

Exercícios para Processamento Digital de Sinal

1 Transformada e Série de Fourier

Exercício 1 Considere o seguinte sinal $x(t) = \sin^2(10\pi t)$. Encontre uma forma aditiva para este sinal e represente graficamente o seu espectro. Qual o número de componentes espectrais? Qual a frequência mais elevada presente no sinal?

Exercício 2 Calcule a transformada de Fourier do seguinte sinal $x(t) = 5 + 2 \cos(2\pi 20t)$ e esboce o seu gráfico.

Exercício 3 Utilize o integral de Fourier para calcular todos os coeficientes da série de Fourier da função seno elevado ao cubo, ou seja, calcule

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin^3(3\pi t) e^{-j(2\pi/T_0)kt} dt \quad (1)$$

Sugestão: Obtenha primeiro o período da função para que o intervalo de integração seja conhecido. Utilize a fórmula de Euler para a função seno.

Exercício 4 Faça um esboço do espectro do sinal definido por

$$x(t) = \sum_{k=-3}^3 \frac{1}{1+jk} e^{jkt} \quad (2)$$

Exercício 5 Calcule os coeficientes da série de Fourier de uma onda quadrada de período T e amplitudes A e B com $A < B$. Observe a diferença para as duas situações:

- $A = -1$ e $B = 1$
- $A = 0$ e $B = 2$

Exercício 6 Um sinal periódico é descrito pela seguinte equação

$$x(t) = 2 + 4 \cos(40\pi t - \frac{1}{5}\pi) + 3 \sin(60\pi t) + 4 \cos(120\pi t - \frac{1}{3}\pi) \quad (3)$$

- Determine a frequência fundamental ω_0 , o período fundamental T_0 , o número de termos N e os coeficientes da série de Fourier do sinal $x(t)$. Obtenha estes valores sem o cálculo de integrais.
- Esboce o espectro de $x(t)$ indicando a amplitude complexa de cada componente de frequência.
- Considere um novo sinal $y(t)$ obtido pela adição de uma sinusóide ao sinal $x(t)$

$$y(t) = x(t) + 10 \cos(50\pi t - \pi/6). \quad (4)$$

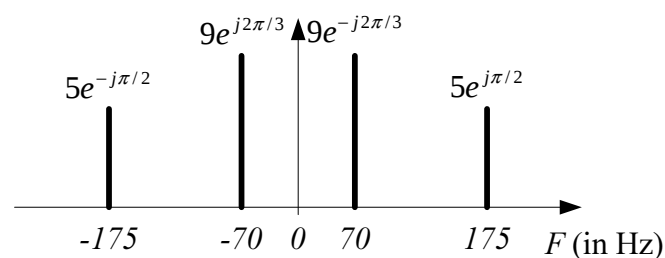
- Como foi mudado o espectro de $x(t)$? Continua a ser periódico? Se sim qual é o período fundamental?

Exercício 7 Neste problema abordamos o fenómeno do batimento entre notas. Quando se multiplicam duas sinusóides:

$$x(t) = \cos(2\pi(40)t - \pi/3) \cos(2\pi(600)t + \pi/4) \quad (5)$$

o sinal resultante continua a ter uma representação espectral. Para o obter é necessário encontrar uma combinação aditiva de sinusóides para $x(t)$

- Utilize a fórmula de Euler para obter $x(t)$ como uma soma de exponenciais.
- Esboce o espectro de $x(t)$
- Dado que o sinal $x(t)$ é periódico determine a frequência fundamental.



Exercício 8 O espectro do sinal $x(t)$ encontra-se representado na figura em cima.

- Escreva uma equação para o sinal $x(t)$
- Se $x(t)$ é um sinal periódico qual é o período?

Exercício 9 Mostre que uma soma de N sinusóides com a mesma frequência ω_0 mas amplitudes e fases variáveis resulta num sinal da forma

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (6)$$

Exercício 10 Ajuste de guitarras e séries de Fourier. Considere duas sinusóides, uma com uma frequência de 440Hz (Lá 4 padrão) e outra com 445Hz. Considere uma fase aleatória para cada uma destas sinusóides e que a sua soma resulta no sinal $y(t)$.

- Calcule os coeficientes da série de Fourier de $y(t)$
- Calcule igualmente a sua transformada de Fourier recorrendo à função $\delta(t)$
- Qual a frequência fundamental de $y(t)$?
- Gere o sinal $y(t)$ no Matlab utilizando uma frequência de amostragem de 8000Hz e uma duração de 1 segundo
- Obtenha no Matlab um gráfico de $y(t)$ e meça a frequência da envolvente. Com base no observado proponha um método de afinar uma guitarra.

2 Série Discreta de Fourier

Exercício 11 Calcule a DFT do seguinte sinal $x(n) = \{1, 1, 0, 0\}$

Exercício 12 Utilize a soma de uma série geométrica

$$\sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k = \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha} \quad (7)$$

para mostrar que

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi k n / N} = \begin{cases} N & n/N \in \mathbb{Z} \\ 0 & n/N \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad (8)$$

Exercício 13 Considere um sinal $x(n)$ com N pontos e o sinal $y(n)$ obtido a partir da concatenação de L zeros no final de $x(n)$

$$y(n) = \underbrace{[x(0), x(1), \dots, x(N-1)]}_N \underbrace{[0, 0, \dots, 0, 0]}_L \quad (9)$$

- Calcule a DFT do sinal $y(n)$ em função do sinal $x(n)$. Como interpreta o resultado?
- Considere que o sinal $x(n)$ é constituído por duas sinusóides de frequências próximas. Com qual das DFTs obterá uma melhor discriminação na determinação das frequências das sinusóides
 - DFT do sinal $x(n)$ com $N + L$ observações
 - DFT do sinal $y(n)$

Exercício 14 Calcule a DTF dos seguintes sinais

- $x(n) = \{-1, 1\}$
- $y(n) = \{-1, 1, -1, 1\}$
- $v(n) = \{-1, 0, 1, 0\}$

Exercício 15 Mostre que a Série Discreta da Fourier (DFT) se pode obter por amostragem da transformada de Z em N pontos regularmente espaçados na circunferência de raio unitário.

Exercício 16 Calcule a DFT de cada uma das seguintes sequências

- $x(n) = \delta(n)$
- $x(n) = \delta(n - n_0)$
- $x(n) = a^n, \quad 0 \leq n \leq N - 1$

Exercício 17 Utilizando a definição da DFT de um sinal $x(n)$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \quad (10)$$

mostre que a DFT de $x(-n)$ é dada por $X^*(k)$.

3 Transformada de Fourier

Exercício 18 Calcule a transformada de Fourier de um pulso rectangular com duração τ e amplitude $1/\tau$. Obtenha a transformada no limite, quando τ tende para zero.

Exercício 19 Calcule a transformada de Fourier da função $A \cos(\omega_0 t)$

Exercício 20 Utilizando o resultado das alíneas anteriores calcule a transformada de Fourier da função $A \cos(\omega_0 t)$ truncada para uma duração τ ($t \in [0 \dots \tau]$).

Exercício 21 Demonstre a seguinte propriedade da transformada de Fourier

$$x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X(j\omega/a) \quad (11)$$

Exercício 22 Demonstre a seguinte propriedade da transformada de Fourier

$$x^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(-j\omega) \quad (12)$$

Exercício 23 Calcule a transformada de Fourier do seguinte sinal

$$x(t) = e^{-bt} u(t) \quad (13)$$

em que $b > 0$ e $u(t)$ é a função degrau unitário.

4 Transformada de Z

Exercício 24 Calcule a transformada de Z da sequência $u(n) = \{1, -1, 1, -1\}$

Exercício 25 Calcule a transformada de Z da sequência

$$x(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (14)$$

Exercício 26 Calcule a resposta a impulso de um sistema com a seguinte função de transferência

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (15)$$

Utilizando o resultado do exercício anterior calcule a resposta do sistema $H(z)$ a um degrau unitário.

Exercício 27 Calcule a convolução de $x(n)$ com $h(n)$ para os seguintes casos

a) $x(n) = \{1, 1, 1, 1, 1\}$ $h(n) = \{1, -1\}$

b) $x(n) = \{1, 1, 1, 1, 1\}$ $h(n) = \{1, 1\}$

Calcule de seguida a transformada de Fourier de tempo discreto de cada um dos $h(n)$ e com base nestas justifique o resultado obtido nas duas convoluções anteriores.