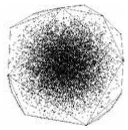
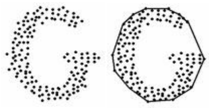


5 . Invólucros Convexos no Plano

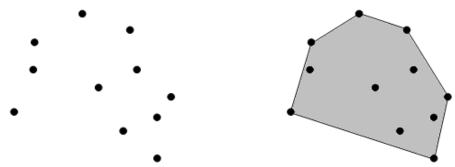


Antonio L. Bajuelos
Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro

Mestrado em Matemática e Aplicações

Problema: uma primeira abordagem…

- **Definição do Problema:**
  - Dado: um conjunto finito S de pontos
  - Encontrar: o invólucro convexo dos pontos em S



O Invólucro Convexo de um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^d$ é o menor conjunto convexo de $\mathbb{R}^d$ que contém S

Apontamentos históricos

- Segundo O'Rourke, o problema do invólucro convexo terá motivado o primeiro artigo publicado na área de Geometria Computacional

- Os primeiros algoritmos, desenvolvidos durante os anos 60, têm complexidade $O(n^2)$ ou superior

- Uma boa motivação para continuar a trabalhar…
  - No final dos anos 60, uma aplicação da Bell Labs necessitava de computar o invólucro convexo de aproximadamente 10.000 pontos no plano e os algoritmos de complexidade $O(n^2)$ foram considerados muito lentos

Apontamentos históricos

- Tendo essa aplicação como motivação, Graham desenvolveu em 1972 o primeiro algoritmo de complexidade de tempo $O(n \log n)$

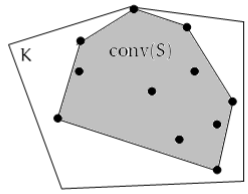
- Actualmente, este problema continua a despertar interesse dos investigadores. Algumas aplicações:
  - Robótica e animação por computador: detecção de colisões
  - Na resolução de outros problemas da Geometria Computacional, como o reconhecimento de padrões, o problema do par mais distante,……

O que é um invólucro convexo?

- Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^d$ é convexo quando, para quaisquer pontos *x*, *y* $\in$ S, o segmento de recta *xy* está totalmente contido em *S*

Conjuntos Convexos — Conjuntos não Convexos

- O **Invólucro Convexo** de um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^d$ é o menor conjunto convexo de $\mathbb{R}^d$ que contém *S* e denota-se por **conv(*S*)**, i.e., verifica as seguintes propriedades:
  - conv(S) é convexo
  - $S \subseteq$ conv(S)
  - K convexo, $S \subseteq K \Rightarrow \text{conv}(S) \subseteq K$



Resultados Preliminares

- Consequência imediata da definição:
  - **conv(*S*)** é a intersecção de todos os conjuntos convexos que contêm *S*, i.e.:

$$conv(S) = \bigcap_{\substack{K\ convexo \\ S \subseteq K}} K$$

Resultados Preliminares

- Uma caracterização mais concreta usa a noção de combinação convexa:
  - Um ponto p é uma combinação convexa dos pontos $p_1, \ldots, p_n$ se: $p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_n p_n$, onde $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \geq 0$ e $\sum \lambda_i = 1$
  - O **Invólucro Convexo** de $S = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ é o conjunto de todos os pontos que são combinação convexa dos pontos em S, *i.e.:*

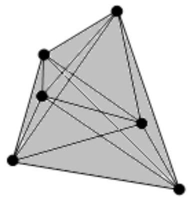
    $\text{conv}(S) = \{\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_n p_n,\ p_i \in S,\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ \lambda_i \geq 0,\ \sum \lambda_i = 1\}$

Resultados Preliminares

- Outros resultados conhecidos:
  - O **Invólucro Convexo** de $S \subseteq \mathbb{R}^d$ é o conjunto de todos os pontos que são combinação convexa de d+1 pontos de S (Teorema de Carathéodory)
  - Como consequência, o **Invólucro Convexo** de $S \subseteq \mathbb{R}^2$ (plano) é o conjunto de combinações convexas dos seus subconjuntos de 3 pontos (se os pontos forem não colineares, conv(S) é um triângulo)
  - O **Invólucro Convexo** de $S \subseteq \mathbb{R}^d$ é a intersecção de todos os semi-espaços que contêm S (no plano, um semi-espaço é um semi-plano)

Resultados Preliminares

- No plano ($\mathbb{R}^2$), sabemos ainda que:
  - O **Invólucro Convexo** de $S \subseteq \mathbb{R}^2$ é um polígono convexo cujos vértices são pontos de S
  - O **Invólucro Convexo** de $S \subseteq \mathbb{R}^2$ é o menor polígono convexo P que contém S, i.e.: $\nexists$ P' convexo: $P \supset P' \supseteq S$
  - O **Invólucro Convexo** de $S \subseteq \mathbb{R}^2$ é o polígono convexo P com menor área tal que $P \supseteq S$
  - O **Invólucro Convexo** de $S \subseteq \mathbb{R}^2$ é a união de todos os triângulos determinados por pontos em S

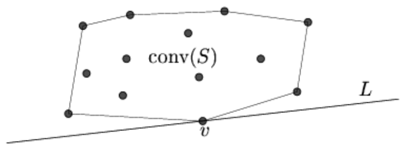


Problema: uma segunda abordagem (mais precisa)

- Definição do Problema (em $\mathbb{R}^2$):
  - Dados de Entrada: um conjunto finito S de pontos no plano
  - Dados de Saída: o conjunto de pontos (vértices) extremos <u>ou</u> o conjunto de segmentos (arestas) extremos que definem o invólucro convexo conv(S) dos pontos em S

conv(*S*) vs pontos extremos de *S*

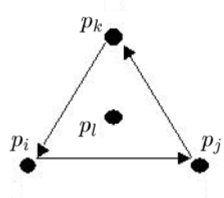
- Um ponto $p \in S$ é **ponto extremo** de um conjunto convexo S de pontos no plano se p não pode ser escrito como $\lambda x + (1 - \lambda)y$ (combinação convexa), para $x, y \in S$ e $0<\lambda<1$. Então:
  - os *pontos extremos* de um conjunto *S* de pontos no plano são os pontos do conv(*S*) que não estão no interior de um segmento contido no conv(*S*)
  - os *pontos extremos* de *S* são os vértices do conv(*S*)
  - um ponto *v* é um ponto extremo de um conjunto *S* sse existe uma recta cuja intersecção com o conv(*S*) é *v*



Algoritmos em $\mathbb{R}^2$: ingénuos

- **Lema:** Um ponto $p \in S$ é um ponto não extremo de *S* sse *p* pertence ao interior de algum triângulo cujos vértices são pontos de *S*, distintos de *p*
- Algoritmo dos **Pontos-Não-Extremos (CH1)**
  - Dados de Entrada: um conjunto finito $S = \{p_1,\ldots,p_n\}$ de *n* pontos no plano
  - Dados de Saída: os ponto extremos de *S* (vértices de conv(*S*))
  - Algoritmo:

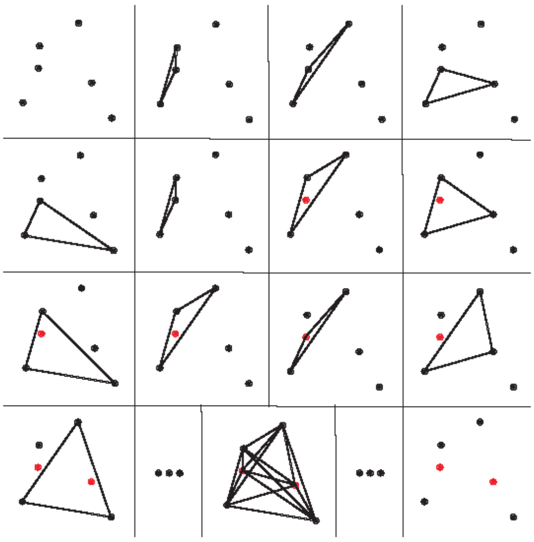
for cada *i* **do**
  for cada j, $j \neq i$ **do**
    for cada k, $k \neq i$, $k \neq j$ **do**
      for cada l, $l \neq i$, $l \neq j$, $l \neq k$ **do**
        if p_l está à esquerda ou sobre (p_i,p_j) e
          p_l está à esquerda ou sobre (p_j,p_k) e
          p_l à esquerda ou sobre (p_k,p_i)
        then p_l não é extremo



  - **Complexidade: $O(n^4)$**: existem 4 ciclos for encadeados, cada um com *n* iterações

Algoritmos em $\mathbb{R}^2$: ingénuos

- Exemplo da execução do Algoritmo dos **Pontos-Não-Extremos**



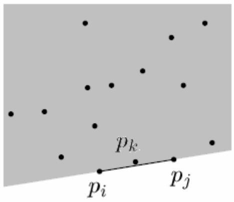
conv(*S*) vs arestas extremas de *S*

- **Teorema (a):** *pq é uma aresta orientada positivamente de* conv(*S*) *sse todos os pontos de S estão à esquerda de pq ou sobre pq.*
- **Teorema (b):** *As arestas de* conv(*S*) *são definidas por pontos de S e estão nas rectas suporte de S.*
- O algoritmo a seguir pode ser compreendido em duas etapas:
  1. identificar as arestas do conv(*S*) a partir do critério do teorema (a);
  2. representar a fronteira de conv(*S*) a partir das arestas identificadas, tendo em conta o teorema (b).

Algoritmos em $\mathbb{R}^2$: ingénuos

- Algoritmo das **Arestas-Extremas (CH2)**
  - Dados de Entrada: um conjunto finito $S = \{p_1,\ldots,p_n\}$ de n pontos no plano
  - Dados de Saída: as arestas extremas de S (arestas de conv(S))
  - Algoritmo:

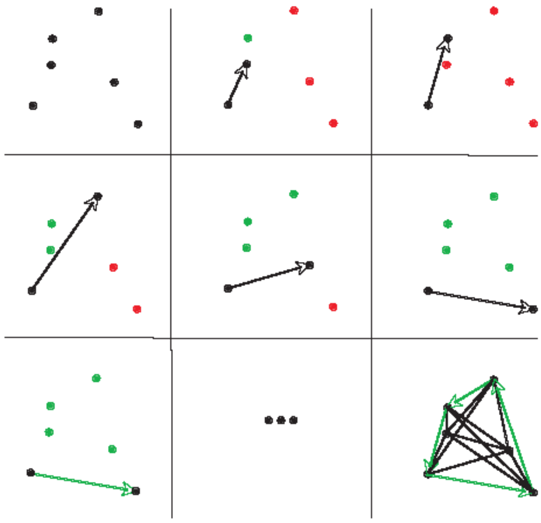
for cada i **do**
  for cada j, $j \neq i$ **do**
    for cada k, $k \neq i$, $k \neq j$ **do**
      if p_K não está à esquerda ou sobre (p_i,p_j)
      then (p_i,p_j) não é aresta de conv(S)



  - **Complexidade: O(n^3)**: existem 3 ciclos for encadeados, cada um com n iterações

Algoritmos em $\mathbb{R}^2$: ingénuos

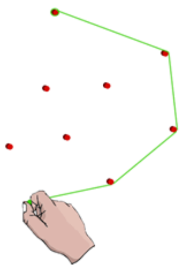
- Exemplo da execução do Algoritmo dos **Arestas-Extremas**



Algoritmo de Jarvis

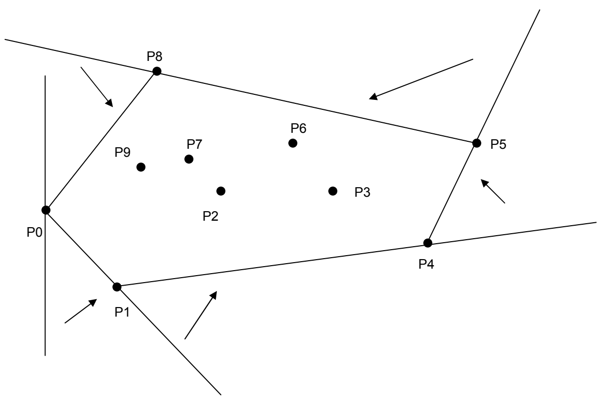
(algoritmo do embrulho para presente - **Gift wrapping**)

- O algoritmo de Jarvis baseia-se na seguinte observação:
  - **Se *pq* é uma aresta do conv(*S*) orientada positivamente, então a próxima aresta de conv(*S*) é *qr*, onde *r* é o ponto de *S* tal que *qr* define o menor ângulo com *pq***
- Este algoritmo simula o enrolar do conjunto *S* por um barbante e pode também ser visto como uma melhoria do *algoritmo das arestas extremas*:
- Ideia central:
  - **utilizar a aresta extrema que acabou de ser encontrada para encontrarmos a próxima aresta.**



Algoritmo de Jarvis

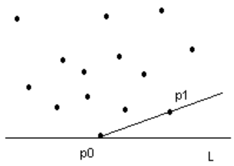
(algoritmo do embrulho para presente - **Gift wrapping**)



Algoritmo de Jarvis

(algoritmo do embrulho para presente - **Gift wrapping**)

- Ideia central:
  - **utilizar a aresta extrema que acabou de ser encontrada para encontrarmos a próxima aresta.**
- No início não temos nenhuma aresta de conv(S), então como iniciar o algoritmo?
  - **basta começarmos com um vértice p_0 em S de menor y-coordenada e encontrarmos o ponto p_1 em S com o menor ângulo polar no sentido anti-horário com relação ao ponto p_0 e a recta horizontal.**



Algoritmo de Jarvis

(algoritmo do embrulho para presente - **Gift wrapping**)

- Algoritmo de **Jarvis (CH3)**
  - Dados de Entrada: um conjunto finito $S = \{p_1,\ldots,p_n\}$ de n pontos no plano
  - Dados de Saída: as arestas que definem conv(S), orientadas no sentido positivo
  - Algoritmo:

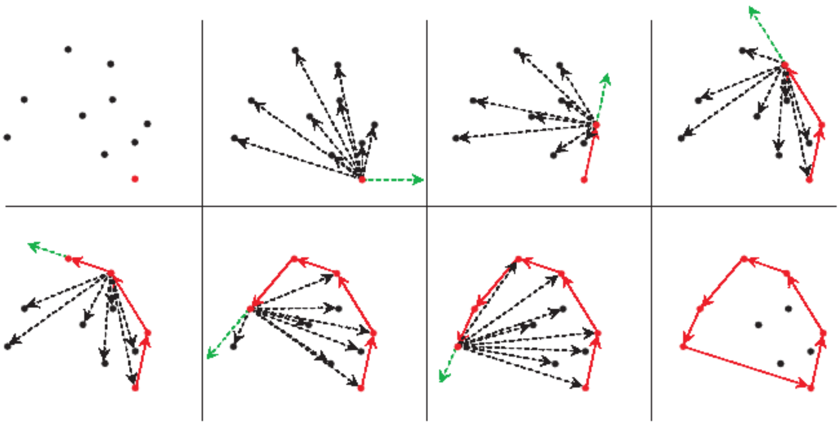
Encontrar o ponto p_m de menor ordenada
Inicializar:
    $i \leftarrow m$
    $v \leftarrow$ vector horizontal que passa por p_m e é orientado
        no sentido positivo
Repeat
    for cada j, $j \neq i$ do
        Calcular θ_j ângulo polar entre v e $p_i\,p_j$
        Obter k tal que $\theta_k = \min \theta_j$
    Output : $p_i\,p_k$ como aresta orientada de conv(S)
    Actualizar: $v \leftarrow p_i\,p_k$
        $i \leftarrow k$
Until $i = m$

Algoritmo de Jarvis

(algoritmo do embrulho para presente - **Gift wrapping**)

Applet

- Exemplo da execução do Algoritmo de **Jarvis**



Algoritmo de Jarvis

(algoritmo do embrulho para presente - **Gift wrapping**)

- Complexidade: ***O(nh)***

$O(n)$ → Encontrar o ponto p_m de menor ordenada

$O(1)$ → Inicializar:
  $i \leftarrow m$
  $v \leftarrow$ vector horizontal que passa por p_m
  e é orientado no sentido positivo

$O(nh)$:

Repeat

$O(n)$ → for cada j, $j \neq i$ do
  Calcular θ_j ângulo polar entre v e $p_i p_j$
  Obter k tal que $\theta_k = \min \theta_j$

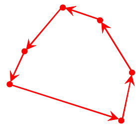
$O(1)$ → Output : $p_i p_k$ como aresta orientada de conv(S)
  Actualizar: $v \leftarrow p_i p_k$
  $i \leftarrow k$

Until $i = m$

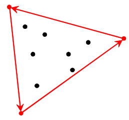
Algoritmo de Jarvis

(algoritmo do embrulho para presente - **Gift wrapping**)

- **Observações relevantes:**



1. No pior caso, o algoritmo de **Jarvis** é ***O*(*n*²)** – corresponde à situação em que todos os pontos de *S* pertencem ao invólucro convexo



2. No entanto, se o número de arestas *h* do invólucro é pequeno, digamos log *n*, então o algoritmo de **Jarvis** é ***O*(*n* log *n*)** (óptimo???)
3. Em termos de implementação não precisamos calcular ângulo polar algum. Basta usarmos a primitiva ***Left*** para encontrar em cada iteração, o ponto p_k tal que o predicado ***Left***(p_i, p_k, p_j) é verdadeiro para todo *j* distintos de *i* e *k.*