Математическая песочница и совок с ведерком

А.Алексенко, Е.Лакштанов

Department of Mathematics, University of Aveiro, Portugal

Аннотация

Это учебник и задачник для младших классов.

Оглавление

Глава 1

Введение

Я не являюсь безоговорчным сторонником пассионарной теории Л.Гумилева, но поневоле замечаешь верность некоторых ее постулатов. В течении многих лет русскоязычные математические кружки начинались с 6 класса. Сейчас многие независимо создают материалы для младших классов. Я не имею в виду, что когда-либо отсутствовали дидактические материалы по математике, а то что, детская математическая культура, взращиваемая профессиональными математиками, стала захватывать новые возрастные группы. Я не считаю, что все началось со статей или книги А.Звонкина, хотя значение его примера сложно переоценить. Время созрело и культура создается. Она создается разными людьми, но через некоторое время, она станет однородной с плохо различимыми направлениями. Я начал работать с младшими классами в самом начале 2006 года, когда по приезду в Португалию, ко мне обратились родители русскоязычных первоклассников. Тогда мне помогли начать статьи А.Звонкина, с которыми меня познакомила моя жена Алёна Алексенко. Долгое время я описывал детально все свои занятия. Эта работа неизбежна должна была перейти в рабочее русло, должен был создаваться продукт: образовательный, но *продукт*, то есть то, что легко может быть использовано другими детьми. Разница между описанием конкретных занятий и задачником это разница между притчей и сборником наставлений. Книга А.Звонкина это сборник притчей, который помогает понять «как?» работать. Сборник задач призван на долгое время отодвинуть насущность вопроса «что делать во время занятий?» Через некоторое время я нашел свой путь: брать научные модели, упрощать их так, чтобы они еще сохраняли свою эстетическую привлекательность, но их уже можно было бы снабдить списком задач доступных для младшеклассника. Подробно мы написали об этом в статье «Examples of Admissible Simplification of Mathematical Models», Kybernetes, Vol. 40 Iss: 9/10, pp.1523 – 1529, 2011. arXiv:0910.1945v1 [math.HO]

В идеале я хотел бы видеть задачник вроде стандартного задачника по математическому анализу (Б.Демидовича, например), прорешав который, человек выходит на новый уровень своей техники. Но, в силу новизны напрвелния, книга будет представлять собой и учебник и задачник. Первый задачник никогда не бывает хорошим, потому что хороший задачник это труд нескольких поколений.

Е.Лакштанов.

Глава 2

Теория Дворцов

Эта глава может вызвать устойчивое раздражение у любящих конические сечения и их свойства. Изначально эта глава задумывалась как набор задач по геометрическим местам точек: переход к дискретной решетке позволяет ознакомить ребенка с этим нетривиальным абстрактным понятием и решить набор упражнений. Набор эллипсов изображенный на рисунке 2.1 когда-то нарисовала моя дочь. Ей было тогда лет 7. На уроке мы разобрали это понятие, и кажется, мы рисовали вложенные окружности разными цветами. После урока она самостоятельно выдала узор на рисунке. Это набор d-эллипсов с большими диметрами данными в таблице. Фокусы фиксированы и обозначены зеленым цветом. Потом оказалось, что введенные понятия расстояния играют вспомогательную роль для более сложных понятий из математики и физики.

Рис. 2.1: Узор, который является набором d-эллипсов с фиксированными фокусами.

2.1 Q-дворцы и D-дворцы

Вы когда-нибудь бывали в старинном дворце? Каждется, что лет 200 назад архитекторы совсем не задумывались над расположением комнат, все они были смежными:

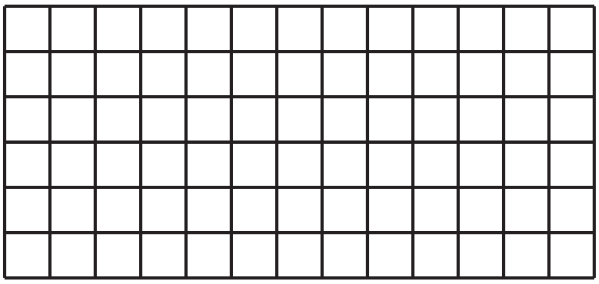


Рис. 2.2:

Мы пока будем работать с двумя типами дворцов: q-дворцами и d-дворцами. В q-дворце в каждой стене есть по двери, то есть у каждой комнаты по 4 соседних. А в $d-$дворце есть еще по двери, по этому у каждой комнаты 8 соседей. В принципе, дворцы можно выдумать самые разными, но мы пока займемся их свойствами:

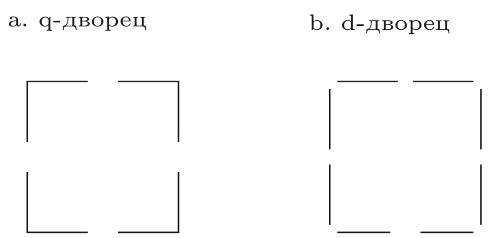


Рис. 2.3: На рисунке а. изображена комната q-дворца (4 двери), а на картинке б. изображена комната d-дворца (8 дверей)

Определение 2.1. **Расстоянием** *между двумя комнатами называется минимальное количество переходов требуемых для того, чтобы дойти от одной комнаты до другой. Путь на котором количество переходов самое маленькое называется* **минимальный путь**.

Задача 2.1. *Найдите q-расстояния и d-расстояния между всеми комнатами отмеченными на картинке 2.5.*

Вопрос 2.1. *Может быть такое что две комнаты соединяет более двух минимальных путей? Нарисуй пример.*

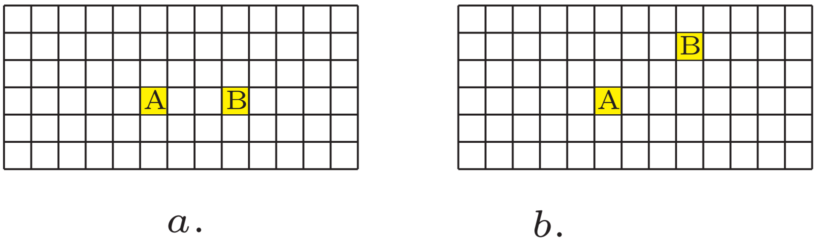


Рис. 2.4: На рисунках закрашены комнаты со следующими расстояниями между собой: a. q-dist(A,B)=3, d-dist(A,B)=3. b. q-dist(A,B)=5, d-dist(A,B)=3.

Вопрос 2.2. *А может быть такое что две комнаты соединяет ровно один минимальный путей?*

Задача 2.2. *Найди q-расстояние и d-расстояние между всеми разноцветными комнатами на рис. 2.5. Найди q-расстояние и d-расстояние между всеми парами выделенных комнат. Недостаточно просто записать получившиеся ответы в виде чисел, вы ведь сами забудете, что они означают. Надо так и писать: "q-расстояние между комнатой A и комнатой B равно 6". Только математики обычно любят выдумывать разные таинственные обозначения, чтобы было покороче и позагадочней: q-dist(A,B)=6. Так и пишите, и понятно, и красиво.*

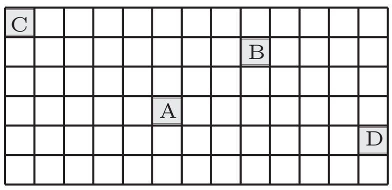


Рис. 2.5: Рисунок к задаче 2.2

Представьте, что вы попали во дворец и каждый занял по комнате. Один из вас занял красную комнату, другой занял синюю, а третий желтую. А потом вы решили поделить между собой весь дворец. К кому комната ближе тому она и принадлежит. Закрасьте каждую комнату в соответствующий цвет. Если комната имеет одинаковое расстояние до, хотя бы, двух из вас то она граничная и вы ее не закрашиваете. По научному такой процесс, когда все пространство делится на области, по описанному принципу, называется **диаграмой Вороного**.

Задача 2.3. *Даны две точки (как на рисунке 2.11). Заштрихуйте лишь граничные точки диаграмы Вороного. Опишите словами, что надо было бы заштриховывать если бы размер бумаги был больше.*

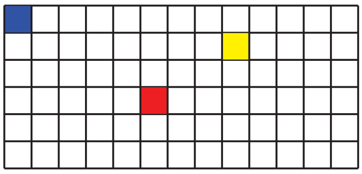


Рис. 2.6: Нарисуйте диаграму Вороного

2.2 Геометрические места точек

Вот вы живете в этом самом дворце и скучно вам. И тут вам пришла в голову идея: "а какие комнаты находятся от меня на рсстоянии 5?". Вот вы, недолго думаю, закрасили все такие комнаты и что же у вас получилось? Конечно же *окружность!*.

Задача 2.4. *(Картинка 2.7): Нарисуй q-окружность на левой картинке и d-окружность на правой кратинке с центром в* C *и радиусом 3.*

Задача 2.5. *(Картинка 2.8): Нарисуй множество окружностей с центром в* C *и различными радиусами. Каждая окружность должна быть нарисована своим цветом указанным в таблице.*

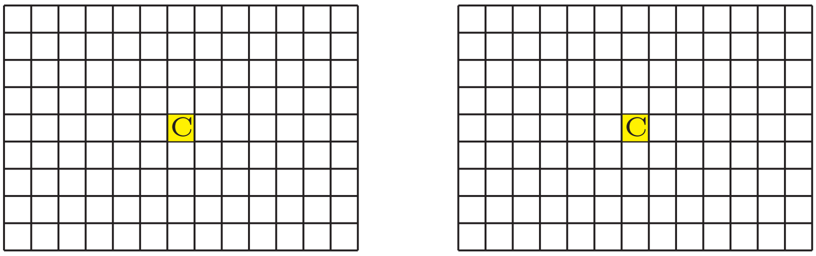
Задача 2.6. *(Картинка 2.9): Найди центр окружности и ее радиус.*

Определение 2.2. *Давайте зафиксируем две комнаты* F_1 *и* F_2*. Также выберем какое-нибудь число, например 5.* **Эллипсом** *называется множество комнат* X *такое, что* $dist(F_1, X) + dist(F_2, X) = 5$*. Число 5 в данном случае это* **диаметр** *эллипса. В общем, диаметром может быть любое число. Пример привиден на картинке 2.10.*

Задача 2.7. *Нарисуй q-эллипс и d-эллипс с фокусами данными на картинке 2.11 и* $D = 7, 8, 9, 10$*. Исаользуй для каждого эллипса свой цвет.*

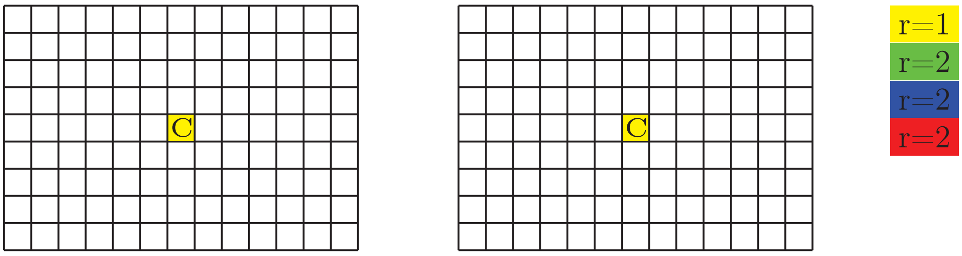
Задача 2.8. *На рисунке 2.12 даны 2 эллипса. Требуется указать его фокусы и диаметр.*

Определение 2.3. *Набор комнат называется* **прямым путем** *если верно следущее: не покидая этого набора можно пройти между любыми двумя комнатами по минимальному пути.*



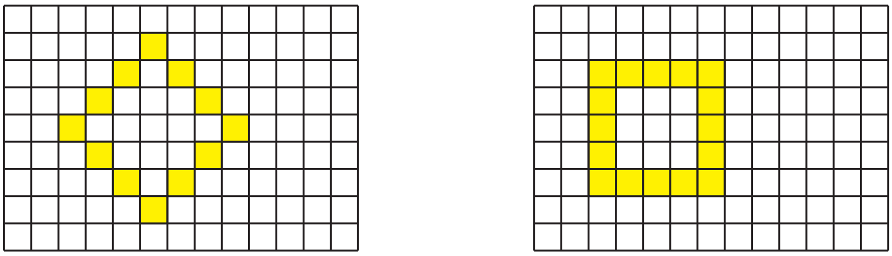
q–дворец *d*–дворец

Рис. 2.7: Нарисуй q-окружность на левой картинке и d-окружность на правой картинке с центром в C и радиусом 3.



q–дворец *d*–дворец

Рис. 2.8: Нарисуй несколько окружностей с центром в C и различными радиусами. Каждая окружность должна быть нарисована собственным цветом данным в таблице.

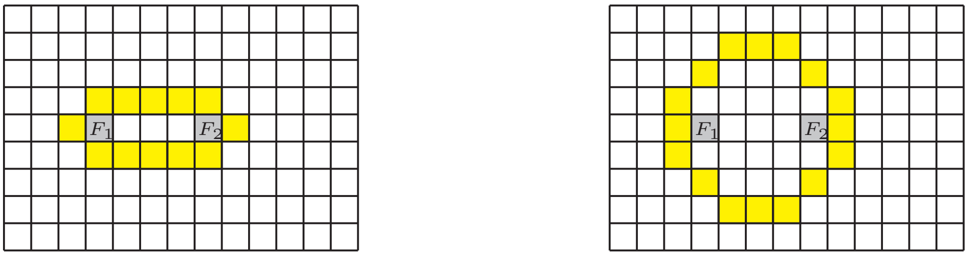


q–дворец *d*–дворец

Рис. 2.9: Найди центр и радиус данной окружности.

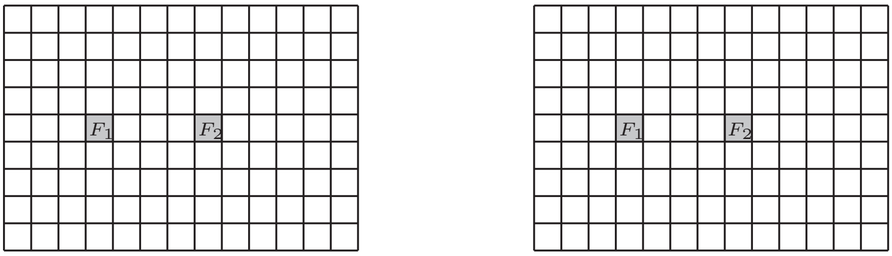
Задача 2.9. *Определи для каждой фигуры на рисунке 2.13 если он является q-прямым путем или d-прямым путем. Если вы считаете, что это не прямой путь следует указать две комнаты такие, что нет минимального пути принадлежащего этой фигуре.*

Определение 2.4. Расстоянием между комнатой и множеством комнат *называется расстояние между комнатой и ближайшой комнатой из этого множе-*



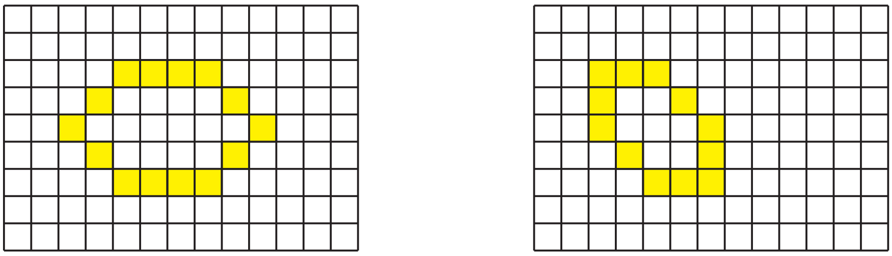
q–эллипс, $D = 6$ d–эллипс, $D = 6$.

Рис. 2.10: Пример q-эллипса и d-эллипса с диаметром 6.



q–эллипс d–эллипс

Рис. 2.11: Рисунок к задаче 2.7



q–эллипс, $D = ?, F_1, F_2 = ?$ d–эллипс, $D = ?, F_1, F_2 = ?$

Рис. 2.12: Рисунок к задаче 2.8

ства.

Задача 2.10. *Определи q- и d- расстояния между синей комнатой и множество желтых комнат на рисунке 2.14.*

Определение 2.5. *Пусть зафиксирована комната F и прямой путь.* **Параболой** *называется набор комнат таких, что расстояние от комнаты до фокусной комна-*

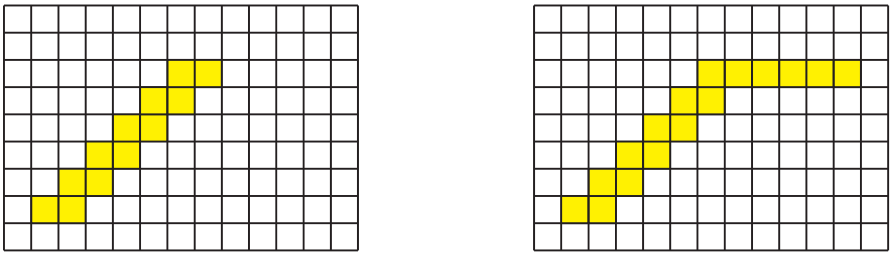


Рис. 2.13: Определи для каждой фигуры если это q-прямой пли/и d-прямой путь

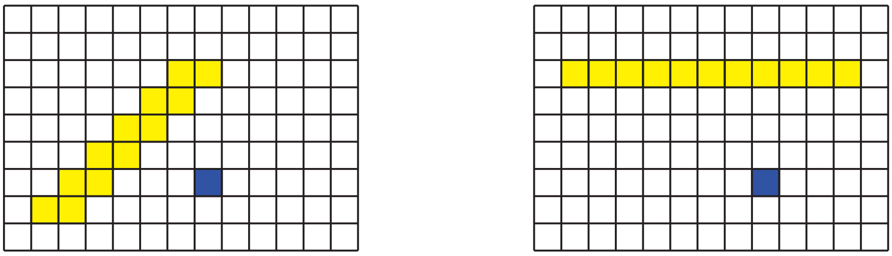


Рис. 2.14: Определи q- и d- расстояния между синей комнатой и множество желтых комнат. (задача 2.10)

ты F равен расстоянию от комнаты до прямого пути. Мы называем комнату F **фокусом** *параболы и прямой путь* **директриссой** *параболы.*

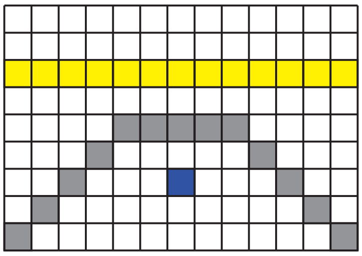


Рис. 2.15: Пример d-параболы с фокусом в синей комнате и желтой деректриссой

Задача 2.11. *Нарисуй q-параболу с теми же фокусом и директиссой, что и на рисунке 2.15.*

Задача 2.12. *Нарисуй q- и d- параболы с данным фокусом и прямым путем данными на рисунке 2.16.*

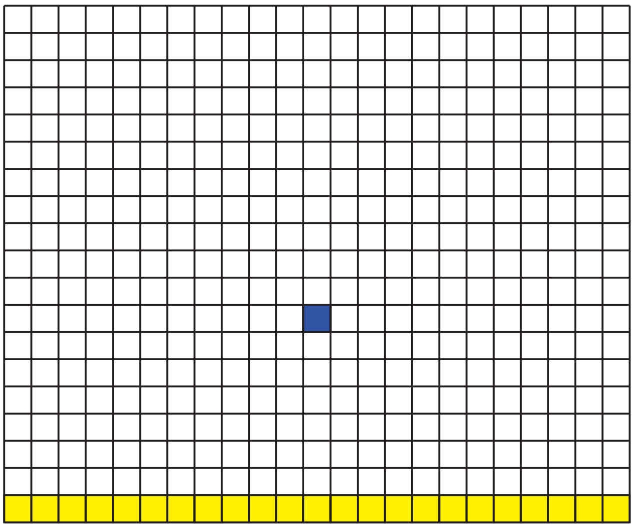


Рис. 2.16: Нарисуй q- и d- параболы с данным фокусом и прямым путем

2.3 Аналитические задачи

В зависимости от возраста (и возможностей) требуется либо найти формулу для произвольных значений начальных данных эмпирически, либо найти и доказать ее верность.

Здесь не будем давать строгих определний. Интуитивно под периметром фигуры понимается количество входящих в нее комнат, а при подсчете площади еще учитываются комнаты "внутри".

Уже неплохо будет если 7летний ребенок сможет проверить окружности назличных радиусов и догадается, что периметр всегда больше в определенное число раз.

Задача 2.13. *Дан радиус r. Определите периметр*
а. q-окружнсоти б. d-окружности.

Площадью фигуры называется количество комнат ей принадлежащих

Задача 2.14. *Дан радиус r. Определите площадь*
а. q-окружнсоти б. d-окружности.

Задача 2.15. *Дан радиус r. Определите периметр и площадь*
а. q-эллипса б. d-эллипса.

2.4 Другие дворцы

Конечно можно выдумывать собственные дворцы: здесь два пути (которые можно смешивать). Вместо квадратов брать другие формы (см. рис. 3.2) или вводить веса (см. главу Дворцы с весами).

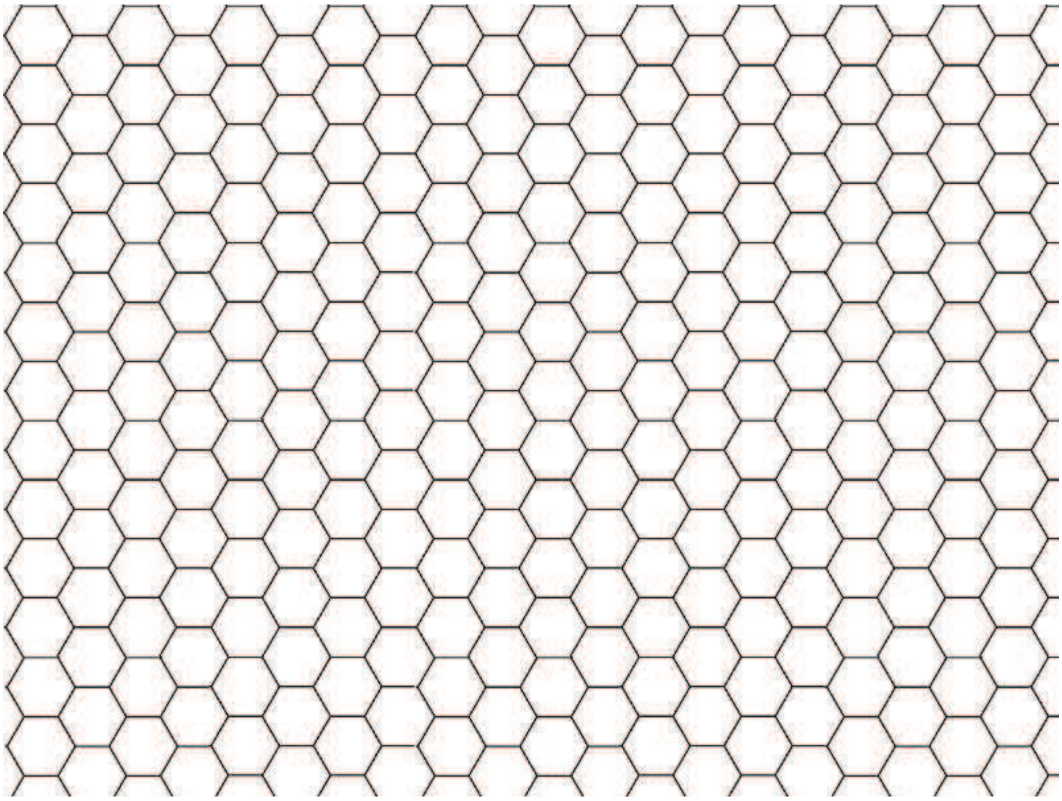


Рис. 2.17: Дворец с шестиугольными комнатами для распечатки.

2.5 Дворцы с весами

У каждой двери стоит стражник который взимает за вход в комнату сумму написанную в уголке. Выход бесплатный.

Задача 2.16. *Допустим что вы находитесь в желотой комнате на рис. 2.18. Расчитайте минимальную стоимость перехода (и укажите путь) до каждой из комнат выделенных цветом.*

Будьте бдительны! например, цена прохода от красной до синей комнаты равна 9.

Задача 2.17. *Допустим что вы находитесь в синей комнате на рис. 3.13. Расчитайте минимальную стоимость перехода до каждой из желтых комнат и напишите ее внутри соответствующей комнаты.*

5	5	5	5	5	5
4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	3	3
2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0

Рис. 2.18: Задача 2.16

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	3	3	3	3	3	3	1	1	1	1
1	1	1	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 2.19:

2.6 Дополнительные задачи

2.7 Некоторые ответы

Вопрос 2.1. Может

Задача 2.2. q-dist(A,B)=5, q-dist(A,D)=8, d-dist(A,C)=5.

Задача 3.8. a. R=3; b. R=2.

Задача 2.8. a. D=7, b. D=4.

Задача 2.16. Цена прохода от красной до синей комнаты равна 9.

Задача 2.10. a. q-dist=4; d-dist=2. b. q-dist=4; d-dist=4.

Глава 3

Жизнь на кошках

Эта глава появилась при попытке уйти от стандартных образов вроде, «информатика значит ходилки на таблице».

Мы будем работать с кошками двух видов: **дружелюбными** и **недружелюбными**.

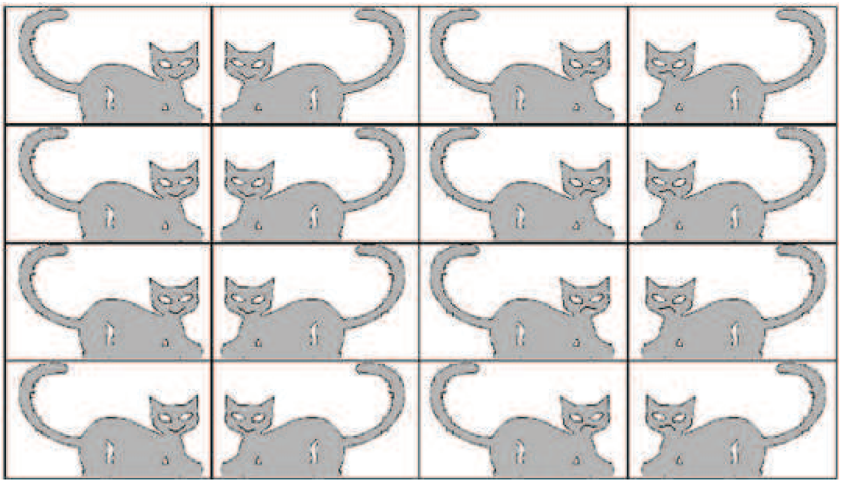


Рис. 3.1: Разрезать по средней линии, каждую из половинок согнуть вдоль средней линии, склеить и разрезать так, что при переворачивании картинки, кошка меняет сторону обзора

Каждая кошка может находиться в одном из двух состояний: **довольна** или **недовольна**.

Дружелюбная кошка довольна только когда видит лицо другой кошки (неважно какой).

Недружелюбная кошка довольна только когда не видит лица другой кошки.

Задача 3.1. *Какие из кошек на рисунке 3.3 довольны?*

Рис. 3.2: На картинке слева дружелюбная кошка довольна, она видит лицо другой кошки, а соседствующая с ней недружелюбная кошка недовольна по той же самой причине. На картинке справа обе недружелюбных кошки наслаждаются жизнью поскольку не видять ничьего лица.

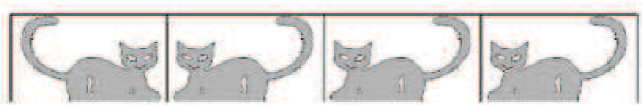


Рис. 3.3: Рисунок к задаце 3.1

Замечание 3.1. *Для работы в классах можно приготовить маски и группа детей может выполнять задание перед классом. Например они могут встать в линейку, и каждый должен сказать доволен он или нет.*

Задача 3.2. *Разложите 4 дружелюбных кошки так чтобы а. все были довольны. б. все были недовольны.*

Задача 3.3. *Разложите 4 недружелюбных кошки так чтобы а. все были довольны. б. все были недовольны.*

Для того, чтобы найденные конфигурации было бы легко сохранять на бумаге можно использовать вместо картинок следующую кодировку: Стрелочка и знак улыбки/недовольства как показано на рисунке 3.7

Задача 3.4. *Под первым рисунком на картинке 3.5 запишите его кодировку. Под вторым рисунком на этой картинке разложите таблички с кошками.*

Задача 3.5. *Найдите все способы растставить недружелюбных кошек в ряд так, чтобы все они были довольны. Каждое расположение запишите в тетрадку.*

Задача 3.6. *Раставьте 9 дружелюбных кошек в ряд так, чтобы все были довольны?*

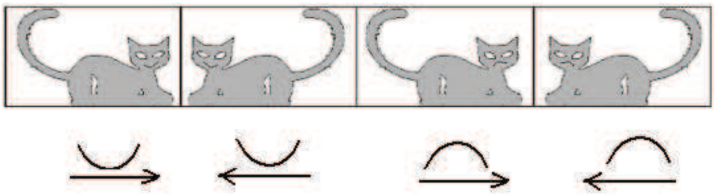


Рис. 3.4: Для записи в тетрадке используем кодировку как показано на рисунке: стрелочки и знак улыбки.

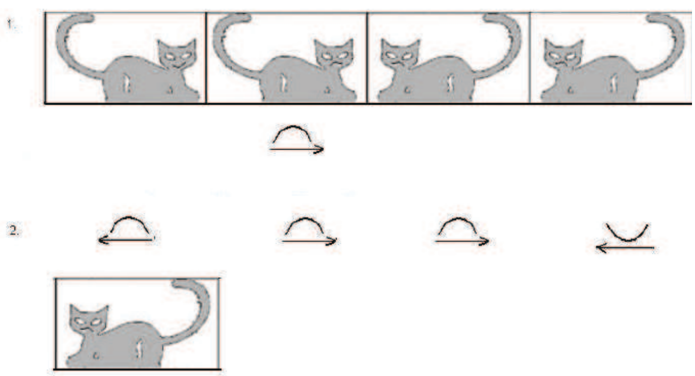


Рис. 3.5: На пустых местах под первой картинкой напиши соответсвующую кодировку. На пустых местах под второй картинкой поставь размести соответствующие карточки с кошками.

3.1 Динамика

Разложим несколько кошек в ряд:

Рис. 3.6: По хлопку каждая кошка повернется, если она сейчас недовольна. Получится следующее:

Будем записывать ряды друг под другом. Каждый ряд называется генерацией или поколением.

Задача 3.7. *Вычислите 5 потомков конфигурации данной на рисунке 3.3*

Рис. 3.7: Потомок конфигурации на рисунке 3.6

Задача 3.8. *Вопросы про рисунок: Вычислите 100 потомков конфигурации данной на рисунке 3.8. (Можно объяснять словами).*

Замечание 3.2. *Для работы в классах с масками можно выполнять следующее задание перед классом. Дети становятся в линейку, затем по хлопку они должны либо оставаться на месте либо разворачиваться согласно правилам. Можно просить детей зарисовывать начальную и конечную генерации.*

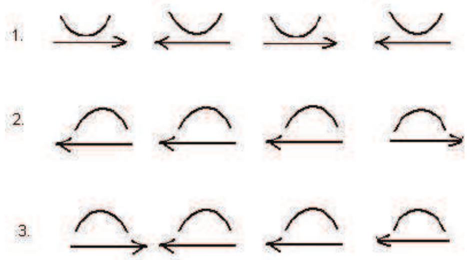


Рис. 3.8: Рисунок к задаче 3.8

Определение 3.1. *Генерация, которая не меняется после хлопка называется* **стационарной** *или* **неподвижной***. А если она нестационарна, но через несколько хлопков становится такой же, то она называется* **периодической***, а количество хлопков требуемых, чтобы она опять стала такой же называется* **периодом***.*

Задача 3.9. *Составьте из доброжелательных кошек стационарную конфигурацию. Затем периодическую.*

Задача 3.10. *Каждая из конфигураций во время динамике выходит на периодическое движение. Найдите период для каждой конфигурации на рисунке 3.11.*

Когда динамика стала периодической (стационарной) для того, чтобы обозначить это в тетради, последние конфигурации отчерчиваются (как показано на рисунке 3.10) и ставится число равное периоду).

Рис. 3.9: Задача **??**.1

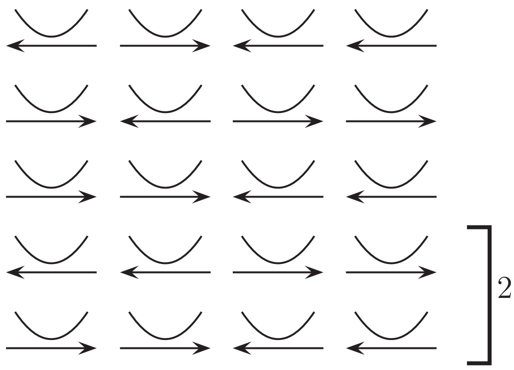


Рис. 3.10: Пример оформления периода

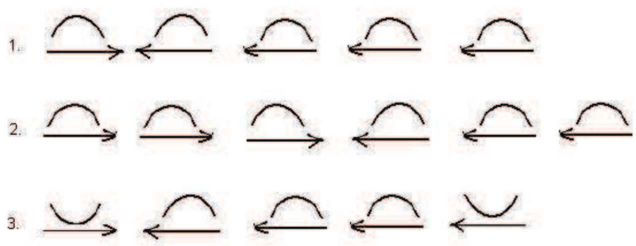


Рис. 3.11: .

Определение 3.2. *Генерация, которая получается после хлопка называется* **прямым потомком** *предыдущей генерации, которая в свою очередь называется* **прямым предком**. *Все остальные «бабушки», «прабабушки» и «внуки» называются предками или потомками без дополнительного слова «прямой».*

3.2 Трудно быть богом!

В задаче 3.7 мы начали с конфигурации недружелюбных кошек стоящих так, что некоторым было неприятно. Однако, после нескольких ходов все они заняли "удобное"положение и всем стало приятно. Можно убедиться, что с ними всегда так, например разберите, что произойдет со следующей конфигурацией:

Задача 3.11. *Вычислите все потомки конфигурации на рис.* **??** *до тех пор пока она не станет стационарной.*

Рис. 3.12: Найдут ли недружелюбные кошки свое счастье?

Итак, недружелюбные кошки они такие: всегда свою счастье найдут. С дружелюбными же дела обстоят похуже

Задача 3.12. *Предъявите периодическую конфигурацию из 4 дружелюбных кошек. (периода 2).*

А все почему? правильно, только о себе заботятся: если друг напротив двое встали, никогда уже не повернутся. Будем называть правило, которое мы им задали "эгоистичный альтруизм". Слово "Альтруизм"означает, что они к другим хорошо, в принципе, относятся, а "эгоистичный потому, что о других (кому плохо) они и знать ничего не хотят.

Давайте теперь введем им новый закон, который будет определяться максимой **«Нельзя быть счастливым если соседу плохо»**.
Правило 2. Это означает, что кошка остается на месте если ей хорошо и соседу хорошо. Во всех остальных случаях (ей плохо или ей хорошо, но одному из соседей плохо) она переворачивается.[1] Давайте посмотрим поможет ли этом им:

Задача 3.13. *Выясните, что произойдет со следующей конфигурацией*

Задача 3.14. *Вычислите все потомки конфигурации на рис.* **??** *до тех пор пока она не станет стационарной.*

Что же, получается что две правые кошки буду каждый раз смотреть в одну сторону. Так бывает, когда два человека ждут друг друга у разных входов, а потом одновремено переходят к противоположному. Что же делать? правильно, двайте кто-нибудь будет ждать!
Правило 3. Нельзя быть счастливым, если сосед несчастлив и **Не ищи счастья сам - жди его**.

Рис. 3.13: Поможет ли нашим кошкам правило номер 2? Свой результат сверяйте с ответом на странице 24!

Рис. 3.14: Поможет ли нашим кошкам правило номер 3?

Разберем следующую конфигурацию (рис 3.14) Очевидно, что все кошки станут довольными, уже на следующий шаг. Однако у правила номер 3 есть серьезный изъян, который остался пока незамеченным:

Вопрос 3.1. *Что будет происходить с дружелюбной кошкой если она всегда смотрит в сторону?*

Правильно, она всегда будет *ждать своего счастья*,что не очень разумно. Итак внесем дополнение:
Правило 4. **Нельзя быть счастливым, если сосед несчастлив** и **Не ищи счастья сам - жди его** и Если ты стоишь с краю, всегда переходи (оставайся) в положении внутрь. И правильно! на обиженных воду возят.

Скорее смотрим, справились ли мы теперь со своей божественной функцией:

Задача 3.15. *Разберите динамику каждой из конфигураций на рис*

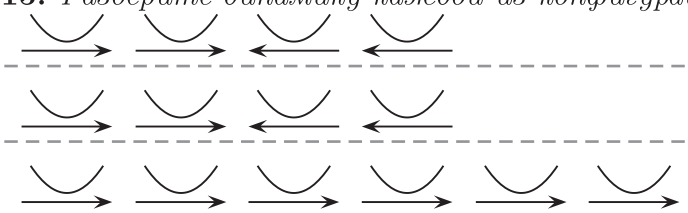


Рис. 3.15: Поможет ли нашим кошкам правило номер 4?

3.3 Контрольные вопросы

Вопрос 3.2. *Если в конечной конфигурации все кошки дружелюбны. Какие периоды возможны у предельной конфигурации?*

Вопрос 3.3. *Если в конечной конфигурации все кошки недружелюбны. Какие периоды возможны у предельной конфигурации?*

[1]Если хотите, попробуйте отложить книгу и найти свой закон, который позволит кошка всегда обретать свое счастье, как бы их не перемешивали. Не забывайте только, что кошки в каждый момент времени знают только про себя и своих соседей, ничего больше они не знают.

Вопрос 3.4. *Какой максимально возможный период в периодической конфигурации из n произвольных кошек.?*

Замечание 3.3. *Если вас заволновала судьба дружелюбных кошек, то вы сможете помочь им когда будете проходить главу* **??** *про машину Тьюринга.*

3.4 Ответы

Рис. 3.16: Задача **??**.1

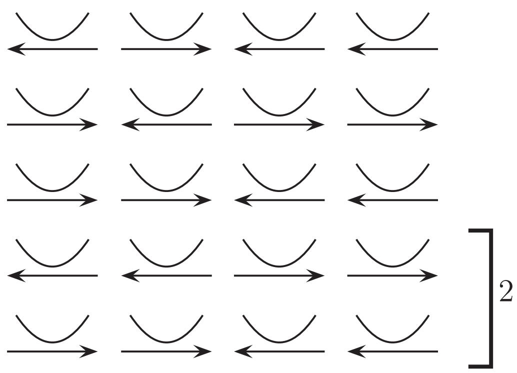


Рис. 3.17: Задача 3.14

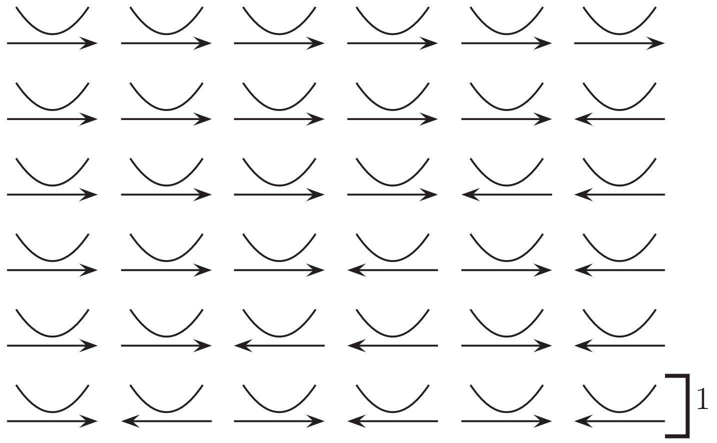


Рис. 3.18: Задача 3.15

Глава 4

Фотогеничные фигуры

Глава 5

Цепи Маркова

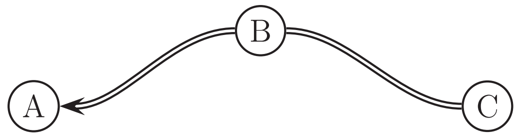


Рис. 5.1: Задача 3.14

Представим, что у нас есть комнаты: мы будем обозначать их буквами: A,B,C итд. В комнатах сидят ребята и по хлопку они делают следуюее:

- Если из комнаты ведет только один коридор, то ВСЕ ребята уходят по этому корридору в другую комнату.
- Если из комнаты ведет два корридору, то половина ребят идет по одному корридора, а вторя половина идет по другому корридору. Если ребят было нечетное число, то один человек остается.
- Если из комнаты ведет 3 корридора, то по трети ребят идут по одному из корридоров. В случае числа ребят некртаного трем,остаток от деления на 3 остается в этой комнате.

Давайте разберем пример: пусть с самого начала у нас 3 комнаты соединенные поочередно корридорами

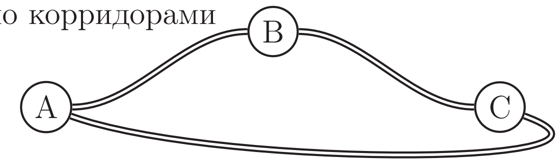


Рис. 5.2: Пример

и в начале в комнате A находится 6 ребят, а остальные комнаты пусты. Будем говорить, что текущее **распределение ребят по комнатам** есть $(6, 0, 0)$. Из комнаты A ведет 2 корридора, и ребята по трое пойдут по каждому из них таким образом распределеиние будет $(0, 3, 3)$, то есть в комнате A никого нет, а в комнатах B и C по трое человек. После следующего хлопка распределение будет $(2, 2, 2)$, а после следующего хлопка... тоже $(2, 2, 2)$. Действитель, из каждой комнаты уходят двое но и приходят двое: по одному от каждого из соседей. Таким образом распределение $(2, 2, 2)$ является стационарным (вспомните про кошек), то есть оно не меняется при хлопке. Поэтому заполняя таблицу в конце мы поставим число 1, которое (как и для кошек) означает длину периоду, то есть число хлопков требуемое, чтобы распределению стало таким, каким было в начале.

A	**B**	**C**	
6	0	0	
0	3	3	
2	2	2	1

Это то,как должна заполняться таблица, когды вы изучаете блуждание детей по этому лабиринту. ЧиТеперь покажем, как ее нужно заполнять, чтобы это было несложно младшекласснику:

A	B	C	
6	0	0	
0 000	3 300	3 300	
2 011	2 011	2 011	1

Итак пусть текущее распределение ребят есть $(0, 3, 3)$. Выясним сначала сколько будет после хлопка в комнате A: В ней никого не останется (поскольку и не было), придет 1 человек из B и один человек из C. Так в нижней строчке появились маленькие числа $0, 1, 1$ их потом можно стереть карандашом, а можно и оставить, чтобы легче было проверить. Потом мы этим числа суммируем и выясняем, что в комнату A пришло $0 + 1 + 1 = 2$ ребенка. Аналогично для B: один человек остался, никто не пришел из A и один человек пришел из B таким образом в комнате B будет $0 + 1 + 1 = 2$ человека. Такой способ позволяет разгрузить количество информации, которое надо одновременно держать в голове.

Задача 5.1. *Заполните таблицу динамики для рис. 5.5 для начальных распределений*

1. $(8, 0)$

2. $(4, 4)$.

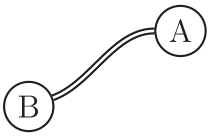


Рис. 5.3: Пример

Задача 5.2. *Заполните таблицу динамики для рис. 5.4 для начальных распределений*

1. $(8, 0, 0, 0)$
2. $(0, 4, 4, 0)$.

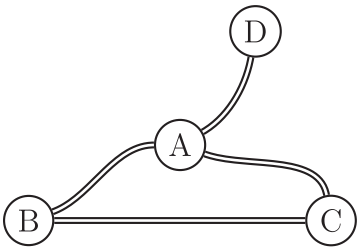


Рис. 5.4: Пример

В следующем примере на рисунке 5.5 появляются корридоры по которым можно ходить только в одном направлении. Например, если в комнае A было 4 детей, то они пойдут по двое по каждому из корридоров, и окажется, что в итоге, в комнате A останется двое, а двое уйдут. Если же было пятеро, то останется трое (1 никуда и не уходил, а двое пошли но пришли обратно).

Задача 5.3. *Заполните таблицу динамики для рис. 5.4 для начальных распределений*

1. $(6, 0)$
2. $(3, 3)$.
3. $(1, 5)$.

Рис. 5.5: Пример

Кажется, сейчас самое время поговорить, о том зачем же дети ходят туда и сюда. Ну, например, папа у одно из них крупных бизнесмен и продает мороженое. Допустим, что он продает лакомку, и в этом городе кроме лакомки и пломбира других сортов нет (это для простоты). Теперь следующее: этот самый папа в течение года спрашивал у каждого ребенка, покупающего мороженое: какое мороженое ты ел до этого? И он выяснил, что треть детей поевших его мороженое, в следующий раз перейдут на пломбир (соответственно 2/3 опять выбирают лакомку). С пломбиром же другая история: половина детей поевших пломбир перейдет на лакомку, а половина останется.

Эту комерческую картину мы можем изобразить следующим образом

Рис. 5.6: Пример

Вопрос, который нас интересуют вполне прозрачны, но совсем нетривиальны: Во сколько раз лакомки будет продавать больше?

Задача 5.4. *Заполните таблицу динамики для рис. 5.6 для начальных распределений*

1. $(10, 0)$

2. $(0, 10)$.

3. $(30, 30)$.

5.1 Ответы

Задача 5.1

A	**B**	**C**	**D**	
8	0	0	0	
2 2000	2 2000	2 2000	2 2000	
6 2112	1 0010	1 0100	0 0000	
0	3	3	2	
4	2	2	0	
3	2	2	1	**1**

A	**B**	**C**	**D**	
0	4	4	0	
4 0220	2 0020	2 0200	0 0000	
3 1110	2 1010	2 1100	1 1000	**1**

Задача 5.4

A	**B**	
0	10	
5	5	
6	4	1

A	**B**	
10	0	
7	3	
6	4	1

A	**B**	
30	30	
35	25	
36	24	1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Глава 6

Триг?

Вернемся к нашим дворцам. Дворцы вообще большие, просто нам лень прорисовывать все стенки. Так что: извините, остальные придется воображать. Нам также, иногда, будет полезно воображать, что в середине каждой комнаты стоит точка, как на картике.

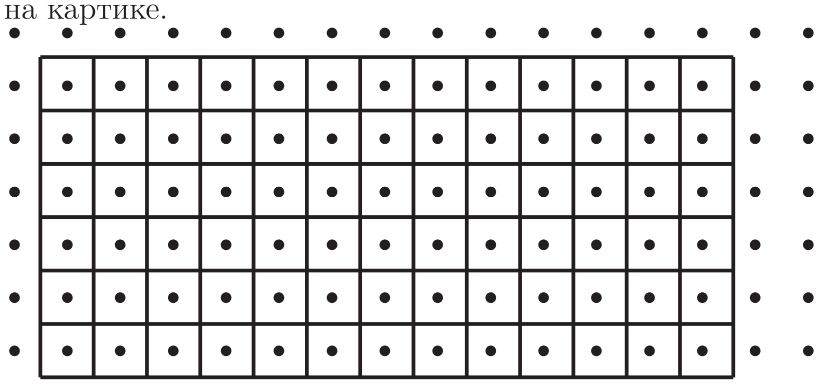


Рис. 6.1: Задача 3.15

Вот, теперь сотрем стенки и получится то, что математики называют решеткой:

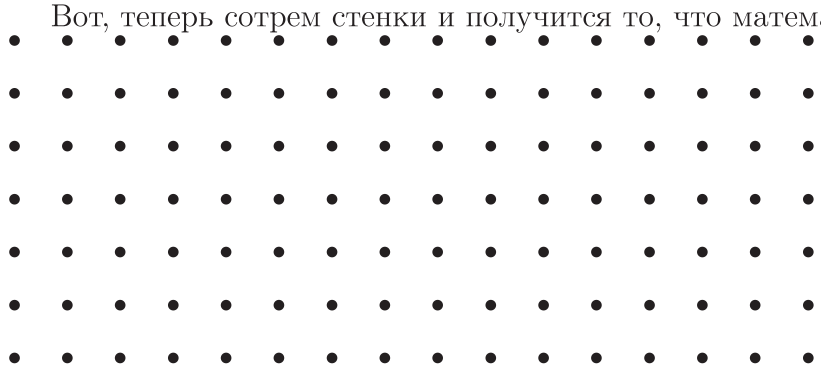


Рис. 6.2: Задача 3.15

отлично! теперь когда мы будем видеть такую решетку, надо всегда вспоминать, что это лишь центры комнат дворца. Ну, что такое теперь расстояние между двумя точками? правильно, надо сначала сказать а какой был с начала дворец. Расстоянием между двумя точками равно расстоянию между комнатами в которых они находятся. Также можно перенести определение окружности, эллипса и всего остального, что у нас было в главе про дворцы.

Задача 6.1. *Нарисуйте на решетке q−окружность радиуса 2.*

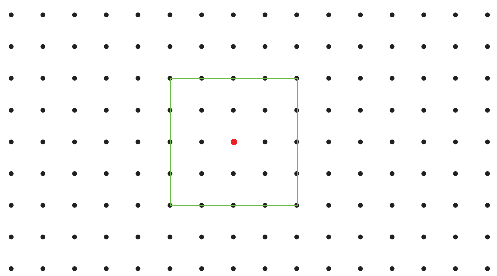


Рис. 6.3: Задача 3.15

На рисунке 6.1 мы видим центр и окружность радиуса 2. Сейчас мы научися мерить расстояние между двумя лучами, которые выходят из одной точки. Что такое луч? Представьте себе, что стенки стеклянные, а мы стоит в центре и смотрим на центр другой комнаты. Тогда мы увидим сразу много других центров, которые находятся за этим, вот множество всех этих центров и называется лучом. А на бумаге можно просто взять линейку и провести линию с началом в центре и проходящую через центр той комнаты, на которую вы смотрите.

Вот, это луч. Мы его так нарисовали, чтобы он проходил через точку нашей окружности, но это не важно. Для того, чтобы мерить угол между двумя лучами необходимо иметь... два луча, а у нас пока только один. Мы всегда (пока) будем мерить расстояние до горизонтального луча:

в школе его часто еще называют осью OX. Его конечно можно и дальше рисовать, но если листок очень большой, то ничего страшного если вовремя остановиться. Вот, осталось померить угол между этими лучами. Для этого надо: идти от того места, где окружность пересекается с OX вдоль окружности и считать шаги до тех пор пока не встретим второй луч (против часовой стрелки). Затем количество шагов, которые вы сделали надо поделить на радиус. Это и будем мера угла.

$$\text{Мера угла} = \frac{\text{Количество шагов от OX до луча вдоль окружности}}{\text{радиус окружности}}$$

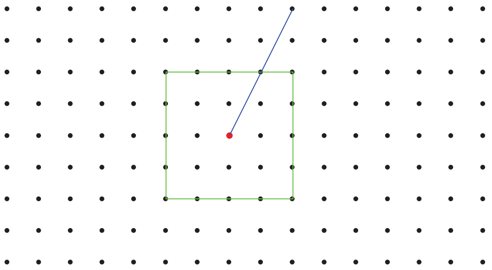


Рис. 6.4: Задача 3.15

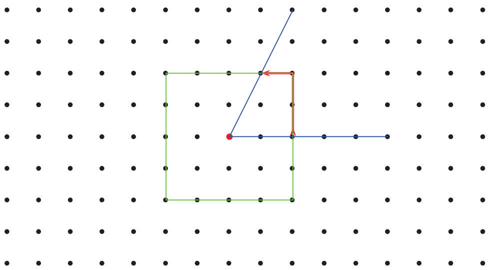


Рис. 6.5: Задача 3.15

В нашем случае мы сделали 3 шага (2 шага вверх и один налево см. рс6.5). Радиус окружности равен 2. Следовательно мера угла между этим лучами есть... 3/2.

Наш луч проходит гораздо больше чем через одну точку: на рисунке видна еще одна: надо проверить изменится ли мера угла если мы будем идти уже до этой точки. Если изменится, то это неинтересно: ведь угол не может зависеть от выбораточки.

Окружность какого радиуса надо взять чтобы добраться от OX до этой точки?

итак, окружность радиуса 4, а количество шагов, которое необходимо сделать равно 6, следовательно мера угла есть $6/4 = 3/2$. На бумаге расстояние между двумя лучами, которых зовут A и B будем обозначать $< (A, B)$. В нашем случае $< (OX, a) = 3/2$.

Задача 6.2. *Померяйте углы между лучами изображенными на рисунке 6.7 и осью OX.*

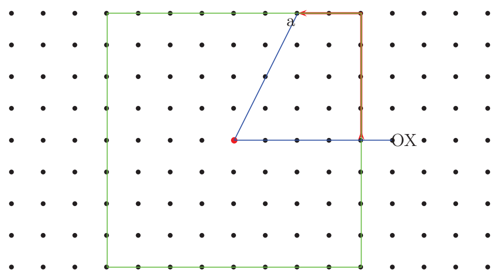


Рис. 6.6: Задача 3.15

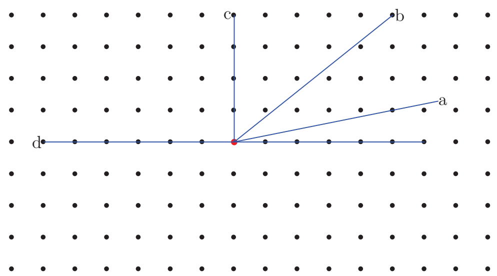


Рис. 6.7: Задача 6.2

Кстати, а чему равен угол $<(OX, OX)$, то есть между прямой OX и ней же самой? До этого занятия даже младенец сказал бы что нулю. Но от ума всегда горе. Давайте попытаемся дойти от OX до OX. Можно было бы никуда не ходить и сказать, что нуль, но представьте, что мы вышли и только потом об этом вспомнили: Вот мы вышли из точке на луче OX и пошли вдоль окружности (например радиуса 2) как на рисунке 6.8

и насчитали 16 шагов. Делим на радиус=2 и получаем 8. То есть

$$<(OX, OX) = 8$$

что тоже верно как и то,что $<(OX, OX) = 0$. Как бы $0 = 8$ но ничего страшного, Например, если мне звонят в квартиру один раз, то результат такой же как если бы позвонили дважды: или открою, или меня нет дома. Так что ситуаций где 1=2 сплошь и рядом, просто в каждом случае свои правила игры. Ну, а если бы я прошелся до

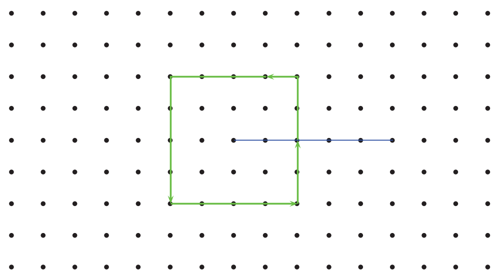


Рис. 6.8: Задача 3.15

луча 17 шагов? Ясно, что это то же самое, что если бы я сделал всего один шаг. Какой угол тогда? Правильно: 1/2.

Задача 6.3. *Нарисуйте лучи a, b, c так что $<(OX, a) = 7, <(OX, b) = 13, < (0X, c) = 20$.*

Задача 6.4. *Нарисуйте лучи a, b, c так что $<(OX, a) = 7/2, <(OX, b) = 13/3, < (0X, c) = 17/5$.*

Задача 6.5. *Нарисуйте лучи a, b, c так что $<(OX, a) = 21/2, <(OX, b) = 32/3, < (0X, c) = 80/7$.*

6.1 π нашего дворца

Числом π обычно называют меру угла между лучами лежащими на одной прямой и смотрящими в разные стороны

В $q-$ мера этого угла есть 4, а в $d-$дворце это 8, так и будем писать

$$\pi_q = 4, \quad \pi_d = 8$$

А если ясно о каком дворце речь, то индекс q или d можно опускать. Этим обозначением удобно пользоваться, потому что прямой угол всегда будет $\pi/4$ в каком дворце бы мы не были, а угол

изображенный на картинке 6.10 всегда будет $\pi/4$.

Задача 6.6. *В $d-$дворце определите угла (то есть нарисуйте лучи) составляющие угды $a. \frac{\pi}{4}$ $b. \frac{3\pi}{4}$. $c. 9\pi$.*

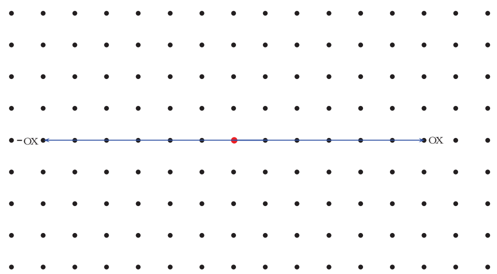


Рис. 6.9: Угол между двумя такими лучами обозначают числом π.

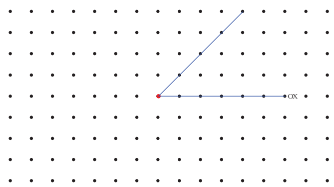


Рис. 6.10: $\pi/4$

Я напомню, что лучом мы называем все комнаты, центры которых мы видим, когда смотрим в одном направлении. Допустим мы видим какую-то комнату A. Можно посчитать расстояние до нее от центра O. Иначе говоря, определить радиус окружности на которой она лежит. Получится, что зная направление (угол) и количество шагов (расстояние) можно дойти до заданной точки.

Посмотрим на картинку 6.11, на ней кроме центра (точки O) еще отмечены комнаты A, B, C, D. определим угол до луча на котором лежит A и расстояние до нее. Ну, с расстоянием просто: в d-дворце до комнаты A можно добраться за 2 шага.

$$d - dist(O, A) = 2$$

Значит рисуем окружность радиуса 2 с центром в точке O и выясняем, идем вдоль

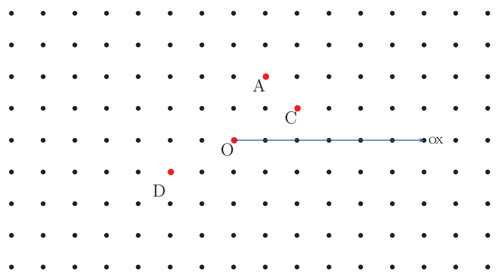


Рис. 6.11: Учимся определят полярные координаты

нее начинаяя с оси OX и делаем 3 шага до точки A. Таким образом угол есть

$$< (OX, OA) = 3/2$$

. **Note. Использование π в записи угла сразу только для тех, кто хорошо владеет дробями. Для всех остальных только при усвоении основного материала.**

Вот, мы выяснили, что комната A определяется расстоянием 2 и углом $3/2$. Можно эти данные писать через запятую: $(2, 3/2)$. А может $(3/2, 2)$. А можно $\begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ или как-нибудь еще хитрее. Вот, именно хитрее мы и поступим. Будем писать

$$A = 2e^{i\frac{3}{2}}.$$

правда красиво? Итак, если вы встретите запись, что в каком-либо дворце комната $B = 7e^{i2}$ означает, что вам надо найти комнату лежащую на окружности радиуса 7 на луче с углом 2.

Задача 6.7. *В $d-$дворце определите (обозначьте на картинке 6.11) комнаты с координатами $a.E = 7e^{i2}$, $b.F = 3e^{i4}$, $c.EG = 3e^{i2/3}$, $d.H = e^{2i}$, $I = e^{i}$, $J = 2e^{i0}$.*

6.2 Прогулки по дворцу

Давайте представим, что мы пришли в комнату $X_0 = 2e^{i0}$. И давайте по хлопку, прибавлять к расстоянию 3, что произойдет? мы перейдем в комнату $X_1 = 5e^{i0}$, потом в комнату $X_2 = 8e^{i0}$ и будем убегать все дальше и дальше от комнаты O.

Определение. Множество комнат через которые мы проходим повинуясь некоторому закону перехода называется *орбитой*

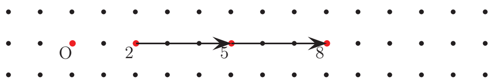


Рис. 6.12: Орбита движения $F(x) = 2x$ в начальной комнате с номером 2.

Задача 6.8. *Если вы начинаете в комнате* $B = 2e^{i0}$ *и каждый раз умнажаете расстояние на 2, обозначьте точки через которые вы пройдете (сколько хватит бумаги) на рисунке* 6.12.

Вы никогда не видели такого обозначения: $\lfloor\rfloor$? Оно означает взятие целой части[1], например

$$\lfloor 3.2 \rfloor = 3, \text{ или } \lfloor 5/2 \rfloor = 2, \text{ а } \lfloor 5 \rfloor = 5,$$

Теперь мы будем менять комнаты по следующему закону

$$F(x) = \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor$$

это означает, что мы делим номер комнаты на 3 и берем целую часть. Получится, что если мы начнем в комнате $X_0 = 10e^{i0}$, потом мы перейдем в комнату $X_1 = 3e^{i0}$, потому что $[10/3] = 3$, потом в комнату $X_2 = 1e^{i0}$, потом в комнату O, потом в комнату... опять O, так как $[0/3] = 0$.

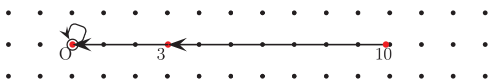


Рис. 6.13: Орбита движения $F(x) = \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor$ в начальной комнате с номером 10.

Получается, что мы всегда останемся в этой комнате. Как обычно, будем называть их *стационарными.*

Задача 6.9. *Если вы начинаете в комнате* $B = 10e^{i0}$ *и применяете формулу перехода* $F(x) = \left\lfloor \frac{2x}{3} \right\rfloor$

Давайте попробуем более сложную формулу перехода:

$$F(x) = \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + 4$$

Давайте выясним, что случится если мы начнем с комнаты $X_0 = 10e^{i0}$: делим 10 на 3 и берем целую часть, получается 3. затем прибавляем 4 и попадаем в комнату $X_1 = 7^{i0}$, действуя аналогично выясняем $X_2 = 6e^{i0}$, а $X_0 = 6e^{i0}$. Таким образом, комната 6 стационарная.

[1]иногда еще пишут [] но наше обозначение помогает вспомнить, в какую сторону округлять число

Рис. 6.14: Орбита движения $F(x) = \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + 4$ в начальной комнате с номером 10.

Получается, что мы всегда останемся в этой комнате. Как обычно, будем называть их *стационарными*.

Задача 6.10. *Если вы начинаете в комнате* $B = 10e^{i0}$ *и применяете формулу перехода* $F(x) = \left\lfloor \frac{2x}{3} \right\rfloor$

Задача 6.11. *Выясните, что случится при этом же отображении если* $F(x) = \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + 4$ *если вы начнете в комнате*
$a.X_0 = 2e^{i0}, b.X_0 = 5e^{i0}, c.X_0 = 14e^{i0}, d.X_0 = 21e^{i0}$

Получается, что откуда бы мы не начали, мы всегда будем стремиться к комнате номер 6. В таких случаях будем говорить, что эта стационарная комната-вечеринка. Но бывают и стационарные комнаты наказаний,откуда все хотят убежать, и только находясь в них, вы все время там остаетесь: вспомним тот закон, с которого мы начали $F(x) = 2x$. От какой комнаты все бегут, но если в нее попасть то в ней и останетесь?

Задача 6.12. *Выясните, что случится при отображении если* $F(x) = 2x$ *(то есть нарисуйте на картинке 5 элементов орбиты) если вы начнете в комнате*
$a.X_0 = 2e^{i0}, b.X_0 = 5e^{i0}, c.X_0 = 0e^{i0}, d.X_0 = 1e^{i0}$

Задача 6.13. *Выясните, что случится при отображении если* $F(x) = \lfloor x^2/4 \rfloor$ *(то есть нарисуйте на картинке 5 элементов орбиты) если вы начнете в комнате*
$a.X_0 = 1e^{i0}, b.X_0 = 2e^{i0}, c.X_0 = 4e^{i0}, d.X_0 = 6e^{i0}$

6.3 Умножение комнат

До сих пор мы развлекались лишь движением вдоль одной прямой. Чтобы расширить свой диапозон возможностей давайте введем перемножение комнат Давайте возьмем комнату на оси OX: $X = 3e^{i0}$ и умножим ее на $Y = 2e^{i2}$. Давайте договоримся,что при умножении комнат, расстояния уножаются а углы складываются. Новое расстояние будет $3x2 = 6$, а новый угол будет $0 + 2 = 2$, то есть

$$XY = 6e^{i2}.$$

А если $X = 3e^{i2}$, $Y = 4e^{i5}$,то

$$XY = 12e^{7}.$$

Задача 6.14. *Перемножьте комнаты X и Y и отметьте ответы на рисунке* 6.15
$a.X = 2e^{i0}, Y = 3e^{i0}$
$b.\ X = e^{i1}, Y = 2e^{i1/2}$
$c.\ X = e^{i1/2}, Y = 2e^{i1/2}$

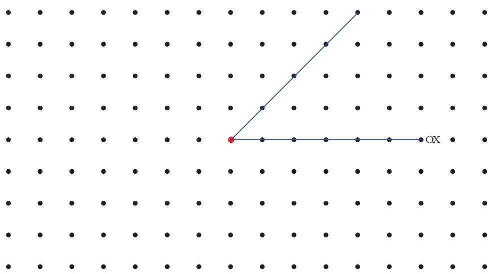


Рис. 6.15: Перемножение комнат

Задача 6.15. *А что будет если мы начнем в комнате $X = 2e^{i4/2}$ и будем применять для перехода формулу $F(X) = X^2/4$, то есть каждый раз будем умножать на X и делить на,какая получится орбита?*

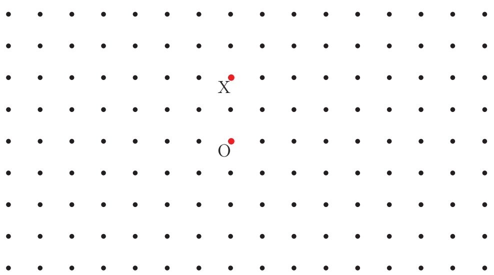


Рис. 6.16: Перемножение комнат

Задача 6.16. *Нарисуйте орбиту точки $X = 3e^{i2/3}$ при отображении $F(x) = X^2/9$*

Определение. В предыдущих задачах мы встретились с комнатами, через котороые мы будем проходить много раз. Такие комнаты будем называть *блуждающими.*

Задача 6.17. *Нарисуйте орбиту точей при отображении $F(x) = \lfloor X^2/5 \rfloor$ (по 5 точек каждой орбиты)*
$a.X =$
$b.$
Определите тип каждой орбиты. Стационарная, стремится к стационарной, убегает за край бумаги или блуждающая.

6.4 Ответы

Задача 6.2. $<(OX,a)=1/5$, $<(OX,b)=4/5$,$<(OX,c)=1/2$,$<(OX,d)=4$.

Задача 6.3. См рисунок 6.17. Например $<(OX,b)=20=20-8-8=4$. То есть надо отложить угол равный 4. Если окружности радиуса 2, то надо пройти $4*2=8$ шагов.

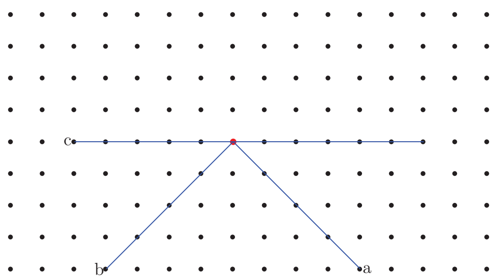


Рис. 6.17: Задача 6.3

Задача 6.3. См рисунок 6.17. Например $<(OX,b)=13/3$. Это означает, что надо пройтись вдоль окружности радиуса 3 тринадцать шагов. То есть надо отложить угол равный 4. Если окружности радиуса 2, то надо пройти $4*2=8$ шагов.

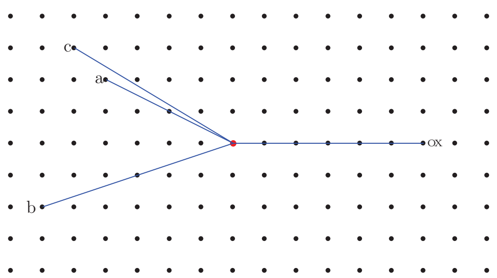


Рис. 6.18: Задача 6.4

Глава 7

Игра жизнь

Глава 8

Движение в потенциальном поле

Представим, что мы сели в машину и поехали. Поехали со скоростью 2 комнаты за хлопок :) Такую скорость будем записывать как $V = (2, 0)$ это означает, что мы делаем 2 шага направо, и 0 шагов вверх. Если было бы написано, $V = (-2, 1)$ это означало бы, что за хлопок надо было бы делать 2 шага налево и один шаг вверх. Итак мы поехали со скоростьб $V = (2, 0)$. Наш путь виден на картинке:

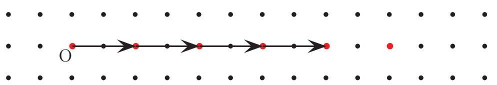


Рис. 8.1: Двидение с постоянной скоростью.

Мы даже напишем нашу скорость после каждого хлопка:

$$V_0 = (2, 0)$$
$$V_1 = (2, 0)V_2 = (2, 0)$$

Конечно, она не меняется. Теперь мы введем, *толкателей* или выражаясь по научному: *потенциал*. Это набор таких дядечек, которые все время толкаются.

Рис. 8.2: Потенциал: набор толкающихся дядечек

Представьте что мы стоит во дворце (см. рису 8.2) и в комнатах по бокам стоят дядечки. Число, которое приписано комнате это сила,с которой дядечка пытается нас выпихнуть. Итак, на картинке дядечка слева пихается сильнее на $5 - 3 = 2$. Это означает, что после следующего хлопка мы сделаем два дополнительных шага направа. Напирмер, если наша скорость до попадания в эту комнату была бы $V_0 = (1, 0)$, то попав, она бы стала $V_1 = (3, 0)$.

Давайте рассмотрим пример на рисунке 8.3. Мы движемся через ряд дядечек, которые все сильней и сильней.

Рис. 8.3: Потенциал: набор толкающихся дядечек. Если числа не написано, значит там нет дядечки, или дядечка с силой нуль. Не толкается, вообщем. Приличный такой дядечка, сидит - никого не трогает.

Начнем движение в точке обозначенной красным цветом со скорстью $V_0 = (3, 0)$. Рисуем стрелочку длиной 3 и попадаем в комнату.

Рис. 8.4:

Дядечки сразу стали толкаться поэтому надо пересчитать скорость. правый дядечка толкается на $5 - 3 = 2$ сильнее чем левый, поэтому скорость будет $V_1 = (1, 0)$. Мы все еще движемся направо только медленнее:

Рис. 8.5:

Наша скорость уж $(1, 0)$, а дядечки заставляют нас еще уменьшить свою скорость. Дядечка справа все также на $6 - 4 = 2$ сильнее чем дядечка слева, поэтому наша скорость становится уже $V_2 = (-1, 0)$ и мы движемся уже налево. Заметьте, что каждый дядечка сам по себе ничего не хочет, он лишь отталкивает нас от себя, но совокупность всех дядечек заставлеят нас двигаться налево.

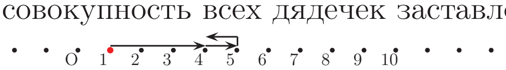


Рис. 8.6:

Мы уже движемся налево со скоростью $(-1, 0)$, а изменение скорость опять равно $5 - 3 = 2$, то есть $V_3 = (-3, 0)$.

Рис. 8.7:

Итак мы уже в том месте, где начали, и следующая скорость равна уже $V_4 = (-5, 0)$, у нас уже не хватит места чтобы нарисовать, соответствующую стрелку, просто покажем, что мы вылезаем за край:

Рис. 8.8:

Мы рисовали все промежуточные шаги, конечно все можно делать на одном рисунке и окончателный ответ должен выглядеть как рисунок 8.8 снабженны набором скоростей:

$$\begin{aligned} V_0 &= (3,0) \\ V_1 &= (1,0) \\ V_2 &= (-1,0) \\ V_3 &= (-3,0) \\ V_4 &= (-5,0) \end{aligned}$$

Здесь возникает вопрос, а что будет с ним дальше. Ну, на самом деле мы с этим уже разбирались в начале этой главы. Что происходит если мы начали движение со скорсотью $V_0 = (-5,0)$ и на протяжении пути никто не толкается?? Правильно, мы так и будем двигаться с постоянной скоростью $V_0 = (-5,0)$, то есть за каждый хлопок делать по 5 шагов налево.

Обычно все потенциалы, которые мы будем рассматривать будут именно такими: все дядечки вне поля нашей видимости точно "приличные"то есть не толкаются, а сcли толкаются то одинаково (поэтом нам все равно).

Задача 8.1. *Разберите, что будет если начать движение в красной точке со скоростью* $V_0 = (1,0)$ *в таком потенциале, где все дядечки толкаются одинаково:*

Рис. 8.9: Дядечки толкаются сильно, но одинаково, поэтому они "приличные"поскольку не заставляют нас менять свою скорость

Обратите внимание, что дядечка сам по себе не может быть "приличным это свойство группы дядечек. Посмотрите на следующую каритнку.

Рис. 8.10: Дядечка не может сделать так чтобы в его комнате не толкались.

Какую силу надо выбрать дядечке в красной комнате, чтобы нас, если мы находимся в этой самой комнате, никто не толкал?... Вот и получается, что дядечка не всегда может быть приличным даже если хочет. Однако, можно ввести понятие «неприличного» дядечки:

Определение Дядечка, называется неприличным, если выполняются два условия
1. Если мы находимся в его комнате на нас действует ненулевая сила.
2. Если он может выбрать другую силу, так что на находящегося в его комнате человека, не действует сила.

Задача 8.2. *Привидите пример потенциала в котором есть неприличный дядечка.*

Давайте посмотрим на потенциал "ступенька".

Рис. 8.11: .

Если мы начнем со скорстью $V_0 = (3, 0)$ в красной точке, то у нас должен получиться такой рисунок: и такой набор скоростьей:

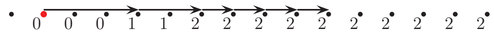


Рис. 8.12: .

$$\begin{gathered} V_0 = (3, 0) \\ V_1 = (2, 0) \\ V_2 = (1, 0) \\ V_3 = (1, 0) \\ \dots \end{gathered}$$

Задача 8.3. *Вычислите движение для потенциала на рисунке 8.12 с начальными скоростями*
a.$V_0 = (3, 0)$,
b.$V_0 = (1, 0)$ *Укажите комнату, в которой мы никуда не двигаемся в течении 2 хлопков.*
c.$V_0 = (4, 0)$

Для того, чтобы делать это упражнение надо четко помнить что такое скорость: это количество шагов на которое надо сдвинуться после хлопка. Наш порядок действий:
0. Дана точка исхода и скорость V_0. Мы сдвигаемся на V_0 шагов.
1. Пересчитываем скорость, теперь она называется V_1.

2. Происходит хлопок. И мы сдвигаемся на V_1 шагов.
Повторяем. Если не придераживаться этой схемы можно легко запутаться.

Давайте теперь разберем более высокую "ступеньку". Постарайтесь до выполнения задания 8.4,описать, что будет происходить в каждом случае.

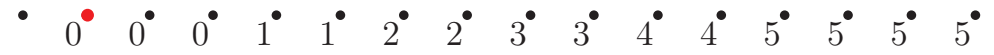


Рис. 8.13: Ступенька

Задача 8.4. *Вычислите движение для потенциала на рисунке 8.13 с начальными скоростями*
$a.V_0 = (1, 0)$,
$b.V_0 = (2, 0)$
$c.V_0 = (3, 0)$
$d.V_0 = (4, 0)$
$e.V_0 = (5, 0)$
$f.V_0 = (6, 0)$

Следующий потенциал называется яма(см. рисунок8.14). Почему яма вы догадаетесь, когда мы подробно изучим движение в этом потенциале. Для начала ответьте на вопрос, что если вы окажетесь с нулевой скоростью $V_0 = 0$ в комнате дядечки который толкается с силой 0 (он всего один такой)?.. Правильно, вы там навсегда и останетесь, потому что соседи этого дядечки толкаются с одинаковой скоростью. Это, так называемая неподвижная точка.

Рис. 8.14: Яма

Задача 8.5. *Вычислите движение для потенциала на рисунке 8.14 с начальными скоростями если начинать в красной точке*
$a.V_0 = (1, 0)$,
$b.V_0 = (2, 0)$
$c.V_0 = (3, 0)$
$d.V_0 = (4, 0)$
$e.V_0 = (5, 0)$
$f.V_0 = (6, 0)$

Задача 8.6. *Вычислите движение для потенциала на рисунке 8.14 с начальными скоростями если начинать в синей точке* $a.V_0 = (0, 0)$,
$b.V_0 = (1, 0)$
$c.V_0 = (-1, 0)$
$d.V_0 = (2, 0)$

Следующий потенциал называется Горка(см. рисунок8.15). П Для начала ответьте на вопрос, что если вы окажетесь с нулевой скоростью $V_0 = 0$ в комнате дядечки который толкается с силой 0 (он всего один такой)?.. Правильно, вы там навсегда и останетесь, потому что соседи этого дядечки толкаются с одинаковой скоростью. Это, так называемая неподвижная точка.

Рис. 8.15: Яма

Задача 8.7. *Вычислите движение для потенциала на рисунке 8.15 с начальными скоростями если начинать в красной точке*
$a.V_0 = (1, 0)$,
$b.V_0 = (2, 0)$
$c.V_0 = (3, 0)$
$d.V_0 = (4, 0)$
$e.V_0 = (5, 0)$
$f.V_0 = (6, 0)$

Задача 8.8. *Вычислите движение для потенциала на рисунке 8.15 с начальными скоростями если начинать в синей точке* $a.V_0 = (0, 0)$,
$b.V_0 = (1, 0)$
$c.V_0 = (-1, 0)$
$d.V_0 = (2, 0)$

Мы видели, что и у потенциала Яма и у потенциала горка есть неподвижная точка. То есть комната, в которой если оказаться с начальной скоростью $V_0 = 0$, то мы никуда из нее не уйдем. В этом яма и горка похоже,они отличаются тем, что будет происходить если мы окажемся рядом с неподвижной точкой с нулевой скоростью $V_0 = 0$. Ответьте на этот вопрос. (задача 8.6.a и 8.9.a)

8.1 Движение вокруг солнца

Теперь будем двигаться не только вдоль одной прямой, но по всей плоскости. То есть дяденьки будут не только по бокам от нас, но еще сверху и снизу. Если мы окажимся в красной точке рисунка 8.16 со скоростью $V_0 = (0, 0)$, то наша скорость изменится

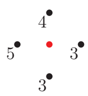


Рис. 8.16: Потенциал: набор толкающихся дядечек

как $V_1 = (-1, 2)$. Потому что дяденька сверху на один (3-4=-1) сильнее. Для простоты будем считать что дядечки, которые находятся от нас в комнатах наискосок, никуда нас не толкают.

На рисунке 8.17 можно увидеть нашу Землю. Можно стартовать как с нее, так из точки находящей вне ее. Если наш путь с ней пересечется (или мы прийдем в нее с ненулевой скоростью) то будем считать что мы разбились.

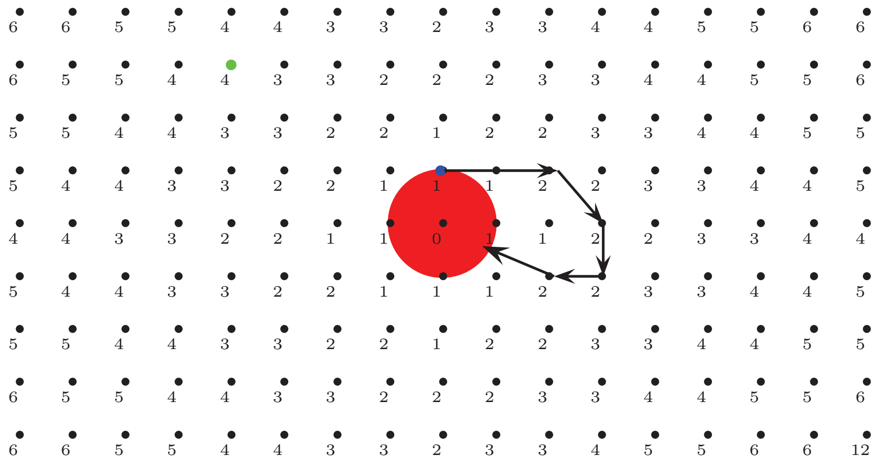


Рис. 8.17: $\pi/4$

Мы начинаем с северного полюса (Синей точки) со скоростью $V_0 = (2, 0)$, попадаем в точку где где нас толкают вниз и влево на один, поэтому следующая скорость будет $V_1 = (1, -1)$. Мы попадаем в точку, где сверху и снизу дяди толкаются одинаково, поэтому скорость в этом направлении не изменится: $V_2 = (0, -1)$, $V_3 = (-1, 0)$ и последняя скорсоть $V_4 = (-2, 1)$, последняя потому что мы упадем на землю.

В следующих двух задачах постарайтесь до решения, предугадать качественно траекторию.

Задача 8.9. *Вычислите движение для потенциала на рисунке 8.17 если начинать в синей точке со скоростью* $V_0 = (0, 2)$.

Как и должно быть, вылетая ровно вверх: мы двигаемся все время по прямой.

Задача 8.10. *Вычислите движение для потенциала на рисунке 8.17 если начинать в зеленой точке со скоростью* $a.V_0 = (0, 0)$, $b.V_0 = (1, -1)$ $b.V_0 = (-1, 1)$

8.2 Движение вокруг Земли

Посмотрите на рисунок 8.18. Мы знаем что если мы стартуем из синей точки по направлении к земле или от земли, мы на нее вернемся. Что будет если мы стартуем из синей точке в сторону от Земли?

Задача 8.11. *Вычислите движение для потенциала на рисунке 8.18 если начинать в синей точке со скоростью* $a.V_0 = (0,0)$, $b.V_0 = (2,0)$ $c.V_0 = (3,0)$
в синей точке со скоростью $d.V_0 = (0,0)$, $e.V_0 = (0,1)$ $f.V_0 = (0,-2)$

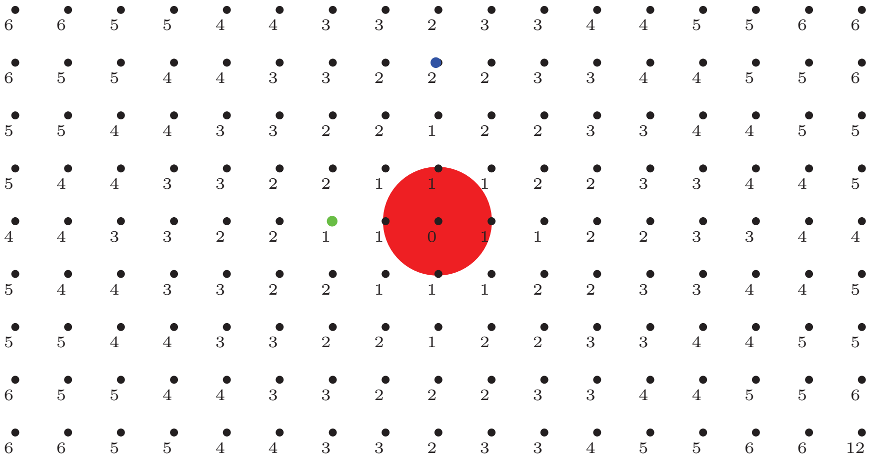


Рис. 8.18: Орбита

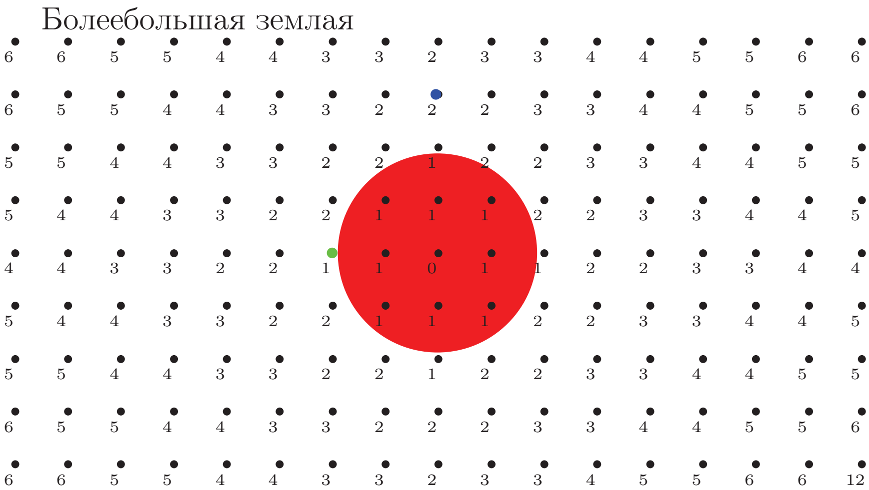


Рис. 8.19: Орбита

Глава 9

Машина Тьюринга

По желанию преподавателя можно использовать мир из книжки А.К.Вестли "мама, папа, восемь детей и грузовик".

"...Previously, they lived in the city, in a small apartment, but recently they bought a cabin in the woods, and could even afford their own cow. A father has a lot of worries at home, the truck seemed to become an adult so it could well work a little bit on its own, to free up Father for his family. Father has realized it, they are very well aware of each other, and he began to think how you could he use it, as the truck was still not a human, so he could not just say: "transfer the goods there, then go back to the warehouse ". He could remember only one instruction. Father was a very serious person, who brings everything to the end, no matter what it takes, we know this is not a joke to bring up once the whole eight children Thus, he decided to enumerate all 8 stations that he and the truck were serving" ..

На картинке снизу изображено пять станций. Третью станция также является складом. Станции соединены дорогами. Число внизу обозначает количество ящиков, которые в настоящий момент находятся на станции. На этой картинке: на первой станции два ящика, а остальные станции пусты. Сейчас мы решим задание для грузовичка

Задача 9.1. *Перевести все ящики с 1 станции на склад. Работа начинается на складе и заканчивается на складе.*

Решение задачи 9.1: Решение представлено на рисунке 9.1, в начале работы грузовик должен быть развернут в сторону 1 станции.

1	2	3	4	5
2○	0	0	0	0

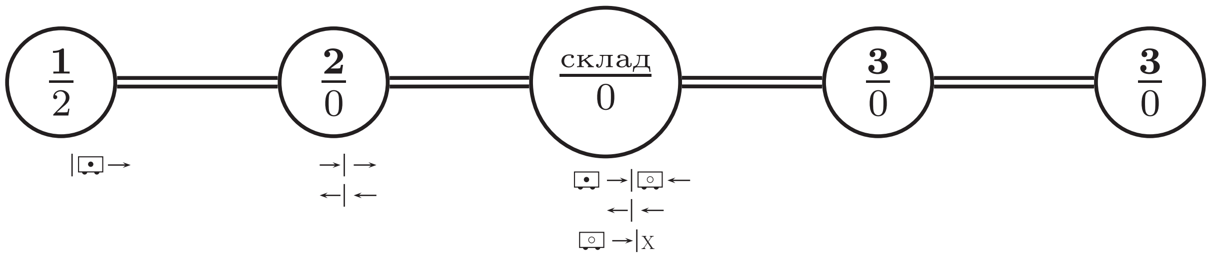


Рис. 9.1: Приме

$\leftarrow\!|\leftarrow$ Если ты повернут налево, то едь налево

Рис. 9.2: Приме

Литература

[1] A.K. Zvonkin. *Mathematics for little ones.* – Journal of Mathematical Behavior, 1992, vol. 11, no. 2, 207–219.

[2] A.K. Zvonkin. *Children and* C_5^2., 1993, vol. 12, no. 2, 141–152.

[3] E.Lakshtanov, O.German, *Paper Minesweeper"or how to play "Minesweeper"without a computer*, Applicable Analysis, 89(12), 2010, 1907-1916.