet na boca do mestre soou estranha à João. O que saberia ele das tecnologias do século XXI?... E com estes pensamentos em mente foi um saltinho até se lembrar de que precisava de carregar a bateria do seu portátil. Olhou em redor e ficou descansada, pois no próprio alpendre onde se encontrava viu uma tomada elétrica. Entretanto o mestre continuara:

— Gostaria de chamar ainda a tua atenção para duas ou três coisas. Deixa-me ver aí o mapa que usaste para vir aqui ter.

O mestre desdobrou o mapa sobre uma parte do quadro preto e de modo a que ficasse direito para si e continuou, gesticulando sobre o mesmo:

— Uma delas é o facto de o caminho indicado no mapa (assim como o caminho inverso que seguiste) ser naturalmente composto por troços mais simples. Por exemplo, se precisasses de indicar verbalmente a alguém como seguir esse caminho, sem teres um mapa disponível, as instruções que darias seriam do seguinte género:

- identificar o sentido inicial e seguir até ao 2.º cruzamento,
- virar à esquerda,
- seguir até ao 1.º cruzamento,
- virar à direita,
- seguir até ao 3.º cruzamento,
- virar à direita,
- seguir até ao 2.º cruzamento,
- virar à esquerda,
- seguir até ao destino, não passando por mais nenhum cruzamento.

Este tipo de construções, por **composição** de ações ou de operações, é também habitual em matemática, para se obterem objetos mais complicados a partir de objetos mais simples. Muitas vezes com o objetivo de ir em sentido contrário e reduzir a complexidade da resolução de um problema mais complicado: se este puder ser decomposto em problemas mais simples, poderá ajudar começar por resolver estes últimos.

— Como assim?

— Por exemplo, para resolver o problema da inversão do caminho que o mapa mostra. Como ainda há pouco seguiste o caminho inverso do aí indicado, deves lembrar-te de como o fizeste. Provavelmente não resolveste o problema de um modo global logo à partida, mas sim por troços, incluindo trocando no final de cada um as ações de virar pelas suas inversas.

— Sim e não. Por um lado virei o mapa de pernas para o ar, tal como está agora do meu ponto de vista, de modo que fiquei com o caminho inverso à minha frente e fui-o seguindo. Por outro lado, é verdade que tive que prestar atenção para onde virar no final de cada troço, e ir contando os cruzamentos, de modo que por esse prisma posso dizer que a inversão foi feita por troços.

— E por ordem inversa.

— É verdade: primeiro inverti este último troço aqui — João apontava para o mapa —, depois o penúltimo, e por aí fora.

— Exatamente como nos exemplos matemáticos que discutimos há pouco: também aí reparámos que as operações a inverter podiam ser decompostas em operações mais simples e o que fizemos na prática foi inverter, por ordem inversa, cada uma dessas operações mais simples. Embora já tenha referido isto anteriormente, é algo tão importante que vale a pena voltar a referir, agora usando uma linguagem mais matemática: a inversão de uma composição faz-se por ordem inversa da ordem usada na composição original.

— Hum... Estou a ver que a ordem é importante neste processo de inversão. Isso ocorreu-me naturalmente no caso da inversão do caminho no mapa, mas vou tomar nota que em qualquer situação de inversão de uma composição na matemática se deve proceder do mesmo modo!

— A última coisa que queria fazer notar sobre este assunto é que mesmo relativamente a uma composição original a ordem das operações pode ser importante. Ou seja, a troca da ordem pode conduzir a resultados diferentes. Isto é verdade em particular no caso do mapa. Por exemplo, se a partir aqui do lago — o mestre apontava para o mapa — eu virar logo à esquerda aqui no 1.º cruzamento, em vez de ser no 2.º além, e depois seguir até ao 2.º cruzamento, em vez de ser até ao 1.º, vou ter a um sítio diferente. No mapa nem sequer vês o que existe em termos de trilhos e cruzamentos se virares à esquerda no 1.º cruzamento, por isso até poderia ser impossível trocar a ordem, mas eu conheço o terreno e sei que, embora a troca fosse possível, iríamos parar mais ou menos aqui — o mestre apontou para um local do mapa onde não apareciam trilhos desenhados — e não além — o mestre apontava agora para o final do 2.º troço.

— Bom, não conhecendo o terreno e tendo um mapa, eu nem sequer me aventuraria por uma ordem diferente. A não ser talvez tentar atalhar caminho entre o 1.º e o último troços — João identificava os troços no mapa —, pois parece que o que temos de andar para a esquerda aqui no 2.º troço é aproximadamente desfeito pelo que temos que andar para a direita além no 4.º troço. Dá a sensação que deveria haver um caminho mais a direito, mas eu reparei à vinda para cá que os 2.º, 3.º e 4.º troços contornam um maciço rochoso — João descrevera no ar, sobre o mapa, uma figura arredondada delimitada parcialmente por aqueles três troços —, por isso imagino que, mesmo que haja um trilho mais a direito, deva ser mais custoso de seguir.

— E imaginas bem: nem sempre o caminho mais a direito é o mais conveniente. Por outro lado, a tua observação é interessante até porque algo do género se tenta fazer frequentemente em matemática, e novamente tem a ver com troca de operações. No que acabaste de dizer, no fundo a tua ideia era tentar aqui no final do 1.º troço adiar as operações de virar à esquerda e de seguir este 2.º troço e, em vez disso, executar logo as instruções relativas ao 3.º troço, avançando mais três cruzamentos, na esperança de que nessa altura ou já não fosse necessário virar à esquerda, pois isso seria anulado pela instrução de virar à direita no final do 3.º troço, ou pelo menos se pudesse poupar caminho na ligação ao último troço.

O mestre apagou o que tinha anteriormente escrito no quadro preto e voltou a usá-lo para as explicações seguintes:

— Analogamente, para se calcular, por exemplo,

$$\frac{3 \times 2 \times 5}{2}$$

cancelam-se as duas ocorrências do 2, atendendo a que neste caso se pode trocar a ordem e escrever a expressão acima como $3 \times 5 \times 2 \times 2^{-1}$, de modo que há uma operação que desfaz outra e portanto as duas podem ser ignoradas. E, tal como referi, há muitas outras situações em matemática onde é desejável trocar-se a ordem das operações, sendo muitas vezes essa a única maneira de se conseguir avançar na resolução do problema em causa. Por outro lado, e tal como eu estava a referir anteriormente relativamente ao mapa, **nem sempre se podem trocar operações**, de modo que é importante saber-se quando se pode e quando não se pode trocar operações. Há mesmo situações muito simples onde a ordem das operações não se pode trocar, e não reparar nisso pode levar a erros graves. Por exemplo em

$$\frac{2+5}{2},$$

que equivale a $(2+5) \times 2^{-1}$, trocar a ordem das operações resultaria em $(2 \times 2^{-1}) + 5$ (ou, pela convenção sobre a ordem das operações quando não há parênteses, $2 \times 2^{-1} + 5$), o que resultaria no cancelamento das duas ocorrências do 2 numa situação em que tal não se pode fazer. Em suma, apesar de a adição e a multiplicação serem isoladamente comutativas, quando se juntam não se podem em geral trocar.

— Isso tem alguma coisa a ver com a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição?

— Claramente: por essa propriedade, $(2+5) \times 2^{-1} = (2 \times 2^{-1}) + (5 \times 2^{-1})$, de modo que, como se vê também por aqui, quando se tenta trocar a ordem entre adições e multiplicações, algo mais complicado do que uma simples troca acontece.

O mestre fez um sorriso enigmático antes de prosseguir:

— Talvez agora seja mais claro para ti porque é que $(ab)^n = a^n b^n$ mas em geral $(a+b)^n \neq a^n + b^n$.

João sentiu um arrepio ao ouvir isto, sobre o qual tinha pensado durante a conversa do dia anterior com o mestre, mas era capaz de jurar que não tinha verbalizado esse desabafo, mas apenas pensado nele. Hum... Talvez estivesse enganada, por isso decidiu apenas perguntar o seguinte:

— A segunda envolve adições e multiplicações, por isso é de esperar algo mais complicado do que uma simples troca?

— Exato. Embora isso não seja uma prova de que são diferentes, serve de aviso para a necessidade de reflexão sobre a validade de uma troca de operações que se gostaria de poder fazer. No caso em apreço, gostaria que ficasse claro que a potenciação não troca em geral com a adição. Até deves conhecer o modo correto de desenvolver $(a+b)^n$, com a e b positivos e n natural: a expressão fórmula do binómio de Newton diz-te alguma coisa?

— Estou um bocado esquecida, mas lembro-me de ouvir falar dela. Irei também refrescar a memória sobre isso.

— Muito bem. A propósito, penso que já tens revisões suficientes com que te entreteres até ao final do dia, por isso é melhor terminarmos por aqui a nossa conversa de hoje.

— Mestre, se me permite, só mesmo para terminar gostaria de esclarecer duas questões que me ocorreram durante esta nossa conversa...

— Sou todo ouvidos.

— A primeira é se o princípio da inversão se pode usar também na resolução de inequações.

— Embora não seja tão imediato de aplicar, é de facto ele que está por detrás da resolução de inequações. Por exemplo, para resolvermos uma inequação simples como

$$x + 6 > 0,$$

observamos que se ao adicionar 6 ao x devemos obter um valor positivo, então é impossível o x ser -6 ou inferior, algo que é evidente se se conhecer a identificação do conjunto dos números reais com uma reta orientada e graduada. E vice-versa: se $x > -6$ então, pela mesma evidência geométrica, se adicionarmos 6 ao x obtemos um valor positivo. Assim, a solução da inequação acima é $x > -6$. Neste caso tudo parece funcionar como na resolução de equações, apenas com a diferença de em vez do sinal de igual se ter o sinal de maior que. Infelizmente com outras operações que não a adição o sinal de desigualdade pode ser alterado durante o processo de inversão, por isso o melhor é conhecer as regras básicas que se aplicam em situações frequentes e que foram dadas no Ensino Básico. Na conversa de amanhã iremos também ver uma abordagem gráfica a esta questão, que poderá ser útil nalguns casos e também poderá ajudar a sedimentar a aplicação das regras básicas a que me acabei de referir.... E qual é a segunda questão?

— Bom, não é uma questão matemática... Achei incrível quando o vi a escrever de pernas para o ar no quadro preto! Confesso que foi muito conveniente para mim, que assim pude ler sem esforço o que estava a escrever, mas... Como consegue escrever de pernas para o ar tão facilmente como se estivesse a escrever normalmente?

— Afinal essa também é uma questão matemática, pois para se escrever de pernas para o ar basta inverter o processo normal de escrita: em vez de escrever da esquerda para a direita, escrevo da direita para a esquerda; os traços que devia fazer para cima, faço para baixo; etc.. Enquadra-se perfeitamente no tema da conversa de hoje.

— Sim, de acordo. Mas como consegue fazê-lo de um modo tão fluido?

— Ah, isso é porque treinei bastante. Mas nesse aspeto não difere do que se faz quando se pretende ser exímio em qualquer atividade, incluindo na matemática: o treino é a chave para a perfeição na execução.

Índice