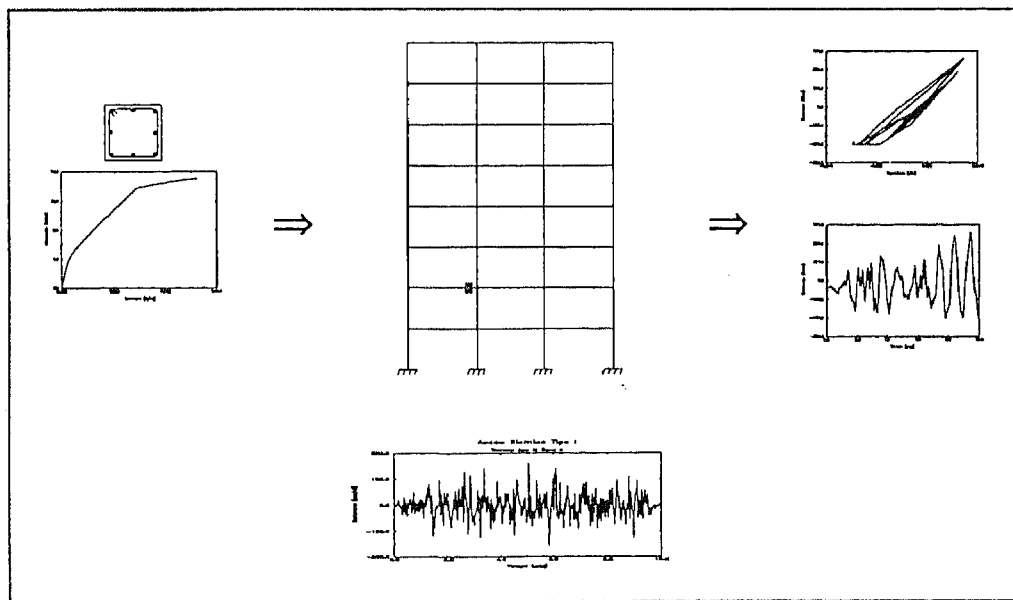


FACULDADE DE ENGENHARIA DA  
UNIVERSIDADE DO PORTO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

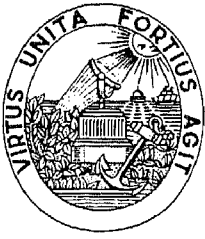
# MODELO NUMÉRICO PARA A ANÁLISE SÍSMICA DE PÓRTICOS PLANOS DE BETÃO ARMADO

*Humberto Salazar Amorim Varum*



Dissertação para Mestrado em Estruturas de Engenharia Civil

Porto, Novembro de 1995



FACULDADE DE ENGENHARIA DA  
UNIVERSIDADE DO PORTO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

# MODELO NUMÉRICO PARA A ANÁLISE SÍSMICA DE PÓRTICOS PLANOS DE BETÃO ARMADO

*Humberto Salazar Amorim Varum*

Licenciado em Engenharia Civil  
pela Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Dissertação submetida para satisfação parcial dos  
requisitos do grau de mestre  
em  
Estruturas de Engenharia Civil

Dissertação realizada sob a supervisão do  
Professor Auxiliar Aníbal Guimarães da Costa  
do Departamento de Engenharia Civil  
da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

0424  
24092

UNIVERSIDADE DO PORTO
Faculdade de Engenharia
BIBLIOTECA
N.º 24092
CDU
Data 03.11.1995

Porto, Novembro de 1995

*Aos meus Pais pelo seu exemplo*

*Aos meus irmãos*

"O Homem descobre-se quando  
se mede com o obstáculo"

Saint-Exupéry

## AGRADECIMENTOS

Ao apresentar este trabalho desenvolvido na Secção de Estruturas da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto sob a orientação do Professor Aníbal Guimarães da Costa, desejo expressar os meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para que fosse possível a sua realização, e de uma forma muito especial:

- ao Professor Aníbal Costa, pela orientação e interesse manifestado na elaboração desta dissertação, pela forma amigável como acompanhou o seu desenvolvimento, pela paciência demonstrada e pelo constante incentivo, bem como pelos inúmeros ensinamentos que me transmitiu;
- aos Professores Álvaro Azevedo e Manuel de Azeredo, pela constante disponibilidade, pelo tempo dispendido em proveitosos esclarecimentos e pelos meios de cálculo postos a disposição;
- a todos os meus colegas e em particular aos amigos Daniel Oliveira, Marco Baptista, Francisco Bernardo, João Guerra, Tiago Pinto, Alberto Figueiredo e Rui Calçada, pela companhia e pelo incentivo sempre demonstrado durante a execução deste trabalho;
- aos Professores Raimundo Delgado e Rui Faria pela disponibilidade e pelos esclarecimentos prestados;
- às senhoras D. Vitória Coelho, D. Elvira Moreira e D. Clotilde Bento, pela total disponibilidade demonstrada nos serviços administrativos;
- ao Sr. Manuel Carvalho, pelo excelente trabalho de processamento de texto, preparação das figuras e composição final de toda a documentação;
- à minha família e de uma forma muito especial aos meus pais e irmãos, pelo apoio e incentivo sempre demonstrados no decorrer do trabalho e pelo exemplo a seguir que sempre constituíram para mim. Sem eles a realização deste trabalho não seria possível;
- à Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica, pelo apoio financeiro prestado sob a forma de bolsa de mestrado;
- aos colegas docentes da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, pelas facilidades concedidas para a concentração na fase final deste trabalho.

## Palavras-chave:

- Análise sísmica;
- Peças lineares de betão armado;
- Análise não linear em flexão;
- Modelo de Takeda;
- Rótula plástica;
- Ductilidade.

## RESUMO

O objectivo principal desta tese é o desenvolvimento de um modelo numérico que simule o comportamento sísmico de pórticos de betão armado. Desenvolve-se assim, neste trabalho um modelo não-linear para a análise estática e/ou dinâmica de edifícios de betão armado.

A análise estrutural é efectuada modelando o edifício em pórticos planos. A idealização desses pórticos é feita a custa de modelos não-lineares que reproduzem o comportamento histerético dos seus elementos de betão armado sujeitos à flexão. Estes modelos são definidos por uma curva-base trilinear com degradação de rigidez e de resistência, podendo simular outros efeitos como o de "pinching", "slipping" e " $P-\Delta$ ". Salienta-se a possibilidade de simular elementos com comportamento distinto para os dois sentidos de flexão.

A calibração dos diferentes parâmetros do modelo foi obtida com base em resultados experimentais e a sua implementação no modelo é feita com recurso a curvas determinadas a partir de análises não-lineares ao nível das secções (usando um modelo de fibras).

O modelo numérico consiste na modelação do elemento de barra com três graus de liberdade por nó, usando rótulas plásticas na extremidade das barras sempre que o momento nessa extremidade ultrapasse o valor do momento de fendilhação. O comportamento não-linear dessas rótulas é simulado através do modelo de Takeda, que reproduz a fendilhação, degradação de resistência e rigidez.

As equações de movimento são resolvidas por integração passo-a-passo, usando o método de Newmark e fazendo uma análise incremental da história de solicitações no tempo.

É feita a aplicação do modelo desenvolvido ao cálculo sísmico de pórticos de betão armado para determinar as ductilidades exigidas nos diferentes elementos.

São apresentadas as ductilidades exigidas nas diversas secções, para além das curvas de evolução momento-curvatura, momento-tempo, curvatura-tempo, e deslocamentos, velocidades e acelerações dos nós de pórtico.

Verifica-se que o modelo desenvolvido simula bem o comportamento de pórticos de betão armado podendo esta ferramenta ser útil no desenvolvimento de trabalhos futuros, nomeadamente para a avaliação de coeficientes de comportamento em pórticos planos de betão armado.

## ABSTRACT

The objective of this thesis is the development of a numerical model for the seismic behaviour of reinforced concrete frames. A non-linear global model for the static or seismic analysis of reinforced concrete buildings is presented in this work.

The structural analysis is carried out by modelling the building with plane frames. The idealisation of these frames is done using non-linear models that reproduce the hysteretic behaviour of reinforced concrete elements subjected to bending. These models are defined by a trilinear law with degradation of stiffness and strength, which is able to simulate other effects as “pinching”, “slipping” and “ $P-\Delta$ ”. It should be noted that the model has the possibility of simulating elements with distinct behaviour according to the sign of the bending moment.

The calibration of the various model parameters was obtained using experimental results and its implementation on the model is done using curves determined through non-linear analyses at cross section level (using a fibre model).

The numeric model incorporates a bar element with three degrees of freedom per node, using a plastic hinge in the bar extremity when the end moment exceeds the cracking moment value. The non-linear behaviour of the hinge is simulated by the Takeda model that reproduces cracking, degradation of the strength and stiffness.

The dynamic equilibrium equations are solved by step-by-step integration, using the Newmark method and doing an incremental analysis of the loading history in time.

The application of the model to the seismic analysis of reinforced concrete frames allows for the determination of the required ductility level of the different elements.

In addition to the ductility requirements at cross section level, the moment-curvature, moment-time, curvature-time, displacement, velocity and acceleration curves are also presented.

It is concluded that the model simulates adequately the response of reinforced concrete frames and is a useful tool for the computation of behaviour coefficients of plane reinforced concrete frames.



## *Índice de texto*

<b>AGRADECIMENTOS</b> .....	7
<b>PALAVRAS-CHAVE</b> .....	9
<b>RESUMO</b> .....	11
<b>ABSTRACT</b> .....	13
<b>ÍNDICE DE TEXTO</b> .....	15
<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b> .....	21
<b>ÍNDICE DE QUADROS</b> .....	25
<i>Capítulo 1</i> - <b>INTRODUÇÃO</b> .....	29
<i>Capítulo 2</i> - <b>COMPORTAMENTO HISTERÉTICO DE ELEMENTOS DE BETÃO ARMADO</b> .....	35
2.1 - <b>INTRODUÇÃO</b> .....	35
2.2 - <b>MODELAÇÃO DO COMPORTAMENTO DOS MATERIAIS</b> .....	37
2.2.1 - <b>Comportamento do betão</b> .....	38
2.2.2 - <b>Comportamento do aço</b> .....	39
2.3 - <b>CARACTERIZAÇÃO DO COMPORTAMENTO DE ELEMENTOS ESTRUTURAIS</b> .....	41

<b>Capítulo 3 - COMPORTAMENTO SÍSMICO DE ESTRUTURAS EM PÓRTICO DE BETÃO ARMADO .....</b>	<b>45</b>
3.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS.....	45
3.2 - RESPOSTA SÍSMICA DE ESTRUTURAS EM PÓRTICO.....	46
3.2.1 - Comportamento global de pórticos .....	47
3.2.2 - Modelos de comportamento hysterético.....	48
3.2.3 - Modelação analítica dos elementos estruturais .....	49
3.2.3.1 - Idealização de elementos sujeitos a flexão .....	49
<b>Capítulo 4 - MODELO HISTERÉTICO DO COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR EM FLEXÃO.....</b>	<b>55</b>
4.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS.....	55
4.2 - DESCRIÇÃO DO MODELO.....	56
4.3 - APLICAÇÃO DO MODELO HISTERÉTICO AO CASO DA FLEXÃO.....	64
<b>Capítulo 5 - IDEALIZAÇÃO DOS ELEMENTOS E MODELO ESTRUTURAL .....</b>	<b>71</b>
5.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS.....	71
5.2 - IDEALIZAÇÃO DO MACRO-ELEMENTO ESTRUTURAL.....	72
5.2.1 - Descrição geral do modelo .....	72
5.2.2 - Rigidez das zonas inelásticas.....	74
5.2.3 - Matriz de rigidez do elemento .....	75
5.2.4 - Comprimento da rótula plástica.....	77
5.3 - IDEALIZAÇÃO DA ESTRUTURA.....	80
5.3.1 - Matriz de rigidez.....	80

5.3.2 - Matriz de massa .....	82
5.3.3 - Matriz de amortecimento .....	83
<b>Capítulo 6 - DESENVOLVIMENTO DO MODELO NUMÉRICO PARA A ANÁLISE NÃO-LINEAR .....</b>	<b>89</b>
6.1 - <b>CONSIDERAÇÕES GERAIS .....</b>	<b>89</b>
6.2 - <b>ANÁLISE DINÂMICA .....</b>	<b>90</b>
6.2.1 - Introdução .....	90
6.2.2 - Resolução das equações de movimento .....	90
6.2.3 - Acção sísmica .....	93
6.3 - <b>ANÁLISE NÃO-LINEAR ESTÁTICA E DINÂMICA.....</b>	<b>93</b>
6.4 - <b>PROGRAMA DE CÁLCULO AUTOMÁTICO.....</b>	<b>96</b>
6.4.1 - Programa PREANL.....	96
6.4.2 - Programa POSANL.....	98
6.4.3 - Programa PORANL .....	99
<b>Capítulo 7 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO .....</b>	<b>109</b>
7.1 - <b>CONSIDERAÇÕES GERAIS .....</b>	<b>109</b>
7.2 - <b>COMPARAÇÃO COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS.....</b>	<b>109</b>
7.2.1 - Introdução .....	109
7.2.2 - Descrição do ensaio experimental e calibração dos parâmetros a usar no modelo numérico .....	110
7.2.3 - Resultados do modelo numérico .....	114
7.3 - <b>AValiação da resposta sísmica de estruturas.....</b>	<b>121</b>

7.3.1 - Descrição das estruturas e seu dimensionamento.....	122
7.3.1.1 - Descrição das estruturas .....	122
7.3.1.2 - Quantificação das frequências próprias.....	123
7.3.1.3 - Dimensionamento das estruturas.....	124
7.3.2 - Determinação da resposta dinâmica não-linear.....	127
7.3.2.1 - Idealização da acção sísmica .....	128
7.3.2.1.1 - Geração de acelerogramas artificiais.....	128
7.3.2.1.2 - Definição da acção sísmica adoptada .....	129
7.3.2.2 - Metodologia dos cálculos não-lineares.....	132
7.3.2.3 - Caracterização dos tipos de elementos estruturais .....	134
7.3.3 - Apresentação dos resultados.....	138
7.3.3.1 - Deslocamentos das estruturas.....	138
7.3.3.2 - Evolução do comportamento inelástico.....	143
7.3.3.3 - Resposta dos elementos estruturais .....	177
7.3.4 - Análise de resultados.....	178
7.3.5 - Observações finais.....	180
 <b>Capítulo 8 - OBSERVAÇÕES FINAIS E ACÇÕES FUTURAS.....</b>	<b>185</b>
 <b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>193</b>

**ANEXOS**

**ANEXO I - DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ E DO VECTOR  
DAS FORÇAS DO MACRO-ELEMENTO..... 201**

**ANEXO II - DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DEFINIDORES DA  
MATRIZ DE AMORTECIMENTO DE RAYLEIGH ..... 205**

**ANEXO III - BIBLIOGRAFIA..... 209**

## *Índice de figuras*

### **Capítulo 4 - MODELO HISTERÉTICO DO COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR EM FLEXÃO**

Figura 4.1 - Parâmetros de identificação da curva base trilinear para um sentido genérico. ....	56
Figura 4.2 - Curva base trilinear para os dois sentidos.....	57
Figura 4.3 - Regras de histerese do modelo implementado.....	58
Figura 4.4 - Inversão do carregamento (descarga).....	59
Figura 4.5 - Inversão do sinal da força generalizada (recarga).....	60
Figura 4.6 - Recarga com degradação de resistência.....	61
Figura 4.7 - Consideração do efeito de "pinching" no modelo desenvolvido.....	62
Figura 4.8 - Modelo de fibras. Discretização dos elementos e das secções. ....	66

### **Capítulo 5 - IDEALIZAÇÃO DOS ELEMENTOS E MODELO ESTRUTURAL**

Figura 5.1 - Elemento de barra como associação de três subelementos.....	73
Figura 5.2 - Macro-elemento de barra com seis graus de liberdade.....	76
Figura 5.3 - Elemento de barra definido pela associação de três subelementos com diferentes características mecânicas. ....	76

Figura 5.4 - Influência da "yield penetration" e da inclinação das fendas devida ao esforço transversal no comprimento da rótula plástica.....	78
Figura 5.5 - Transformação de referencial num elemento de barra.....	81
Figura 5.6 - Relação entre amortecimento modal e frequência [30].....	84

## **Capítulo 6 - DESENVOLVIMENTO DO MODELO NUMÉRICO PARA A ANÁLISE NÃO-LINEAR**

Figura 6.1 - Estrutura geral do programa de cálculo automático.....	96
Figura 6.2 - Fluxograma geral do programa PORANL. ....	105
Figura 6.3 - Fluxograma do bloco ANL. ....	106

## **Capítulo 7 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO**

Figura 7.1 - Modelo M1 - Características geométricas.....	110
Figura 7.2 - Modelo M1 - Pormenorização das armaduras.....	111
Figura 7.3 - Relações momento-curvatura obtidas com o modelo de fibras (Pilar). ....	112
Figura 7.4 - Relações momento-curvatura utilizadas no modelo numérico (Pilar). ....	112
Figura 7.5 - História de deslocamentos impostos (Modelo M1). ....	113
Figura 7.6 - Evolução dos momentos ao longo do ensaio. ....	114
Figura 7.7 - Evolução das curvaturas ao longo do ensaio.....	115
Figura 7.8 - Diagramas momento-curvatura no pilar.....	116
Figura 7.9 - Definição de energia total. ....	117
Figura 7.10 - Diagrama força-deslocamento global.....	117
Figura 7.11 - Energia total. ....	117
Figura 7.12 - Envolvente do diagrama força-deslocamento global.....	118

Figura 7.13 - Diagrama força-deslocamento total.....	118
Figura 7.14 - Evolução da fendilhação e plastificação (Modelo M1). .....	119
Figura 7.15 - Identificação dos pórticos analisados. ....	122
Figura 7.16 - Esquema do dimensionamento dos pórticos.....	127
Figura 7.17 - Função determinística, envolvente no tempo e na frequência, simuladora do carácter transiente dos acelerogramas reais.....	129
Figura 7.18 - Acelerograma representativo da AST1.....	130
Figura 7.19 - Acelerograma representativo da AST2.....	131
Figura 7.20 - Esquema dos pórticos planos analisados. ....	132
Figura 7.21 - Definição dos tipos diferentes de elementos estruturais.....	135
Figura 7.22 - Histórias de deslocamentos (Direcção X, Acção sísmica tipo 1). ....	139
Figura 7.23 - Histórias de deslocamentos (Direcção Y, Acção sísmica tipo 1). ....	139
Figura 7.24 - Histórias de deslocamentos (Direcção X, Acção sísmica tipo 2). ....	141
Figura 7.25 - Histórias de deslocamentos (Direcção Y, Acção sísmica tipo 2). ....	141
Figura 7.26 - Deslocamentos máximos dos pisos. ....	143
Figura 7.27 - Evolução das plastificações (AST1, EDX). ....	145
Figura 7.28 - Evolução das plastificações (2×AST1, EDX).....	147
Figura 7.29 - Evolução das plastificações (3×AST1, EDX).....	149
Figura 7.30 - Evolução das plastificações (4×AST1, EDX).....	151
Figura 7.31 - Evolução das plastificações (AST1, EDY). ....	153
Figura 7.32 - Evolução das plastificações (2×AST1, EDY).....	155
Figura 7.33 - Evolução das plastificações (3×AST1, EDY).....	157
Figura 7.34 - Evolução das plastificações (4×AST1, EDY).....	159
Figura 7.35 - Evolução das plastificações (AST2, EDX). ....	161



Figura 7.36 - Evolução das plastificações (2×AST2, EDX). .....	163
Figura 7.37 - Evolução das plastificações (3×AST2, EDX). .....	165
Figura 7.38 - Evolução das plastificações (4×AST2, EDX). .....	167
Figura 7.39 - Evolução das plastificações (AST2, EDY). .....	169
Figura 7.40 - Evolução das plastificações (2×AST2, EDY). .....	171
Figura 7.41 - Evolução das plastificações (3×AST2, EDY). .....	173
Figura 7.42 - Evolução das plastificações (4×AST2, EDY). .....	175
Figura 7.43 - Resposta em flexão - Direcção Y - viga (extremidade esquerda). .....	177
Figura 7.44 - Resposta em flexão - Direcção Y - viga (extremidade direita). .....	177
Figura 7.45 - Resposta em flexão - Direcção X - pilar extremo (extremidade inferior). .....	178
Figura 7.46 - Resposta em flexão - Direcção X - pilar intermédio (extremidade inferior). .....	178

## ANEXOS

### ANEXO I - DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ E DO VECTOR DAS FORÇAS DO MACRO-ELEMENTO

Figura AI.1 - Macro-elemento definido pela associação de três subelementos. ....	201
Figura AI.2 - Direcções a explicitar. ....	202

## *Índice de quadros*

### **Capítulo 6 - DESENVOLVIMENTO DO MODELO NUMÉRICO PARA A ANÁLISE NÃO-LINEAR**

Quadro 6.1 - Níveis de ductilidade..... 98

### **Capítulo 7 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO**

Quadro 7.1 - Parâmetros do modelo hysterético para o pilar do modelo M1. .... 113

Quadro 7.2 - Dimensões das secções transversais das peças lineares [m]. .... 123

Quadro 7.3 - Peso por piso [kN]..... 124

Quadro 7.4 - Massa volúmica das vigas - [ton/m<sup>3</sup>]. .... 124

Quadro 7.5 - Frequências fundamentais - [Hz]. .... 124

Quadro 7.6 - Espectro de resposta para dimensionamento (solo B)..... 125

Quadro 7.7 - Forças sísmicas actuantes nos pórticos (cálculos lineares)..... 125

Quadro 7.8 - Forças sísmicas nos pisos dos pórticos (cálculos lineares)..... 125

Quadro 7.9 - Coeficientes de combinação..... 126

Quadro 7.10 - Pormenorização das secções. .... 126

---

Quadro 7.11 - Densidades espectrais de potência de aceleração, $S(f)$ , das componentes horizontais para a zona A, terreno tipo II, usados na geração dos acelerogramas representativos dos dois tipos de acção sísmica regulamentar considerados.....	130
Quadro 7.12 - Identificação dos tipos de vigas - direcção Y.....	136
Quadro 7.13 - Identificação dos tipos de vigas - direcção X.....	137
Quadro 7.14 - Caracterização das secções das vigas.....	137
Quadro 7.15 - Caracterização dos tipos de pilares - Direcção Y.....	137
Quadro 7.16 - Caracterização dos tipos de pilares - Direcção X.....	138

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

## *Capítulo 1*

### **INTRODUÇÃO**

A Engenharia Sísmica é na actualidade uma área específica da Engenharia Estrutural perfeitamente identificada e que tem uma importância fundamental no desenvolvimento da investigação a nível nacional e mundial. Isto porque as consequências catastróficas que advêm dos grandes sismos [1], representam um prejuízo enorme na Economia de um País (veja-se, por exemplo, o caso do Sismo de Los Angeles de 1994 [2], em que as estimativas do impacto económico total, feitas em meados de Fevereiro de 1994, apontavam para um valor de trinta biliões de dólares, perto do valor do Orçamento Geral do Estado Português para 1994). Os prejuízos infligidos na indústria e no comércio, causados pela danificação dos meios de transporte e pela instabilidade económica do país, são também surpreendentemente elevados, exigindo períodos de interrupção das actividades económicas. Tudo isto sem referir as perdas humanas e danos morais causados, sendo estes inquantificáveis.

A segurança das estruturas em geral, e das estruturas de betão armado em particular, sujeitas a acções sísmicas é tratada pela regulamentação actual com base em critérios que visam assegurar o seu bom comportamento face a sismos de diferentes intensidades. O dimensionamento deve assegurar às estruturas características de rigidez e resistência de forma a garantir que, perante aquela acção, a resposta dinâmica global das estruturas seja satisfatória.

Com efeito, segundo a filosofia contida nos regulamentos mais recentes, as estruturas devem ser dimensionadas para:

- Resistirem sem danos estruturais e não estruturais a sismos fracos ou moderados que possam ocorrer com maior probabilidade durante o período de vida da estrutura.
- Resistirem a sismos moderados, tais como aqueles que são esperados acontecerem mais do que uma vez na sua vida, com insignificantes danos estruturais e alguns danos não estruturais.

- Sobreviver a sismos de grande intensidade admitindo consideráveis, mas reparáveis, danos nos elementos estruturais, garantindo porém uma probabilidade de colapso suficientemente baixa.

A aptidão de uma estrutura para suportar um sismo intenso sem colapso está associada à formação de mecanismos de dissipação de energia transmitida, através da capacidade dos seus elementos suportarem deformações para além dos seus limites elásticos, em ciclos de carga alternada, sem perda significativa de rigidez e resistência. Esta capacidade é habitualmente designada por ductilidade disponível e está não só associada às características dos tipos dos sistemas estruturais como também, e de forma muito importante, aos processos de dimensionamento sísmico das estruturas [3].

A regulamentação sísmica actual prevê, para a verificação da segurança das estruturas sujeitas à acção sísmica, que a determinação dos efeitos daquela acção nas estruturas seja efectuada tendo em conta o seu comportamento não-linear. Mas, atendendo à complexidade das análises não-lineares e aos custos e prazos que daí decorrem, torna-se inviável a sua aplicação na prática corrente de cálculo (projecto) de edifícios. Por este motivo, o dimensionamento das estruturas é normalmente baseado na determinação da resposta elástica das estruturas, sendo os resultados das análises lineares corrigidos através da utilização de coeficientes de comportamento por forma a estimar os valores que se obteriam em regime não-linear.

É evidente que esta análise não-linear pressupõe o bom comportamento de todos os elementos estruturais e o bom desempenho da estrutura que, neste caso, passa por uma distribuição uniforme de rótulas plásticas ao longo da estrutura, evitando a formação de mecanismos prematuros, e pela disponibilidade de ductilidade em todos os elementos estruturais, principalmente nas suas zonas críticas. Por isso, os regulamentos apontam diversas disposições construtivas tendentes a garantir um comportamento estrutural satisfatório em presença de acções sísmicas intensas, essencialmente baseadas na atribuição às estruturas das características de resistência e ductilidade necessárias a assegurar que a dissipação histerética de energia se processe de uma forma estável e a garantir que o grau e a distribuição da danificação estrutural não conduzam à ocorrência de colapsos globais ou localizados [3].

A verificação, em fase de projecto, das estruturas em zonas sísmicas baseia-se no conhecimento actual do comportamento sísmico das estruturas e das características da sua resposta em regime inelástico, e nomeadamente dos diversos factores que influenciam de forma mais importante o comportamento cíclico não-linear dos elementos estruturais. Permanecem no entanto ainda diversas questões em aberto, particularmente no que diz respeito ao estudo da influência dos processos de dimensionamento na resposta sísmica dos sistemas estruturais e ainda relativamente à identificação dos mecanismos de danificação e à

quantificação dos danos estruturais, na perspectiva da determinação da proximidade de situações de colapso.

Assim foi objectivo principal deste trabalho o desenvolvimento de um modelo numérico capaz de determinar a resposta não-linear e hysterética de estruturas porticadas de betão armado sujeitas a solicitações estáticas e/ou dinâmicas.

O modelo desenvolvido possibilita uma melhor compreensão do comportamento dos edifícios face às acções sísmicas e permite daí tirar ilações importantes sobre o desenvolvimento de rótulas nos diferentes elementos estruturais. Permitindo ainda, no futuro, partir para a avaliação da segurança dos edifícios quer através dos métodos probabilísticos (cadeia de mecanismos de rotura), quer através da introdução dos índices de dano.

A utilização de modelos realistas do comportamento estrutural não-linear pode contribuir de forma apreciável para a verificação e calibração das disposições regulamentares, nomeadamente os valores dos coeficientes de comportamento associados a determinados tipos estruturais e processos de dimensionamento [3].

Este trabalho descritivo está organizado em oito capítulos. No seguimento desta Introdução apresenta-se no Capítulo 2, a caracterização do comportamento hysterético de elementos estruturais de betão armado. São apresentadas as características do comportamento dos materiais betão e aço em condições de carregamento cíclico. É ainda feita a caracterização do comportamento não-linear dos elementos estruturais de betão armado sujeitos a flexão repetida e alternada, sendo referidos os parâmetros que mais influenciam o comportamento hysterético.

No Capítulo 3, aborda-se a caracterização do comportamento sísmico de estruturas em pórtico de betão armado e a avaliação da sua resposta em regime não-linear. Apresentam-se as características do comportamento global de pórticos, realçando-se os factores mais importantes que condicionam esse comportamento e que influenciam a sua resposta sísmica. Descrevem-se sumariamente também alguns modelos hysteréticos de comportamento. Finalmente, são apresentados e caracterizados alguns modelos estruturais existentes para a avaliação da resposta inelástica de estruturas porticadas.

No Capítulo 4, é apresentado o modelo hysterético implementado, no modelo numérico desenvolvido, para a representação do comportamento não-linear de elementos estruturais, no qual foram tidos em conta os aspectos fundamentais que influenciam aquele comportamento, nomeadamente: a redução da rigidez após excedência dos limites elásticos; a degradação de rigidez em descargas e em recargas após ciclos de sentido contrário; o efeito de "slipping" associado à existência de armaduras não simétricas, ao esforço axial ou a esforços transversos

elevados; e, a degradação de resistência associada à repetição de ciclos de grande amplitude. Salienta-se a possibilidade de definir elementos com comportamento diferente nos dois sentidos do esforço generalizado. São apresentadas as características gerais do modelo histerético, descritas as regras do modelo e identificados os parâmetros necessários para a sua definição. O modelo é aplicado ao caso da flexão de peças lineares, para o que se refere como se obtém os parâmetros necessários para a sua definição.

No Capítulo 5, é apresentado o modelo analítico desenvolvido para idealização dos macro-elementos estruturais de pórticos, baseado na associação em série de elementos de barra, constituído por um subelemento central com comportamento elástico linear ao qual se ligam nas suas extremidades subelementos caracterizadores do comportamento não linear do conjunto. Descreve-se a forma como se obtém a matriz de rigidez de um macro-elemento estrutural. Salientam-se ainda as questões relacionadas com o comprimento da rótula plástica. É apresentado o procedimento de obtenção das matrizes de rigidez, massa e amortecimento globais da estrutura.

No Capítulo 6, é descrita a metodologia utilizada para a determinação da resposta estrutural, em regime não-linear, com base no modelo desenvolvido em programas de análise estática e/ou dinâmica de estruturas porticadas planas. É descrito o programa de cálculo automático desenvolvido para determinação da resposta estrutural não-linear, bem como os programas de pré-processamento e de pós-processamento.

O Capítulo 7, é dedicado à aplicação do modelo analítico desenvolvido a dois exemplos. O primeiro é uma aplicação que tem por finalidade realizar a calibração do modelo com base na comparação com resultados experimentais. Com o segundo exemplo pretende-se mostrar uma aplicação do modelo na determinação da resposta sísmica de estruturas porticadas sujeitas a acções estáticas e dinâmicas, apresentando-se os resultados em termos de curvas de evolução de momentos e curvaturas nas secções dos elementos estruturais, evolução de deslocamentos de pontos nodais e evolução da fendilhação e plastificação ao longo do carregamento nos elementos com comportamento não-linear. Fazem-se alguns comentários aos resultados obtidos para ambos os exemplos de aplicação.

No Capítulo 8, são relatadas as principais conclusões do estudo desenvolvido, são descritas algumas possíveis aplicações do modelo desenvolvido e são enumerados alguns trabalhos, que na sequência deste, merecem ser desenvolvidos.

Por último, foi elaborada uma lista do material bibliográfico com interesse relevante para os assuntos estudados que não foi referido ao longo do texto. A referida lista é apresentada no Anexo III.



## **Capítulo 2**

### **COMPORTAMENTO HISTERÉTICO DE ELEMENTOS DE BETÃO ARMADO**

## *Capítulo 2*

# **COMPORTAMENTO HISTERÉTICO DE ELEMENTOS DE BETÃO ARMADO**

### **2.1 - INTRODUÇÃO**

As disposições regulamentares contidas no RSA [1983], REBAP [1985] e EC8 [1993], no que se refere à verificação da segurança, implicam em geral avaliações do comportamento dinâmico em regime não linear das estruturas.

Para a avaliação desse comportamento é necessário o desenvolvimento de modelos que representem, o mais rigorosamente possível, o comportamento das estruturas em geral e das de betão armado em particular. Os modelos vulgarmente usados, apresentam complexidades distintas dependentes do detalhe pretendido. Assim, uma identificação do comportamento não linear histerético de edifícios de betão armado, poderá ser estabelecida em termos de relações tensões-deformações dos materiais componentes (betão e aço), ou até em termos de relações mais globais, como por exemplo, forças-deslocamentos ao nível dos pisos ou, no caso limite, traduzindo essas relações num só grau de liberdade.

Qualquer análise deste tipo passa por uma definição de modelos de comportamento histerético das relações forças-deslocamentos generalizados ( $F, D$ ), ao nível dos elementos estruturais (vigas, pilares, ligações vigas-pilares, etc.).

O modelo analítico ideal a ser estabelecido para a obtenção da resposta não linear de elementos estruturais de betão armado, com comportamento predominante de flexão, requer uma definição das características geométricas e mecânicas dos materiais ao nível das secções e em termos das relações tensões-deformações dos diversos materiais componentes em termos pontuais. Estas relações são então integradas ao longo da altura das secções, tendo em consideração as características geométricas e algumas hipóteses de base quanto à natureza das

deformações (hipótese de Bernoulli e de Navier). A integração posterior ao longo do comprimento dos elementos estruturais permite a definição das relações forças-deslocamentos generalizados ao nível das extremidades desses elementos. Este procedimento, embora não seja invulgar em problemas de análise estática (por exemplo [4]), é contudo ainda uma técnica muito pesada para os problemas de análise dinâmica.

Com o objectivo de estudar o comportamento não linear das estruturas de betão armado sujeitas à acção dos sismos, têm sido realizados muitos ensaios que sugerem vários modelos reproduzindo o comportamento em flexão através de relações forças-deslocamentos generalizados.

Na década de 60 utilizaram-se principalmente modelos simplificados baseados em curvas de restituição elasto-plástica. Esta limitação era imposta pela capacidade computacional quer no que diz respeito à velocidade de execução, quer, e principalmente, à memória disponível. No começo da década de 70, com o desenvolvimento dos métodos numéricos e das potencialidades do cálculo automático, foram surgindo modelos mais aperfeiçoados procurando reproduzir o comportamento das peças de betão armado sujeitas à flexão, verificado nos ensaios laboratoriais. Entre esses destacou-se o modelo desenvolvido por Takeda *et al.* [5], amplamente difundido devido à sua fidelidade e à sua aplicabilidade às situações mais diversas do comportamento estrutural [1].

Definido o modelo de comportamento de uma secção ou de um elemento estrutural, torna-se necessário uma idealização estrutural do edifício que atenda às características dos seus elementos constituintes e represente de uma forma completa e exaustiva não só o comportamento de cada elemento, como também a interacção entre esses diversos elementos. Contudo esse modelo deve ser simples, para que a análise possa ser levada a efeito sem grande esforço computacional, mas ao mesmo tempo, deve reproduzir de uma maneira mais ou menos rigorosa as regras e os parâmetros em jogo.

Dentro desta linha no presente trabalho, foi utilizado um modelo de comportamento hysterético das relações forças-deslocamentos generalizados (desenvolvido por Aníbal G. Costa: [1]; [6]), que procura reproduzir o comportamento dos diversos elementos estruturais componentes da estrutura (viga ou pilar).

Em particular este modelo, no caso de estruturas de betão armado sujeitas a cargas repetidas e alternadas e, concretamente, a acções sísmicas intensas, deve reproduzir a ductilidade exigida nos elementos estruturais dado que constitui um dos aspectos fundamentais para a caracterização do seu comportamento e consequentemente do comportamento sísmico global de uma estrutura. A capacidade dos elementos se deformarem para além do seu limite elástico traduz-se na possibilidade das estruturas dissiparem

rapidamente uma parte da energia transmitida pela acção e, conseqüentemente, limitarem o desenvolvimento de grandes esforços ou grandes deformações nos elementos estruturais.

Assim, se a resposta das estruturas a sismos intensos se processar em regime inelástico, desde que a dissipação hysterética se processe de forma estável, as estruturas poderão ser dimensionadas para forças sísmicas consideravelmente inferiores às que seria necessário considerar se a resposta não pudesse exceder o regime linear [7]. É nesta perspectiva que assentam actualmente os critérios de dimensionamento sísmico de estruturas de betão armado, permitindo a exploração da sua ductilidade, como alternativa à atribuição de maior resistência elástica às estruturas [3].

O conhecimento do comportamento do aço, do betão e da interacção entre ambos é imprescindível para a interpretação do comportamento de um elemento de betão armado, que é dependente do comportamento dos materiais constituintes.

A modelação do comportamento de elementos de betão armado sujeitos a flexão repetida e alternada é usualmente introduzida recorrendo à idealização do comportamento hysterético em flexão das zonas onde se localizam as deformações inelásticas.

Neste capítulo iremos descrever de uma forma sucinta o comportamento hysterético do betão armado quando sujeito à flexão. Para o efeito é descrita a modelação do comportamento do betão e do aço quando sujeitos a cargas monotónicas e a cargas repetidas e alternadas (secção 2.2), analisando-se em seguida o comportamento hysterético dos elementos estruturais de betão armado (secção 2.3). Na secção 2.3 é ainda referida, de uma forma sucinta, a influência do esforço axial e transversal no comportamento de elementos sujeitos a carregamentos cíclicos.

## **2.2 - MODELAÇÃO DO COMPORTAMENTO DOS MATERIAIS**

Nesta secção referem-se alguns aspectos ligados à caracterização e modelação do comportamento do betão e do aço, quando sujeito a carregamentos repetidos e alternados, com o objectivo de destacar as particularidades do comportamento daqueles materiais que influenciam o comportamento dos elementos de betão armado sujeitos a flexão.

### 2.2.1 - Comportamento do betão

Relativamente ao comportamento do betão, deve notar-se que a sua caracterização deverá ser feita com base numa abordagem do comportamento deste material submetido a estados tridimensionais de tensão. De facto, o conhecimento adequado das relações constitutivas multiaxiais é necessário sempre que se pretenda reproduzir o comportamento do betão com generalidade [3].

A representação do comportamento do betão, em condições de carregamento multiaxial e cíclico, tem efectivamente sido objecto de estudo intensivo, sobretudo desde a última década [8]. Este facto deriva em parte do desenvolvimento verificado nos métodos experimentais utilizados em ensaios triaxiais, o que veio permitir a obtenção de informação fiável sobre o comportamento tridimensional do betão, aliado à existência de uma grande potencialidade para realização de análises não-lineares refinadas e de grande sofisticação. Em paralelo surgiram ou foram aperfeiçoados diversos modelos analíticos, que visam basicamente representar com generalidade as relações constitutivas tridimensionais do betão, tendo em conta as particularidades duma história de carregamento repetido e alternado [3].

O desenvolvimento destes modelos gerais tem recorrido quer à abordagem do comportamento do material a um nível macroscópico, quer ao tratamento simplificado dos fenómenos a nível micro-estrutural [8]. Dentro dos modelos macroscópicos, podem distinguir-se, por um lado, as idealizações baseadas fundamentalmente na teoria da elasticidade, normalmente estabelecidas a partir de formulações incrementais validadas através de evidências experimentais e, por outro lado, os modelos constituídos com base em formulações da teoria da plasticidade, pressupondo assim a consideração de deformações de carácter irreversível ao nível da estrutura do material. Os modelos baseados na teoria da plasticidade [9] permitem abordar explicitamente a evolução dos incrementos da deformação inelástica e considerar o fenómeno do endurecimento com base no conceito de escoamento plástico associado à evolução das superfícies de interacção desde o início da plastificação até à rotura. A introdução de variáveis de estado nos modelos de plasticidade veio permitir ter em conta a deterioração do material, ao permitir descrever fenómenos como a degradação, a interacção entre os comportamentos elástico e inelástico e a consideração de situações de carga e descarga em regime inelástico. Existem ainda modelos analíticos que procuram reproduzir o comportamento macroscópico do material recorrendo à consideração da fenomenologia da evolução da microfissuração, tendo em conta a progressão da degradação do material à escala das microfissuras [3].

### 2.2.2 - Comportamento do aço

O comportamento de elementos de betão armado é, em muitos casos, condicionado pelo comportamento dos varões de aço das armaduras, particularmente após a ocorrência de fendilhação. Em condições de carregamento alternado, a resposta em regime inelástico de um elemento pode inclusivamente chegar a ser inteiramente controlada pelo comportamento hysterético do aço, nomeadamente nas situações em que se desenvolvem fendas ao longo de toda a altura da secção de um elemento que podem manter-se abertas durante a alternância de cargas. Em particular pode referir-se a influência do efeito de Bauschinger na capacidade de dissipação hysterética, provocando uma redução desta face a um comportamento elasto-plástico perfeito.

É assim particularmente importante que os modelos analíticos utilizados para a idealização do aço das armaduras reproduzam adequadamente a fenomenologia do comportamento do aço, em especial no caso de processos de carregamento repetido e alternado. A informação disponível, baseada em diversos resultados experimentais, sobre o comportamento de varões de aço sujeitos quer a cargas crescentes monotonicamente quer a cargas cíclicas, tem contribuído para que esse comportamento seja actualmente bem conhecido. Este facto permitiu o desenvolvimento de diversos modelos teóricos que reproduzem com suficiente fiabilidade as características essenciais daquele comportamento.

Os modelos para a representação do comportamento do aço, incluindo a consideração da histerese, consistem basicamente em idealizações das relações tensões-extensões do material quando sujeito a processos de carregamento repetido e alternado. Um primeiro tipo de modelos, habitualmente designados por modelos fenomenológicos, recorre à utilização de parâmetros que procuram descrever as relações tensões-extensões ao longo de um processo de carregamento que se ajustam às verificadas experimentalmente. Os parâmetros associados a estes modelos não podem geralmente ser obtidos directamente a partir do conhecimento do comportamento do material a nível microscópico e dependem, ao longo do processo de carregamento, da história de deformações impostas. Deste modo, a sua utilização envolve normalmente dificuldades associadas ao esforço de cálculo inerente à necessidade do conhecimento de toda a história imposta, bem como à consideração de formulações incrementais.

Um segundo grupo de modelos, de utilização muito mais generalizada, baseia-se na modificação de modelos de referência definidos directamente através de variáveis descritivas do comportamento físico do material, de forma a ter em conta as particularidades da história de deformações impostas ao material. Embora estes modelos ainda recorram à utilização de parâmetros que variam ao longo do processo de carregamento, reduzem consideravelmente o

esforço de cálculo ao limitarem a memória da história de tensões e deformações a um número reduzido de curvas de controle, basicamente a envolvente monotónica e as curvas de carga e descarga imediatamente anteriores à corrente. O recurso a modelos deste tipo tem grandes vantagens em termos de operacionalidade da sua aplicação prática, além de se verificar que, apesar da simplicidade associada às idealizações consideradas, as características essenciais do comportamento histerético do aço são reproduzidas de forma aceitável.

Dada a influência do comportamento do aço no comportamento histerético de elementos de betão armado o que, como já foi referido, deriva de a resposta inelástica de um elemento ser em muitos casos, essencialmente condicionada pelo aço, julga-se oportuno salientar alguns aspectos que normalmente não são tidos em conta na modelação do comportamento do aço e podem influenciar de forma importante o desempenho de um elemento estrutural.

Um primeiro aspecto a considerar refere-se ao facto de a maior parte das idealizações existentes para representação do comportamento histerético do aço considerarem o material independentemente da sua função como armadura de betão armado. Deste modo, admite-se em geral um comportamento essencialmente semelhante em tracção e compressão. Ora a história de deformações imposta a um varão de armadura, durante um processo de carregamento repetido e alternado, pode ser substancialmente distinta da que seria imposta a uma peça estrutural de aço, dada a associação do mecanismo de abertura e fecho de fendas com o fenómeno de deterioração da aderência entre o aço e o betão, o que leva a que normalmente os varões sejam sujeitos a extensões de compressão menos elevadas do que as de tracção, não ocorrendo portanto grandes excursões inelásticas em compressão. Este facto tem sido considerado na simplificação de alguns dos modelos propostos para o comportamento do aço de betão armado [10]. Deve notar-se, por outro lado, e ainda relativamente a este aspecto, que nos casos em que seja de prever a ocorrência de plastificações em compressão das armaduras, o que geralmente é ocasionado pela perda do recobrimento e conseqüente diminuição da capacidade do betão suportar a maior parte das tensões de compressão, não são normalmente idealizadas as situações que envolvam o fenómeno de encurvadura do varão. Deve assim, nesses casos, dar-se particular atenção à cintagem das armaduras comprimidas de forma a evitar roturas por encurvadura dessas armaduras [3].

### 2.3 - CARACTERIZAÇÃO DO COMPORTAMENTO DE ELEMENTOS ESTRUTURAIS

O comportamento dos elementos estruturais de betão armado sujeitos a carregamentos cíclicos é normalmente modelado com base numa idealização de zonas onde se concentram as deformações inelásticas [3].

Na presente secção referem-se alguns dos aspectos ligados à caracterização do comportamento de elementos de pórticos de betão armado.

Para elementos de betão armado sujeitos predominantemente a flexão, o seu comportamento é caracterizado com base em diagramas momento-curvatura para as suas secções. Estes diagramas podem ser obtidos a partir das relações tensões-extensões dos materiais constituintes (betão e aço) [11], e as suas características são influenciadas pelos diversos parâmetros que condicionam a deformabilidade de elementos sujeitos a esforços de flexão. A importância de parâmetros como o tipo de aço e de betão, as percentagens de armadura e o valor do esforço axial pode ser avaliada através da análise dos diagramas momento-curvatura obtidos para secções submetidas a flexão, para diferentes valores desses parâmetros [3].

No caso de existir confinamento, cujo efeito se pode traduzir num aumento substancial da extensão última de compressão no betão, a ductilidade em curvatura de elementos flectidos pode aumentar significativamente. Sobretudo, no caso de elementos fortemente armados ou sujeitos a um elevado esforço axial em que o comportamento do betão é determinante para a rotura.

O esforço axial pode influenciar significativamente o comportamento em flexão das secções de betão armado. A variação do esforço axial pode alterar o valor do momento flector máximo atingido e a curvatura associada a valores máximos da extensão de compressão no betão de uma forma significativa [3].

Para níveis de esforço axial substancialmente inferiores ao limite de balanceamento, o valor do momento resistente aumenta com o aumento daquele esforço, e a ductilidade em curvatura diminui. A ductilidade nas peças de betão armado assume valores muito reduzidos para valores do esforço axial superior ao valor limite de balanceamento, dado que, em tais condições, a capacidade de deformação inelástica deve-se apenas ao comportamento do betão à compressão pelo facto de não ter sido atingida a cedência das armaduras traccionadas e consequentemente não ser mobilizada a contribuição da ductilidade do aço para a ductilidade em curvatura da secção [3].



Um outro esforço que influencia substancialmente o comportamento dos elementos de betão armado sujeitos a flexão é o esforço transversal. Verifica-se que o efeito do esforço transversal elevado reflecte-se essencialmente numa redução da capacidade de dissipação de energia, podendo a resposta dos elementos dar-se com significativa degradação de rigidez e de resistência. Se os elementos estiverem simultaneamente sujeitos a esforços axiais de compressão, a degradação do comportamento acentua-se, sobretudo em presença de acções cíclicas [3].

A influência do esforço transversal nas características de ductilidade dos elementos tem sido estudada com base em diversos resultados experimentais [12] e é normalmente abordada pela análise da importância relativa do parâmetro  $\beta$  que se designará por razão de corte, definido pela expressão:

$$\beta = \frac{M}{V \cdot d} = \frac{l}{d} \quad (2.1)$$

em que:

$M$  - momento máximo instalado;

$l$  - distância entre pontos de momento máximo  $M$  e momento nulo;

$d$  - altura da secção;

$V$  - esforço transversal instalado.

Sob a acção repetida de ciclos de carga, os fenómenos referidos podem conduzir a comportamentos caracterizados por uma forte degradação, dado que se verifica a progressiva destruição do betão em torno das armaduras e uma consequente deterioração da aderência, podendo inclusivamente verificar-se fenómenos de escorregamento de um elemento relativamente ao apoio [3].

## **Capítulo 3**

### **COMPORTAMENTO SÍSMICO DE ESTRUTURAS EM PÓRTICO DE BETÃO ARMADO**

## *Capítulo 3*

# **COMPORTAMENTO SÍSMICO DE ESTRUTURAS EM PÓRTICO DE BETÃO ARMADO**

### **3.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS**

O comportamento linear de estruturas em pórtico é bem conhecido e a avaliação da resposta estrutural em presença de acções horizontais, em regime estático ou dinâmico, é facilmente abordada recorrendo a análises lineares sobre modelos estruturais com diferentes graus de simplificação [13, 14, 15, 16, 17, 18]. Quando a resposta se processa em regime inelástico, os parâmetros da resposta estrutural, nomeadamente os deslocamentos e os esforços nos elementos estruturais, podem apresentar valores consideravelmente diferentes dos obtidos no pressuposto de um comportamento elástico e linear da estrutura [3].

Em análises estruturais é importante a consideração do comportamento não-linear, em particular para cargas próximas dos valores máximos que a estrutura está apta a suportar. A consideração do comportamento não-linear é necessária para a determinação da resposta, sendo esta dependente da capacidade da estrutura e dos seus elementos se deformarem para além dos limites elásticos e do modo como se distribuem as deformações inelásticas pelos vários elementos estruturais. No caso de estruturas de betão armado sujeitas a acções sísmicas intensas, o estudo do comportamento não-linear e a avaliação da ductilidade disponível na estrutura é um aspecto muito importante, se se atender a que a estratégia actualmente utilizada no dimensionamento sísmico considera a capacidade das estruturas dissiparem energia por histerese. Com efeito, os critérios actuais de dimensionamento de estruturas de betão armado em regiões sísmicas [19, 20, 21] pressupõem que a resposta das estruturas à acção sísmica se dá em regime não linear. Adoptam-se então regras de dimensionamento e disposições construtivas que conferem às estruturas uma certa ductilidade, privilegiando determinadas zonas para a localização de mecanismos de dissipação histerética. Considerando assim que

uma parte da energia da excitação é dissipada por histerese nas zonas críticas, a resistência a conferir à estrutura é significativamente inferior àquela que seria necessária no caso de se admitir uma resposta linear [3].

Tendo em conta estes aspectos, é de esperar que, quando sujeitas a acções sísmicas intensas, as estruturas apresentem alguns danos. A experiência obtida com sismos no passado tem evidenciado a vulnerabilidade de alguns edifícios de betão armado em presença de acções de grande intensidade [22, 23, 24], continuando, no entanto, por razões de ordem económica e pela incerteza associada à acção sísmica, os critérios de dimensionamento a permitir a ocorrência de um certo nível de danos estruturais.

A consideração da evolução da degradação de uma estrutura (entendida como decréscimo de eficiência no seu desempenho) é um aspecto importante e de grande actualidade, particularmente na perspectiva de identificação dos mecanismos de danificação associados à exploração da ductilidade por dissipação histerética e da avaliação da proximidade de uma situação de colapso local ou global da estrutura. A contabilização dos danos estruturais e a sua distribuição, é actualmente abordada com o objectivo de clarificar o problema de estimar em que medida se pode tirar partido da capacidade dúctil de uma estrutura durante a ocorrência de um sismo de grande intensidade [3].

Neste capítulo serão apresentados sumariamente os aspectos essenciais do comportamento não-linear de estruturas em pórtico de betão armado, na perspectiva da avaliação da resposta estrutural em presença de acções dinâmicas e em particular o caso de estruturas dimensionadas de acordo com a regulamentação sísmica actual.

### **3.2 - RESPOSTA SÍSMICA DE ESTRUTURAS EM PÓRTICO**

A avaliação da resposta sísmica de estruturas é um aspecto fundamental para o estudo do desempenho das construções em regiões sísmicas, particularmente na perspectiva de clarificação dos procedimentos a adoptar para o dimensionamento e verificação de projecto das estruturas. Saliente-se que a observação e o estudo da vulnerabilidade evidenciada pelas estruturas sujeitas a sismos intensos pode contribuir consideravelmente para a identificação das potencialidades e das limitações dos métodos actualmente aceites para a análise e para o dimensionamento sísmico das estruturas [24].

Num contexto geral, refira-se que um eficiente dimensionamento resulta da consideração equilibrada de diversos aspectos de diferente natureza, envolvidos na resposta

sísmica das estruturas, por forma a garantir a sua segurança adequada. Assim, o dimensionamento sísmico das estruturas engloba [24]:

- a avaliação do risco sísmico: a definição da acção sísmica e a escolha dos sistemas estruturais apropriados para resistir às acções verticais e horizontais, dos materiais e dos elementos não-estruturais;
- a determinação dos valores das forças sísmicas de dimensionamento com base em hipóteses realistas relativas ao comportamento estrutural global, incluindo a consideração da fundação e das características dos terrenos; e ainda,
- a abordagem da verificação da segurança tendo em conta todos os outros aspectos; adicionalmente, haverá ainda que assegurar a manutenção adequada da estrutura.

Na presente secção, abordam-se as questões relacionadas com o comportamento inelástico de pórticos sujeitos a acções horizontais cíclicas e com a importância das estratégias de dimensionamento na resposta sísmica das estruturas.

### 3.2.1 - Comportamento global de pórticos

O comportamento inelástico de estruturas em pórtico sujeitas a acções repetidas e alternadas resulta, em primeira análise, e como foi já anteriormente apontado, do modo como se distribuem as deformações inelásticas pelos vários elementos estruturais, e do comportamento não linear destes elementos nomeadamente em termos da sua capacidade de deformação inelástica. Tendo em conta estes aspectos, o comportamento estrutural é condicionado por diversos factos a eles associados, derivados por um lado do tipo e configuração dos sistemas estruturais escolhidos em fase de concepção e por outro lado intimamente ligados às hipóteses admitidas e opções tomadas no dimensionamento [3]. Neste trabalho é dado destaque aos aspectos essenciais do comportamento que podem influenciar as características da resposta sísmica de estruturas em pórtico, e em particular pórticos planos.

O comportamento de uma estrutura em pórtico é globalmente condicionado pelas características de rigidez e resistência das vigas e pilares, sendo a resistência estrutural assegurada pela resistência destes elementos e pelo modo como interactivam entre si. Tratando-se na generalidade dos casos de estruturas com um grau de hiperstaticidade elevado, a sua resposta inelástica é geralmente controlada pela redistribuição de esforços resultante do esgotamento da capacidade resistente nas zonas críticas e da possibilidade dessas zonas

estarem aptas a deformar-se e a dissipar energia após esse esgotamento por forma a que a resistência seja assegurada pela transmissão dos esforços para zonas menos solicitadas.

As opções tomadas no dimensionamento, normalmente decorrentes da aplicação dos princípios e regras da regulamentação sísmica, podem influenciar apreciavelmente a resposta das estruturas. Este aspecto está basicamente relacionado com a atribuição das características de rigidez e resistência dos elementos estruturais e com a adopção de regras construtivas tendentes a conferir ductilidade à estrutura. A influência na resposta sísmica das estratégias de dimensionamento reflecte-se principalmente na distribuição das exigências de ductilidade pelos vários elementos estruturais e conseqüentemente no tipo de mecanismos de histerese associados à exploração da ductilidade. Assim, uma estrutura em pórtico com vigas substancialmente mais rígidas que os pilares às quais é atribuída maior resistência tenderá a apresentar uma distribuição de deformações inelásticas basicamente localizada nos elementos verticais, originando a formação de mecanismos controlados pela dissipação de energia nos pilares. Neste tipo de estruturas, o esgotamento da capacidade dúctil está em princípio associado à perda de estabilidade local em determinados níveis da estrutura (colapsos de piso), não se chegando por vezes a explorar o comportamento inelástico das vigas. No caso de pórticos com pilares, aos quais é atribuída uma resistência consideravelmente superior à das vigas, o comportamento é significativamente distinto. A resposta inelástica é condicionada pela ductilidade das vigas e pela dissipação histerética resultante da formação de mecanismos associados à deformação inelástica destes elementos [3].

Verifica-se assim que a distribuição relativa de rigidez e resistência pelos elementos estruturais está muito ligada à distribuição das exigências na estrutura, e conseqüentemente às características da sua resposta inelástica. Esta resposta é essencialmente distinta nas situações em que é condicionada pelo comportamento não linear de elementos sujeitos predominantemente a flexão (vigas) e no caso da exploração de ductilidade se processar principalmente em elementos (pilares, paredes, colunas curtas) nos quais as deformações axial ou por corte tenham uma contribuição importante. A consideração da interacção estrutural inelástica pode nestes casos ser importante para uma avaliação apropriada da resposta sísmica.

### **3.2.2 - Modelos de comportamento histerético**

Nos modelos estruturais baseados nos diferentes tipos de idealizações o comportamento não-linear é geralmente descrito por modelos histeréticos das relações generalizadas força-deslocamento não-lineares definidas para os graus de liberdade da discretização considerada.

Os modelos histeréticos são geralmente estabelecidos com base na definição de uma curva envolvente representativa da relação força-deslocamento monotónica e na consideração de um determinado número de regras que controlam a evolução da resposta, ao longo do processo de carregamento. As regras do modelo histerético permitem idealizar situações de carga e descarga e de inversão do sentido de carregamento, tendo em conta determinadas características da resposta do elemento, nomeadamente a degradação de rigidez ou resistência e o efeito de aperto nos diagramas força-deslocamento.

O modelo desenvolvido por Guimarães da Costa e Campos Costa [6] propõe a contabilização da degradação de resistência através da inclusão de um parâmetro baseado na acumulação da degradação, por efeito da repetição de ciclos de carga, em função da relação entre o deslocamento máximo atingido e o deslocamento último sob carregamento monotónico [25]. Este modelo permite idealizar a evolução das características de rigidez da resposta, nomeadamente a sua redução em descargas ocorridas na fase posterior à cedência e nas recargas em ciclos sucessivos (incluindo pequenos ciclos), tendo ainda em conta o efeito de aperto.

O modelo histerético apresentado pressupõe basicamente o estabelecimento de leis fenomenológicas, calibradas com base em ensaios estáticos com imposição de forças ou deslocamentos alternados, representativas das relações força-deslocamento associadas à resposta dos elementos estruturais e, como ficou dito, idealizam essas relações por meio de sucessivos troços lineares cuja inclinação traduz a evolução da rigidez ao longo de um processo de carregamento repetido e alternado. As regras consideradas para descrever o comportamento histerético baseiam-se de um modo geral no conhecimento da história dos parâmetros de resposta em causa, nomeadamente determinados pontos notáveis dos diagramas (nos quais se verifica mudança de ramo e conseqüentemente do valor da rigidez).

### **3.2.3 - Modelação analítica dos elementos estruturais**

Seguidamente referem-se alguns modelos analíticos existentes para idealização de elementos estruturais de pórticos de betão armado sujeitos a acções horizontais cíclicas.

#### **3.2.3.1 - Idealização de elementos sujeitos a flexão**

Os elementos de betão armado sujeitos predominantemente a esforços de flexão simples, como ocorre normalmente nas vigas de pórticos, são geralmente idealizados através

da associação (em paralelo ou em série) de subelementos com comportamento elástico e linear e de subelementos representativos das regiões inelásticas dos elementos. Sob a acção de cargas horizontais cíclicas as deformações inelásticas de flexão ocorrem nas regiões dos elementos junto às suas extremidades. Os elementos podem ser idealizados admitindo que o comportamento não-linear é descrito em termos das deformações inelásticas concentradas num ponto em cada extremidade ou concentradas numa determinada extensão de comprimento fixo junto à extremidade (modelos de plasticidade concentrada) ou, por outro lado, considerando a distribuição das deformações inelásticas ao longo do comprimento do elemento (modelos de plasticidade distribuída).

Dentro dos modelos de plasticidade concentrada, realça-se o modelo proposto por Clough e Benuska [26] no qual é feita uma idealização de um elemento estrutural através da associação de subelementos em paralelo. O modelo é constituído por dois componentes, um subelemento elástico e linear cujas extremidades coincidem com as de um subelemento com comportamento elasto-plástico perfeito, resultando do seu funcionamento conjunto um elemento cujo comportamento hysterético em flexão é representado por relações momento-rotação bilineares. A rigidez do componente elástico é considerada igual à parcela de rigidez do elemento, em termos da relação momento-rotação nos extremos, correspondente ao endurecimento após cedência; ao componente elasto-plástico é atribuída uma rigidez elástica inicial tal que a combinação dos dois subelementos, na fase de comportamento anterior à ocorrência de cedência, apresente uma rigidez igual à rigidez elástica inicial efectiva do elemento. A situação de cedência é simulada pela introdução de duas rótulas nas extremidades do subelemento elasto-plástico, passando a relação momento-rotação nas extremidades do elemento a ser descrita apenas pelo componente elástico. Este modelo foi utilizado em diversos estudos e implementado em vários programas de análise estrutural [27, 28, 29, 30] tendo sido posteriormente modificado de forma a que as relações momento-rotação obtidas reflectissem características de comportamento hysterético não representáveis por idealizações bilineares. A modificação proposta por Aoyama [29, 31] consiste na consideração de três subelementos ligados em paralelo, sendo um elástico e linear e dois elasto-plásticos correspondentes a uma formulação trilinear sem degradação [3].

O outro tipo de modelos de plasticidade concentrada corresponde à consideração de associações de subelementos em série, e surge com o objectivo de ultrapassar a limitação inerente aos modelos anteriores traduzido pela impossibilidade de ter em conta a degradação de rigidez. Estes modelos são baseados na idealização proposta por Giberson [32], que considera um elemento de barra elástico e linear ligado nas suas extremidades a elementos pontuais definidos apenas com um grau de liberdade de rotação e caracterizados por uma lei de restituição momento-rotação não-linear. Neste modelo, o comportamento na fase anterior à cedência é representado pelo comportamento do elemento de barra elástico, e considera-se



que após a cedência todas as deformações inelásticas do elemento estão concentradas nos elementos rotacionais extremos. Admitindo que o elemento está sujeito a flexão antissimétrica, a rotação de cada elemento inelástico extremo apenas se relaciona com o momento flector correspondente instalado nessa extremidade. Deste facto resulta que a contribuição dos elementos rotacionais para a matriz de flexibilidade tangente do elemento, relativa aos graus de liberdade de rotação, é uma matriz diagonal cujos termos são determinados com base na relação momento-rotação considerada para a representação do comportamento hysterético. A grande divulgação deste tipo de modelos deriva essencialmente da possibilidade de utilizar qualquer modelo hysterético para descrever as relações momento-rotação dos elementos inelásticos, sendo na maior parte dos casos usados os modelos refinados baseados na idealização de Takeda. A principal limitação destes modelos está associada à necessidade de recorrer à idealização das relações momento-rotação nos extremos de um elemento, para o que é necessário admitir uma determinada distribuição de curvaturas ao longo do elemento, usualmente correspondente à hipótese da localização do ponto de inflexão a meio-vão. Por outro lado, a consideração de um ramo linear representativo da relação momento-rotação na fase após cedência (geralmente tomando uma rigidez estimada com base na inclinação do ramo correspondente ao endurecimento dos diagramas momento-curvatura nas zonas inelásticas dos elementos) pode conduzir a uma sobreavaliação significativa das deformações inelásticas [33, 34].

## **Capítulo 4**

### **MODELO HISTERÉTICO DO COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR EM FLEXÃO**

## *Capítulo 4*

# **MODELO HISTERÉTICO DO COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR EM FLEXÃO**

### **4.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS**

Nos capítulos anteriores (2 e 3) foram abordadas as características do comportamento de elementos de betão armado sujeitos a flexão alternada.

Uma descrição do modelo histerético implementado foi apresentada por Costa *et al.* [6], modelo esse que entretanto foi completado com algumas particularidades que se passam a referir. Um modelo analítico deve ser suficientemente versátil, para poder representar diversos comportamentos com pequenas alterações nas regras e parâmetros, como sejam o comportamento de uma viga sujeita à flexão com diferentes razões  $l/d$ , o comportamento de um pilar com reduzido ou elevado esforço normal, o comportamento de uma parede estrutural, etc. Dentro destes princípios verifica-se que o modelo de comportamento utilizado tanto pode ser usado para representar o comportamento de uma secção, como de um elemento estrutural ou ainda de uma associação de elementos de uma forma global [1]. Refere-se que este modelo de comportamento foi integrado no modelo de análise dinâmica desenvolvido tendo em vista representar o comportamento de elementos estruturais.

O modelo referido inclui as seguintes particularidades:

1. Degradação de rigidez com a deformação;
2. Degradação de rigidez após inversão do carregamento;
3. Degradação de resistência;
4. Consideração do efeito  $P-\Delta$ ;

5. Consideração da influência do esforço transversal, da deterioração da aderência e do escorregamento das armaduras;
6. Definição de comportamento distinto em função do sinal de esforço instalado, isto é, comportamento diferente para valores de esforços negativo ou positivo.

No que se segue é feita em primeiro lugar uma descrição do modelo hysterético do comportamento não-linear genérico, apresentando-se de seguida a aplicação do referido modelo genérico ao caso da flexão.

## 4.2 - DESCRIÇÃO DO MODELO

O modelo analítico utilizado baseia-se no modelo de Takeda anteriormente citado.

Os parâmetros que identificam a curva base trilinear para cada sentido, Figura 4.1, são os seguintes:

$K_0$  - rigidez inicial (troço 1)

$K_1$  - rigidez após fissuração (troço 2)

$K_2$  - rigidez após cedência (troço 3)

$D_c$  - deslocamento generalizado correspondente à fissuração

$D_y$  - deslocamento generalizado correspondente à cedência

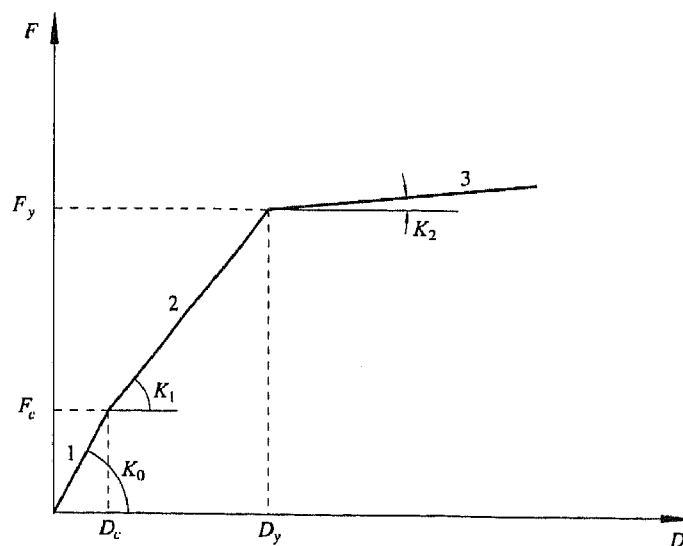


Figura 4.1 - Parâmetros de identificação da curva base trilinear para um sentido genérico.

Estes cinco parâmetros são definidos para os valores positivos e negativos da curva de comportamento. Salienta-se o facto da rigidez inicial da secção para ambos os sentidos de esforço interno ser igual, uma vez que deve ser calculada directamente a partir das características elásticas do material e da geometria da própria secção.

Sendo assim, decorre que para a definição da curva base seriam necessários dez parâmetros, mas considerando que:  $K_0^+ = K_0^-$ , reduz-se a nove o número de parâmetros requeridos, ver Figura 4.2.

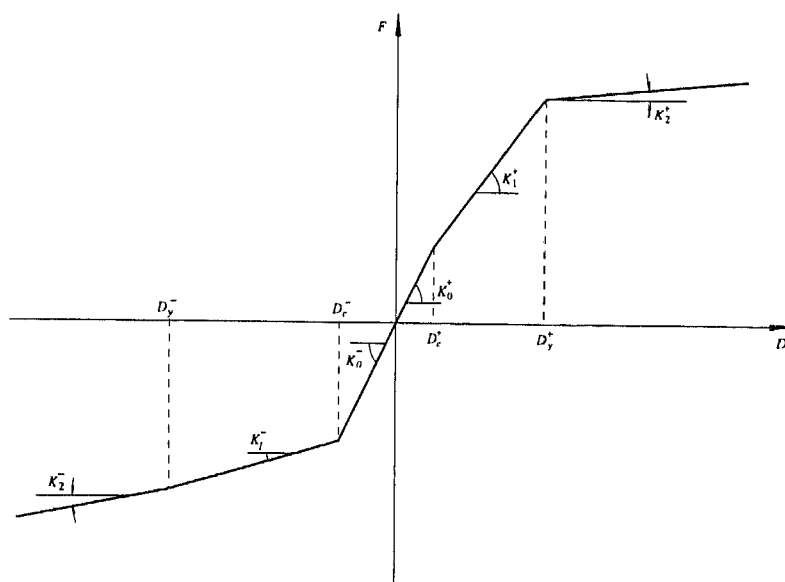


Figura 4.2 - Curva base trilinear para os dois sentidos.

A grande vantagem da caracterização dum comportamento distinto para ambos os sentidos de esforço traduz-se na possibilidade de aplicação a secções não simétricas ou a secções de betão armado simétricas não simetricamente armadas, que constituem situações que aparecem frequentemente nas estruturas porticadas de edifícios de betão armado.

Além destes nove parâmetros tornou-se necessário a definição de mais três parâmetros adimensionais, que caracterizam a degradação da rigidez ( $\alpha$ ), a degradação de resistência ( $\gamma$ ) e o efeito de “pinching” e “slipping” ( $\beta$ ), como serão definidos pormenorizadamente mais adiante.

De seguida são apresentadas as regras que servem de base ao modelo analítico que traduz o comportamento histerético. A exposição dessas regras é feita com base na Figura 4.3 e em outras figuras auxiliares, para uma força generalizada independentemente do seu sinal.

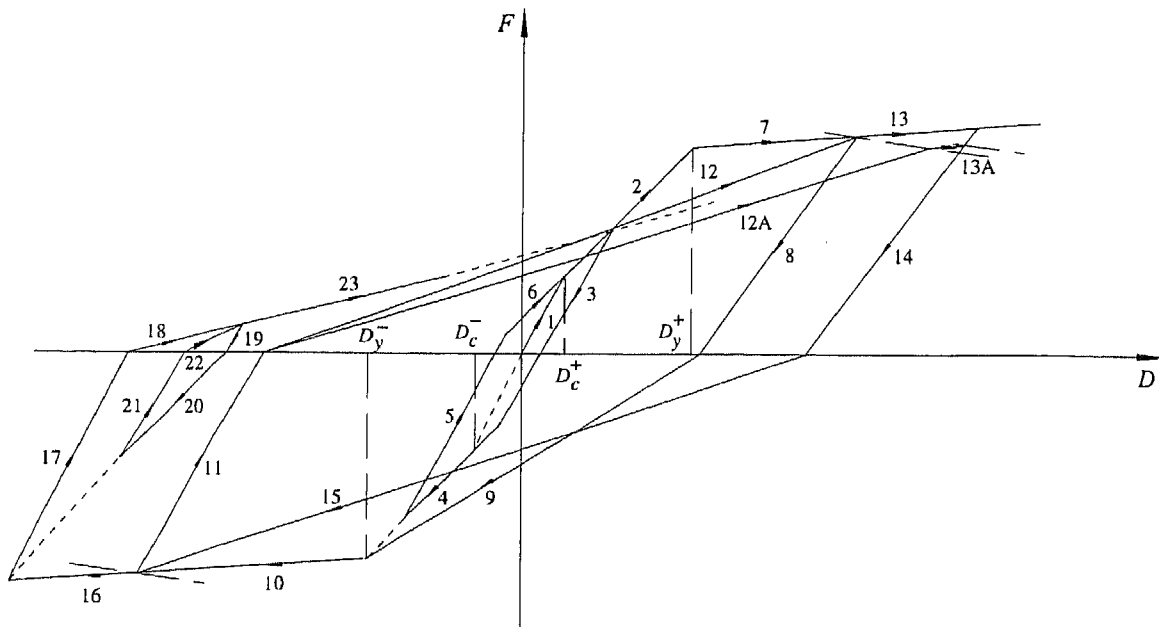


Figura 4.3 - Regras de histerese do modelo implementado.

#### Comportamento até a plastificação:

Enquanto o deslocamento generalizado máximo absoluto em cada passo não ultrapassar o valor  $D_y$ , o modelo comporta-se como bilinear sem degradação da rigidez e resistência (troços 1, 2, 3, 4, 5 e 6 - Figura 4.3);

#### Descarga:

Quando o deslocamento generalizado máximo absoluto  $D_{máx}$  ultrapassa  $D_y$  (troços 7 e 10 - Figura 4.3) e se procede a uma inversão do carregamento (descarga), como se ilustra na Figura 4.4, esta é feita considerando a degradação de rigidez na descarga dada pela expressão:

$$K_d = K_e \left| D_y / D_{máx} \right|^\alpha \quad (4.1)$$

mantendo-se válida até se anular o valor da força generalizada (troços 8, 11, 14, 17, 19 e 21 - Figura 4.3). Esta rigidez de descarga é tanto menor quanto maior foi o deslocamento máximo pós-elástico atingido.

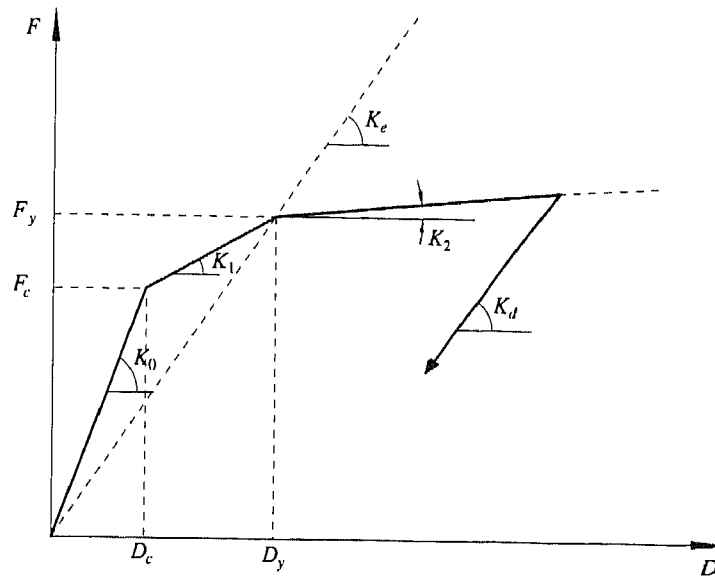


Figura 4.4 - Inversão do carregamento (descarga).

A expressão 4.1 define a rigidez na descarga ( $K_d$ ) em função do deslocamento correspondente à cedência ( $D_y$ ), do deslocamento máximo absoluto ( $D_{m\acute{a}x}$ ), da rigidez equivalente aos dois primeiros troços da curva base ( $K_e$ ) e de um parâmetro  $\alpha$ . O valor de  $K_e$  é definido como se ilustra na Figura 4.4 e na expressão 4.2:

$$K_e = \frac{K_0 \times D_c + K_1 \times (D_y - D_c)}{D_y} \quad (4.2)$$

O parâmetro  $\alpha$  caracteriza a degradação de rigidez nas descargas e é também definido com valores diferentes para ambos os sentidos de forças generalizadas.

#### Recarga:

A inversão do sinal da força generalizada (recarga) como se pode visualizar na Figura 4.5, corresponde a uma mudança de rigidez, sendo definida com base no valor máximo absoluto da força e deslocamento generalizados ( $F_{m\acute{a}x}$  e  $D_{m\acute{a}x}$ , respectivamente) do ciclo anterior (troços 9, 12, 15, 20, 18, 22 e 23 - Figura 4.3);

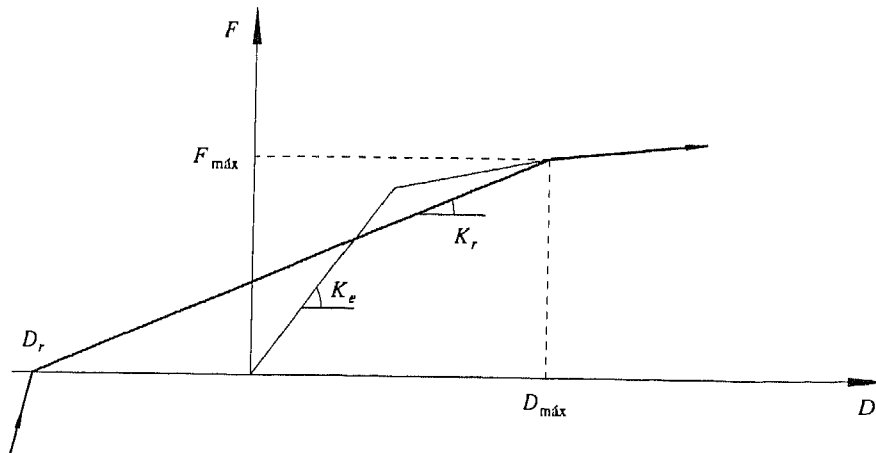


Figura 4.5 - Inversão do sinal da força generalizada (recarga).

A partir do ponto onde se inicia a recarga ( $D_r$ ) que corresponde à passagem por zero da força generalizada, esta processa-se com a rigidez de recarga dada pela expressão:

$$K_r = \frac{F_{\text{máx}}}{D_{\text{máx}} - D_r} \quad (4.3)$$

como se pode visualizar na Figura 4.5.

No caso de num dos sentidos ainda não ter sido ultrapassado o ponto de plastificação os valores de  $F_{\text{máx}}$  e  $D_{\text{máx}}$  tomam-se como os correspondentes aos valores de plastificação ( $F_y$  e  $D_y$ ) nesse sentido.

A rigidez de recarga ( $K_r$ ) calculada a partir da expressão 4.3 é significativamente inferior à rigidez elástica equivalente ( $K_e$ ) e vai diminuindo à medida que as excursões não-lineares em qualquer dos sentidos vão aumentando.

Quando se considera a degradação de resistência (troços 12A, 13A e 15 - Figura 4.3) considera-se que o ramo de recarga ( $K_r$ ) passará para o valor de  $D_{\text{máx}}$  por uma força generalizada inferior à força  $F_{\text{máx}}$  atingida anteriormente, como se ilustra na Figura 4.6, e na expressão 4.4:

$$F'_{\text{máx}} = (1 - PD) \times F_{\text{máx}} \quad (4.4)$$

em que:



$F'_{\text{máx}}$  - força generalizada máxima a atingir pelo ciclo presente;

$F_{\text{máx}}$  - força generalizada máxima absoluta do ciclo anterior;

$PD$  - parâmetro de degradação de resistência (varia entre 0 e 1).

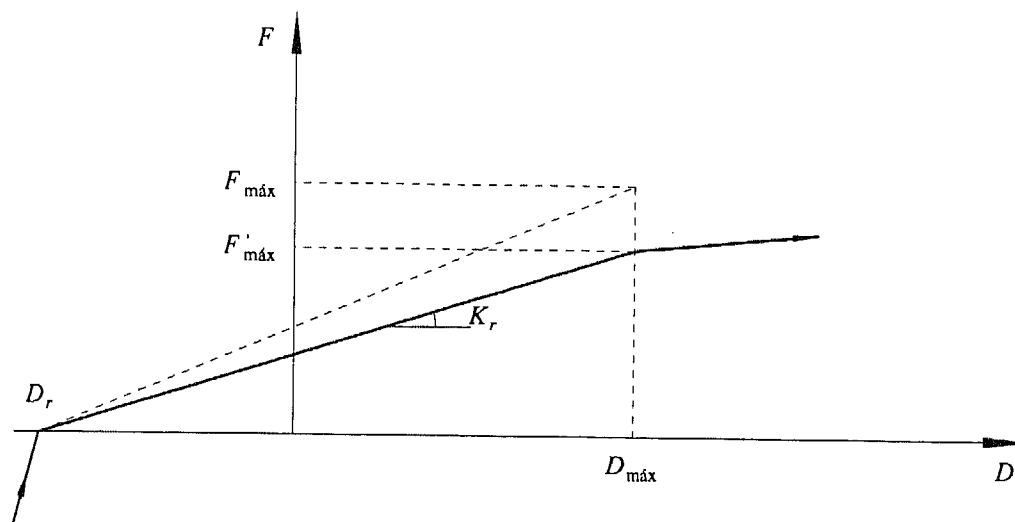


Figura 4.6 - Recarga com degradação de resistência.

A degradação de resistência é introduzida no programa recorrendo ao parâmetro  $\gamma$ , como veremos mais adiante. Este assume um valor diferente de zero quando se pretende introduzir a degradação de resistência.

Os valores absolutos da força e deslocamento máximo generalizado a atingir só serão actualizados caso sejam ultrapassados (troços 18 e 20 - Figura 4.3), tanto para o caso em que não se considera degradação de resistência como para o caso em que esta é tida em conta.

#### Efeitos de "pinching" e "slipping":

Os efeitos de "pinching" e "slipping" foram introduzidos no modelo considerando uma diminuição de rigidez na zona em que o esforço transversal é predominante relativamente ao momento flector, Eto *et al.* [35], dada pela expressão 4.5. O valor dessa rigidez é válido até se intersectar a recta que une a origem das coordenadas ao ponto correspondente à amplitude máxima obtida no ciclo anterior.

A consideração do efeito de "pinching" (efeito de aperto) conduz à subdivisão do ramo de recarga em dois troços (troços 8-9 e 12-13 - Figura 4.7). Este efeito poderá ser tido em conta a partir do parâmetro  $\beta$  que afecta a rigidez  $K$  da seguinte forma:

$$K = F_{\max} / (D_{\max} - D_r) \times (D_y / D_{\max})^\beta \quad (4.5)$$

sendo  $D_r$  o valor do deslocamento generalizado correspondente à força generalizada nula do ciclo anterior e  $F_{\max}$  e  $D_{\max}$  os valores máximos obtidos no ciclo anterior.

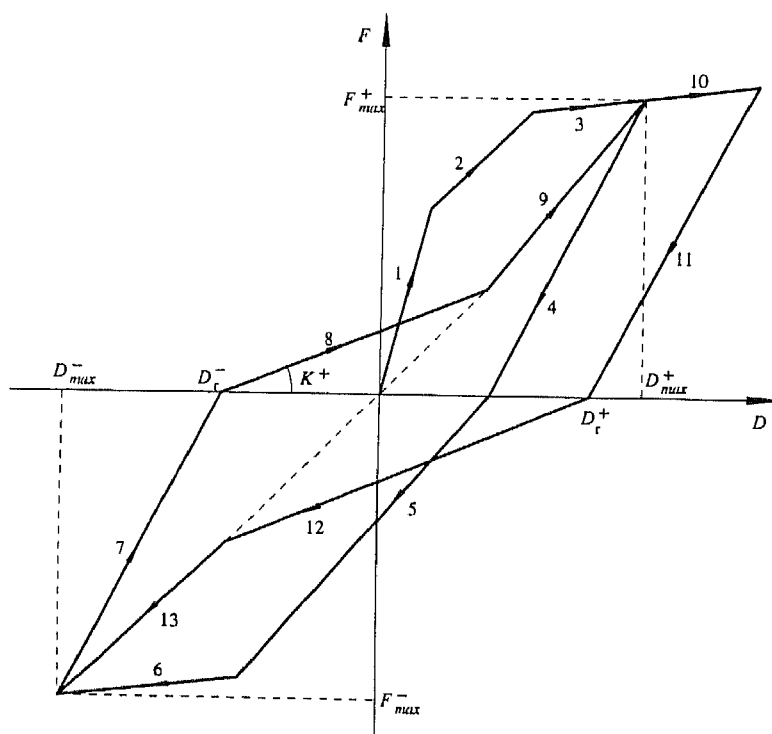


Figura 4.7 - Consideração do efeito de "pinching" no modelo desenvolvido.

O valor desta rigidez é válido até se intersectar a recta que une a origem das coordenadas aos pontos  $(F_{\max}, D_{\max})$ , sendo a rigidez a partir desse ponto dada pela inclinação dessa recta.

A caracterização da recarga com "pinching" conduziu à introdução de um novo factor  $(D_y / D_{\max})^\beta$  no cálculo da rigidez de um dos ramos da recarga, sendo o outro ramo função deste. No referido factor é introduzido um parâmetro  $\beta$  (varia entre 0 e 0.5) que depende da importância do esforço transversal sendo calculado em função da razão  $l/d$  (sendo  $l$  o comprimento da peça e  $d$  a altura útil da secção transversal), [36]. Assim teremos:

$$\begin{aligned}
 \beta &= 0.5 & \text{se } l/d < 1.5 \\
 \beta &= 0.8 - 0.2 l/d & \text{se } 1.5 \leq l/d < 4.0 \\
 \beta &= 0.0 & \text{se } l/d \geq 4.0
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

### Ciclos internos:

Quando se dá a inversão do carregamento, antes de se atingir os valores máximos absolutos, torna-se necessário guardar os valores máximos relativos obtidos nessa inversão. Assim, para ciclos mais internos, o ponto de resposta move-se em direcção a esses máximos relativos, permitindo-se a reprodução de pequenos ciclos de carga e descarga (troços 19, 20, 21 e 22 - Figura 4.3).

Caso sejam ultrapassados os valores máximos relativos, o ponto de resposta move-se em direcção ao máximo absoluto (troço 23 - Figura 4.3).

Assim revela-se, como sendo um dos aspectos mais importantes do modelo, a possibilidade deste efectuar ciclos internos com associação de todas as propriedades (efeitos) anteriormente citadas.

### Quantificação da degradação de rigidez e da degradação de resistência:

Quando se fala em degradação de rigidez torna-se indispensável distinguir duas zonas dos diagramas em que essa degradação é quantificada de maneira diferente. Assim, a primeira dessas da força, (troços 7-8 e 10-11 - Figura 4.3), em que a degradação de rigidez é dada pela expressão 4.1. A segunda degradação de rigidez está relacionada com o que se verifica experimentalmente, em que, quando há inversão do sinal da força generalizada, a nova rigidez é dada pela recta que une o ponto correspondente ao valor da força nula e o ponto da força máxima atingido no ciclo anterior (troços 12, 15 e 18 - Figura 4.3). A consideração de degradação de resistência diminui ainda mais esta rigidez, já que, o ponto correspondente à força máxima obtida no ciclo anterior vem diminuída em função da degradação de resistência entretanto verificada (troço 12A - Figura 4.3). Esta degradação de resistência é quantificada através do parâmetro ( $\gamma$ ) proposto por Wang *et al.* [37] e que se baseia no conceito de degradação acumulada. Assim, a degradação de um elemento estrutural ou de uma ligação sujeita a forças cíclicas é assumida como dependendo do máximo deslocamento sofrido por esse elemento durante cada ciclo. Este parâmetro de força cíclica é denominado por ( $\gamma$ ) e é definido como:

$$\gamma = c \cdot \sum_{i=1}^N \frac{D_i}{D_f} \quad (4.7)$$

em que:

$c$  - constante (menor que 1);

$D_i$  - máximo deslocamento do ciclo  $i$ ;

$D_f$  - deslocamento último do elemento sujeito a um carregamento monotónico definido da seguinte forma:

$$D_f = D_y \times \mu \quad (4.8)$$

sendo:

$D_y$  - deslocamento generalizado correspondente à cedência

$\mu$  - ductilidade última generalizada

É preciso notar que somente os deslocamentos ocorridos numa direcção são acumulados. Para carregamentos não simétricos devem ser usados valores separados de  $\gamma$  para cada direcção. Wang *et al.* [37] relacionaram este parâmetro de força  $\gamma$  com uma quantidade escalar adimensional,  $PD$ , que foi denominada por parâmetro de degradação, cujo valor varia entre 0 e 1 e que está relacionado com  $\gamma$  pela expressão:

$$PD = \frac{e^{n\gamma} - 1}{e^n - 1} \quad (4.9)$$

em que  $n$  é uma constante que depende dos valores experimentais.

Este parâmetro de degradação foi calibrado com uma série de resultados experimentais, tendo sido proposto o uso de  $n = 1$  e  $c = 0.1$ , Wang *et al.* [37]. No modelo, esta degradação corresponde a um novo valor da força de chegada,  $F'_{\max}$ , em função da força máxima do ciclo anterior,  $F_{\max}$ , dada pela expressão 4.4.

### 4.3 - APLICAÇÃO DO MODELO HISTERÉTICO AO CASO DA FLEXÃO

A modelação do comportamento repetido e alternado é efectuada através da definição da evolução das relações momento-curvatura ao longo dum processo de carregamento,

tomando como referência uma curva base trilinear. A curva base é definida completamente para os dois sentidos de flexão à custa de nove parâmetros, sendo eles:

$K_0^+$  ( $= K_0^-$ ) - rigidez inicial de flexão (igual para os dois sentidos);

$K_1^+$  e  $K_1^-$  - rigidez após fissuração para os dois sentidos de flexão;

$K_2^+$  e  $K_2^-$  - rigidez após cedência para os dois sentidos de flexão;

$D_c^+$  e  $D_c^-$  - curvatura correspondente à fissuração para os dois sentidos de flexão;

$D_y^+$  e  $D_y^-$  - curvatura correspondente à cedência para os dois sentidos de flexão.

A rigidez de flexão inicial da secção ( $K_0$ ) é calculada a partir das características do material (módulo de elasticidade  $E$ ) e da geometria da secção (inércia  $I$  em torno do eixo de flexão). Os valores da rigidez após fissuração e da rigidez após cedência podem ser calculados a partir do conhecimento dos pontos de ocorrência da fissuração e plastificação (cedência) respectivamente. E estes pontos, por sua vez, podem ser determinados experimentalmente ou por ajuste a uma curva obtida numericamente usando, por exemplo, um modelo de fibras.

Nas aplicações realizadas neste trabalho (secções 7.2 e 7.3) a curva base de comportamento em flexão das diversas secções de betão armado foram obtidas através do programa *BIAX* desenvolvido por Carlos T. Vaz [38] baseado no modelo de fibras. De acordo com esse modelo os pilares são discretizados segundo o seu eixo longitudinal em secções e ao nível das secções em fatias (no caso de flexão uniaxial) ou filamentos (no caso de flexão biaxial) com comportamento uniaxial segundo o seu eixo longitudinal (Figura 4.8), sendo ignorados os efeitos do esforço transversal. É admitido que as secções se mantêm planas após deformação, o que permite calcular o campo de extensões axiais na secção em função da extensão axial média  $\varepsilon_m$  e das curvaturas segundo os eixos principais  $\phi_x$  e  $\phi_y$ , através da expressão:

$$\varepsilon(x, y) = \varepsilon_m + \phi_x y - \phi_y x \quad (4.10)$$

e, uma vez obtidas as extensões para cada filamento as tensões respectivas podem ser calculadas a partir das relações tensões-extensões consideradas para os materiais. A complexidade e exactidão dos modelos fibrosos estão intimamente ligadas às relações tensões-deformações adoptadas para os materiais [38].

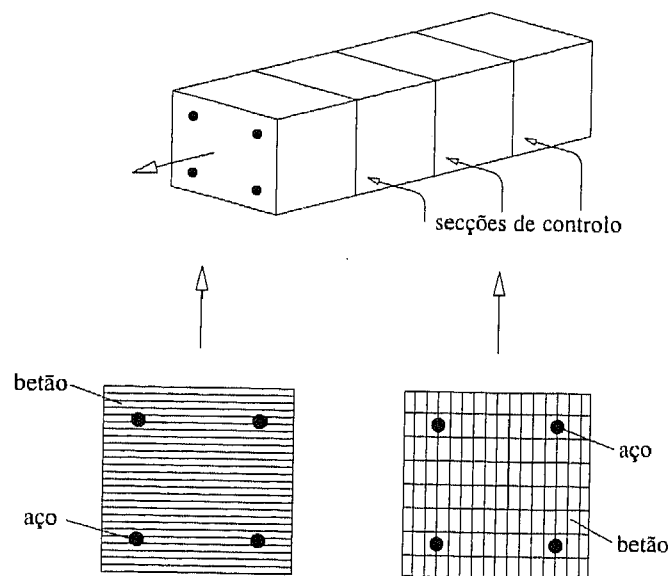


Figura 4.8 - Modelo de fibras. Discretização dos elementos e das secções.

A "matriz de rigidez" incremental da secção pode ser determinada, a partir das equações de equilíbrio. A matriz de rigidez do elemento é então determinada de uma forma imediata, por integração das matrizes de rigidez das diversas secções ao longo do comprimento do elemento. Esta matriz é estabelecida admitindo uma distribuição uniforme de rigidez ao longo do comprimento desse elemento.

Com o modelo de fibras acima apresentado é possível definir a curva-base do comportamento em flexão. Mas, além dos nove parâmetros, que definem a curva-base, é ainda necessário introduzir os parâmetros definidores da degradação de rigidez ( $\alpha$ ), degradação de resistência ( $\gamma$ ) e do efeito de "slipping" ( $\beta$ ) para ter o modelo de flexão completamente caracterizado. Estes parâmetros poderão ser estimados a partir de fórmulas empíricas obtidas com resultados experimentais ou ainda por comparação directa com resultados experimentais como será apresentado em 7.2.

Com base em inúmeros ensaios experimentais e recorrendo a regressões adequadas William C. Stone e Andrew W. Taylor [39] chegaram às seguintes expressões para os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  para o caso de pilares de pontes com secção circular e armadura helicoidal sujeitos a um carregamento cíclico com esforço axial:

$$\alpha = 43.73 + \frac{28.86}{\rho_a} (1 - 0.46 R_a) - \frac{1.5}{\sigma_0} \left( 1 - \frac{8.81}{\sqrt{f'_c}} \right) + 19.12 \sigma_0 - 17.82 R_y - \frac{24.8}{R_y} - 24.04 R_s - \frac{1.316}{R_s} + 42.26 R_D + 376.3 \frac{Q}{P} \quad (4.11)$$

$$\beta = 5.523 - 2.462 R_a - 35.01 R_f + 20.88 R_a R_f - \frac{0.0767}{R_a R_f} + 0.106 R_p \quad (4.12)$$

$$\gamma = -0.789 + \frac{1.52}{\rho_a} (1 - 0.2 \rho_s - 0.263 R_a) + 0.583 R_D - 0.71 R_L (0.6)^{\rho_s} + \frac{1.64}{\sqrt{f'_c}} \left[ \frac{4.308}{R_L} + R_L \left( 1 + \frac{f'_c}{50 \rho_s} \right) - \frac{3.48}{f_{ys}} + \frac{\rho_s f'_c}{80} \right] \quad (4.13)$$

onde surgem as grandezas assim definidas:

$$\sigma_0 = \frac{10 P_e}{f'_c A_g} \quad (\text{kN, MPa e cm}^2) \quad (4.14)$$

$$P = \frac{2 a_s f_{ys} D_c}{S} \quad (4.15)$$

$$Q = 4 \rho_a \sqrt{f'_c} \sqrt{\sigma_0 - 0.1} \quad [Q = 0 \text{ se } \sigma_0 < 0.1] \quad (4.16)$$

$$R_s = \frac{d_s}{S} \quad (4.17)$$

$$R_y = \frac{f_{ys}}{f_{ya}} \quad (4.18)$$

$$R_a = \frac{A_g}{A_c} \quad (4.19)$$

$$R_D = \frac{S}{D} \quad (4.20)$$

$$R_L = \frac{L}{D} \quad (4.21)$$

$$R_f = \frac{f'_c}{f_{ya}} \quad (4.22)$$

$$R_p = \frac{\rho_s}{\rho_a} \quad (4.23)$$

que dependem dos seguintes parâmetros:

- $f'_c$  - resistência à compressão do betão em provetes cilíndricos [MPa];
- $f_{yu}$  - tensão de cedência da armadura longitudinal [MPa];
- $f_{ys}$  - tensão de cedência da armadura helicoidal [MPa];
- $L$  - comprimento do pilar, desde a base até ao primeiro ponto de inflexão da deformada (ou ponto de momento nulo) [cm];
- $D$  - diâmetro da secção transversal do pilar [cm];
- $D_c$  - diâmetro do núcleo cintado [cm];
- $A_g$  - área da secção transversal [cm<sup>2</sup>];
- $A_c$  - área do núcleo cintado [cm<sup>2</sup>];
- $d_s$  - diâmetro da armadura helicoidal [cm];
- $a_s$  - área de um varão da armadura helicoidal [cm<sup>2</sup>];
- $S$  - espaçamento (passo) da armadura helicoidal [cm];
- $P_e$  - força axial no pilar [kN];
- $\rho_a$  - percentagem da armadura longitudinal [%];
- $\rho_s$  - percentagem volumétrica da armadura helicoidal [%].

Estas expressões foram implementadas num programa de cálculo automático desenvolvido (*PREANL*), como se verá em 6.4.1.

As regras vistas em 4.2 permitem traduzir as características idealizadas para o comportamento em flexão de elementos de betão armado, nomeadamente a evolução da rigidez de um subelemento ao longo de um processo de carregamento repetido e alternado.



## **Capítulo 5**

### **IDEALIZAÇÃO DOS ELEMENTOS E MODELO ESTRUTURAL**

## *Capítulo 5*

# **IDEALIZAÇÃO DOS ELEMENTOS E MODELO ESTRUTURAL**

### **5.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS**

No modelo hysterético que se implementou para a avaliação da resposta sísmica de elementos de betão armado sujeitos predominantemente a flexão admite-se que as deformações inelásticas estão concentradas junto das extremidades dos elementos numa determinada extensão ao longo da qual ocorrem os fenómenos de comportamento não-linear. De facto, como foi salientado, em presença de acções sísmicas intensas, o comportamento de elementos estruturais de pórticos de médio e alto porte é geralmente controlado pela sua capacidade de dissipação de energia nas rótulas plásticas e verifica-se que as zonas críticas, nas quais são excedidos os limites elásticos quando a resposta estrutural se processa em regime não-linear, se localizam normalmente nas extremidades dos elementos.

Tendo em conta estes aspectos, considera-se então que em cada elemento estrutural as zonas inelásticas (recorda-se que as zonas inelásticas são as regiões do elemento onde podem ocorrer deformações inelásticas) estão localizadas junto às extremidades e que, na porção compreendida entre essas zonas, o elemento tem um comportamento elástico e linear [3]. O comportamento de cada zona inelástica é representado por meio do modelo hysterético descrito no Capítulo 4.

A idealização do elemento estrutural consiste na consideração de um macro-elemento de barra constituído pela associação em série de três subelementos. Tendo o subelemento central um comportamento elástico linear e estando ligado em cada uma das extremidades a um subelemento com comportamento não-linear. Os subelementos extremos servem para representar as zonas inelásticas do elemento, sendo as leis de restituição definidas pelo

modelo hysterético aplicado aos diagramas momento-curvatura das secções médias dos subelementos extremos, com o objectivo de reproduzir os fenómenos hysteréticos que eventualmente ocorram naquelas zonas. Para caracterizar a deformabilidade dos elementos em regime inelástico a partir dos diagramas momento-curvatura das secções atrás referidas, admite-se que a curvatura é constante nas zonas inelásticas e tem o valor da curvatura na secção média desses subelementos extremos.

Apresenta-se neste capítulo a descrição do macro-elemento de barra desenvolvido e a sua implementação num modelo de estruturas reticuladas planas.

Na secção 5.2 é apresentada a idealização do macro-elemento estrutural, é descrita a forma como é definida a rigidez dos subelementos extremos a partir do diagrama momento-curvatura nas secções médias desses subelementos, é ilustrado o procedimento de formação da matriz de rigidez do macro-elemento e finalmente é apresentado o problema do comprimento da rótula plástica.

Em seguida apresenta-se em 5.3 o modelo utilizado para idealização de uma estrutura plana, incluindo as características globais de rigidez, massa e amortecimento obtidas a partir das propriedades dos elementos.

## **5.2 - IDEALIZAÇÃO DO MACRO-ELEMENTO ESTRUTURAL**

### **5.2.1 - Descrição geral do modelo**

O modelo analítico proposto para representar o comportamento de um elemento estrutural de betão armado sujeito a flexão repetida e alternada consiste na idealização de uma barra como um subelemento com comportamentolinear associado a subelementos com comportamento não-linear ligados às suas extremidades. Tratando-se de um elemento de estrutura plana, para a definição do modelo consideram-se como deslocamentos do elemento independentes no plano as duas rotações em torno de um eixo perpendicular ao plano e os dois deslocamentos em cada uma das extremidades (um na direcção axial e outro na direcção perpendicular à barra), tal como se esquematiza na Figura 5.1.

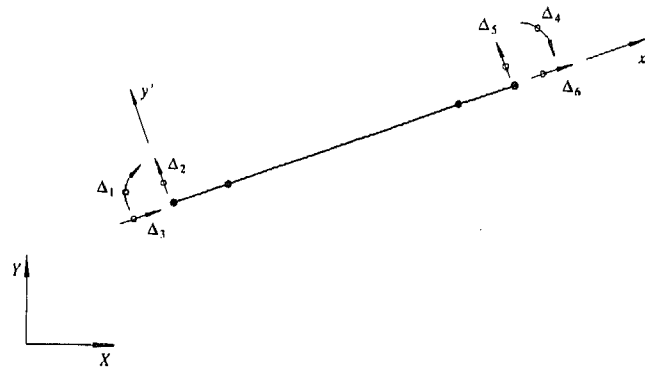


Figura 5.1 - Elemento de barra como associação de três subelementos.

Os subelementos extremos pretendem representar eventuais zonas inelásticas que se desenvolvem ao longo de determinada extensão junto às extremidades da barra (designada por comprimento da rótula plástica), para o que se admite que o comportamento da zona inelástica pode ser caracterizado pelo comportamento não-linear da secção média desse subelemento extremo. Admitindo-se assim que a curvatura ao longo do subelemento não-linear é constante e igual ao valor que assumir a sua secção média. As deformações inelásticas do macroelemento consideram-se assim concentradas nos subelementos extremos e são contabilizadas através da deformação da secção média desses subelementos, admitindo-se que a barra tem um comportamento elástico e linear ao longo do restante comprimento.

Apesar de se admitir que o subelemento central possui um comportamento elástico e linear no decurso do carregamento repetido e alternado, e na hipótese de já à partida esse subelemento estar em regime fendilhado (devido apenas às cargas estáticas, por exemplo), é possível no modelo desenvolvido definir para esse subelemento uma rigidez de flexão fragilizada, isto é, diferente da rigidez em regime elástico. Sabendo que esta rigidez de flexão,  $(EI)' = (EI)_0 \times K$ , com  $K \in ]0;1]$ , mantém-se inalterável ao longo do carregamento.

Este tipo de modelo, que se insere nos modelos de plasticidade concentrada, permite, através da caracterização adequada da restituição dos subelementos não-lineares, ter em conta os principais efeitos observados na resposta inelástica dos elementos de betão armado sujeitos a acções cíclicas, que foram anteriormente descritos. Efectivamente, quer os efeitos atribuídos sobretudo à flexão, associada ou não a esforço axial, quer os efeitos normalmente considerados decorrentes da existência de esforços transversos elevados ou ainda da ocorrência de escorregamento de varões dentro dos nós de ligação entre os elementos, podem ser representados através de leis de restituição histerética adequadas para os elementos não-lineares introduzidos [3]. Refira-se que os diferentes efeitos podem ser incluídos no comportamento de um único elemento não-linear colocado em cada extremidade da barra ou,

em alternativa, ser considerados separadamente através da substituição desse elemento por subelementos em série, cada um representando uma parcela de deformação inelástica.

No modelo desenvolvido considera-se, como foi referido, uma associação em série de três subelementos, estando o comportamento não-linear traduzido pelos subelementos colocados nas extremidades da barra. Deste modo procurou implementar-se o modelo de forma a que, por um lado, a lei de restituição utilizada para os elementos não-lineares fosse capaz de incluir os diversos efeitos observados no comportamento dos elementos, e a que, por outro lado, qualquer modificação ou extensão do modelo fosse facilmente concretizável.

Para representar a restituição dos subelementos não-lineares, é utilizado o modelo histerético desenvolvido, apresentado anteriormente em detalhe no Capítulo 4, que permite descrever com generalidade a evolução das relações momento-curvatura nas zonas inelásticas dos elementos, e é constituído por um conjunto de regras que foram estabelecidas de modo a ter em conta as características essenciais do comportamento em flexão repetida e alternada dos elementos de betão armado.

### 5.2.2 - Rigidez das zonas inelásticas

A rigidez de um sub-elemento inelástico existente numa extremidade de um elemento de barra é considerada, como habitualmente em modelos deste tipo, proporcional à componente de rigidez de flexão da barra inicial em regime elástico:

$$k = f \cdot \frac{4EI}{l} \quad (5.1)$$

$k$  - rigidez do sub-elemento inelástico;

$EI$  - rigidez de flexão da secção da barra ( $E$  - módulo de elasticidade do material;  
 $I$  - momento da inércia da secção em relação ao eixo de flexão);

O parâmetro de rigidez  $f$  pode ser obtido directamente das relações momento-curvatura nas secções de controle da barra. Como é sabido, os diagramas momento-curvatura só poderão ser determinados se for conhecida "a priori" uma distribuição de momentos flectores e as relações momento-curvatura ao longo da barra, sendo usual adoptar determinadas hipóteses, como por exemplo uma distribuição de momentos antissimétricos para elementos de pórticos sujeitos a acções horizontais [27].

No modelo desenvolvido, optou-se por utilizar as relações momento-curvatura nas secções médias dos subelementos extremos, dado que estas relações são obtidas directamente a partir do comportamento das secções sem ser necessário fixar previamente determinadas distribuições de esforços ao longo dos elementos de barra. No modelo de barra desenvolvido são considerados subelementos não-lineares nas extremidades que pretendem representar a descontinuidade de rotação nas zonas críticas dos elementos, e que corresponde à excedência dos esforços de fendilhação que ocorrem ao longo de um determinado comprimento numa estrutura real quando sujeito a determinadas solicitações. De facto, as zonas inelásticas existentes nos elementos de betão armado estão associadas à deformação inelástica do aço da armadura e ocorrem num comprimento de dimensão finita, devido a fenómenos como a perda de aderência das armaduras e a formação de fendas diagonais. Este comprimento de plastificação ( $l_p$ ) é normalmente inferior à altura da secção da barra e pode variar com os valores de curvatura atingida e com o material [40], ver o ponto 5.2.4.

O modelo desenvolvido considera que o comprimento de plastificação  $l_p$  é constante durante o processo de carregamento e admite para o cálculo da rigidez presente no subelemento não-linear que a curvatura não varia ao longo desse comprimento e é igual ao valor que assume a secção média do subelemento. Assim, com o decorrer da solicitação e a consequente evolução dos momentos nos diversos elementos de barra que constituem a estrutura, vai sendo realizada uma verificação da evolução desses momentos, em todas as secções com comportamento não-linear, que terão de acompanhar a lei momentos-curvatura previamente estabelecida (e respeitar as regras do modelo, ver Capítulo 4).

Sendo assim, e uma vez que o modelo baseia-se num processo incremental trabalhando com a rigidez tangente, bastará em termos de estrutura realizar as correcções necessárias de rigidez à flexão dos sub-elementos não-lineares ( $k$ , expressão 5.1) através do parâmetro de rigidez ( $f$ ).

### 5.2.3 - Matriz de rigidez do elemento

No que se segue, apresenta-se a determinação da matriz de rigidez de um elemento estrutural, de acordo com a metodologia habitual em análise matricial de estruturas, com o objectivo de completar a descrição do modelo estrutural.

O cálculo da matriz de rigidez do macro-elemento será feito em relação aos seis graus de liberdade de extremidade. E, uma vez que optou-se por um modelo plano de estrutura considerando os três graus de liberdade por nó, obteremos a matriz de rigidez de um macro-elemento com seis graus de liberdade, como se ilustra na Figura 5.2.

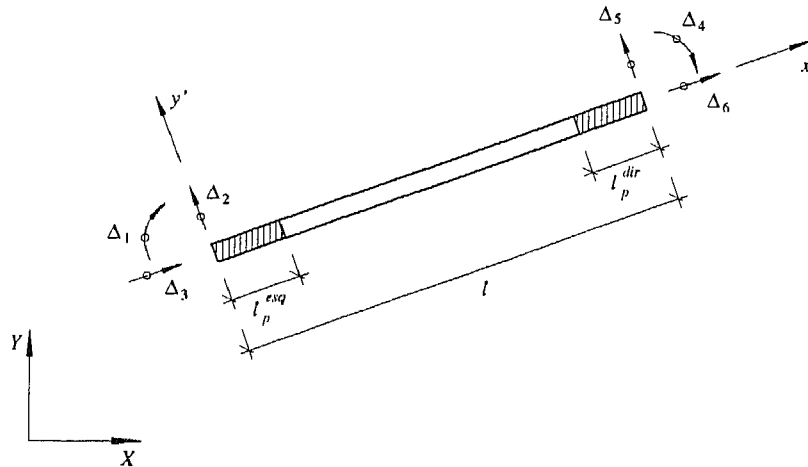


Figura 5.2 - Macro-elemento de barra com seis graus de liberdade.

Para isto utilizou-se a matriz de rigidez de um elemento definido pela associação em série de três subelementos com diferentes valores de rigidez à flexão ( $EI$ ), condensada aos graus de liberdade das extremidades do referido elemento, ver Figura 5.3.

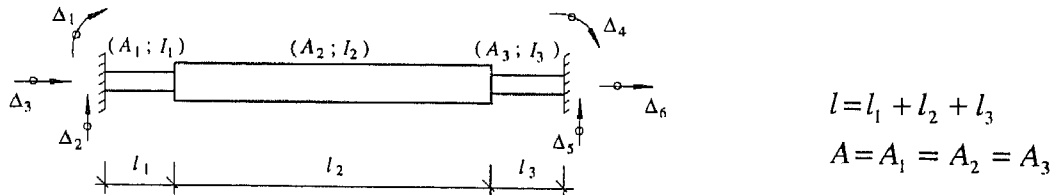


Figura 5.3 - Elemento de barra definido pela associação de três subelementos com diferentes características mecânicas.

De acordo com as hipóteses anteriormente referidas, enquanto não ocorrem deformações inelásticas num elemento, o que corresponde a não ser ultrapassado o valor do momento flector de fendilhação em nenhuma das secções extremas, admite-se que o comportamento do elemento é elástico e a sua rigidez é a do elemento de barra corrente elástico e linear. No entanto, quando ao longo do processo de solicitação é ultrapassado o momento flector de fendilhação numa extremidade de alguma barra, é corrigida a rigidez do subelemento correspondente.

Foi assim definido um elemento genérico composto pela associação de três subelementos em série de forma a cobrir todas as situações que possam ocorrer num elemento.

Como foi dito atrás, no início do processo de solicitação, e portanto, quando ainda os diferentes elementos estão a trabalhar em regime elástico a rigidez à flexão dos subelementos extremos é igual à rigidez do elemento central que por sua vez é igual à rigidez elástica. A partir do instante em que é excedido o esforço limite elástico numa qualquer extremidade dum barra corrige-se a sua rigidez à flexão entrando assim em regime não-linear.

Para todos os subelementos definidos, considera-se a rigidez axial constante e igual à rigidez em regime elástico da secção com área constante  $A$ :

$$K_a = \frac{EA}{l} \quad (5.2)$$

A matriz de rigidez da barra é obtida, considerando todos os graus de liberdade (três por nó) dos subelementos, através do espalhamento adequado da rigidez dos subelementos, sendo posteriormente efectuada a redução aos graus de liberdade dos nós extremos do macro-elemento por um processo de condensação estática.

Apresenta-se no Anexo I o cálculo da matriz de rigidez do macro-elemento condensada aos graus de liberdade de extremidade, utilizando a metodologia exposta.

#### 5.2.4 - Comprimento da rótula plástica

A apresentação do macro-elemento de barra de betão armado deixou em aberto duas questões. A primeira questão diz respeito à razoabilidade de admitir que as curvaturas são constantes ao longo do comprimento dos subelementos com comportamento não-linear enquanto que a segunda questão, que é um pouco consequência da primeira, consiste em se saber qual o comprimento que esses subelementos devem possuir.

Estas questões estão intimamente ligadas ao comprimento da rótula plástica. Note-se que nos modelos fibrosos, o comprimento da rótula plástica não necessita de ser conhecido uma vez que a distribuição de curvaturas pode ser determinada através dos seus valores nas secções de controlo. Facto idêntico se verifica em relação aos modelos em que as zonas com comportamento não-linear são discretizadas com vários elementos não-lineares. O problema coloca-se, assim, quando essas zonas são discretizadas num único elemento, por razões de economia de cálculo como acontece no modelo desenvolvido. Neste caso, e devido à hipótese formulada de que a distribuição de curvaturas é constante no elemento, com um valor



calculado a partir do momento flector na secção média do troço com comportamento não-linear, poder-se-á ser conduzido a erros grosseiros de avaliação por defeito ou por excesso, conforme o comprimento considerado para esses elementos seja, respectivamente, demasiado grande ou demasiado pequeno. Afigura-se portanto que esses elementos deverão possuir um comprimento da ordem de grandeza do comprimento da rótula plástica [38].

O comprimento da rótula plástica depende basicamente da extensão da zona em que se verifica a plastificação das armaduras longitudinais mas pode ser também afectado por outros dois fenómenos com alguma importância. O primeiro destes fenómenos é usualmente designado como "yield penetration" sendo devido à impossibilidade física de, na secção de encastramento, a curvatura passar dum valor máximo para zero num comprimento infinitesimal, gerando-se uma rotação adicional. O segundo fenómeno consiste na inclinação das fendas devido ao efeito do esforço transversal, situação em que a hipótese das secções planas deixa de ser válida e as tensões e deformações nas armaduras são superiores às calculadas, verificando-se o "alastramento" da rótula plástica (Figura 5.4) [38].

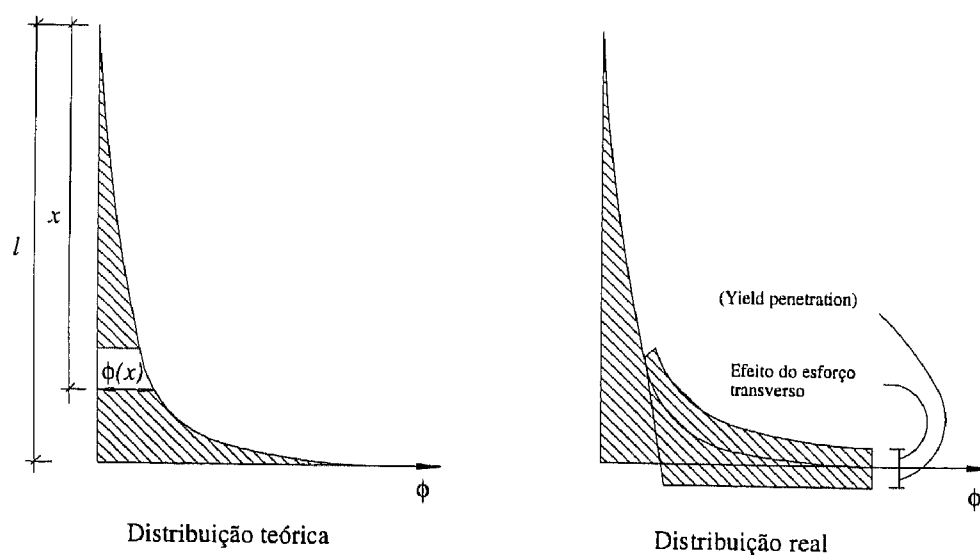


Figura 5.4 - Influência da "yield penetration" e da inclinação das fendas devida ao esforço transversal no comprimento da rótula plástica.

Park e Paulay [41] referem as expressões empíricas propostas por Baker e Corley para estimar o comprimento da rótula plástica, em que é aceite o princípio de este comprimento ser proporcional à distância da secção crítica ao ponto de momentos nulos ("point of contraflexure"). Mais recentemente, Priestley e Park [42], baseados na análise dos resultados de um grande número de ensaios realizados na Universidade de Canterbury, Nova Zelândia

[43, 44, 45, 46], concluíram que o comprimento da rótula plástica praticamente não é influenciado pela distância da secção crítica ao ponto de momento nulo. Também com base nesses resultados Priestley e Park concluíram que uma estimativa razoável para o comprimento da rótula plástica,  $l_p$ , pode ser obtida fazendo  $l_p = 0.5d$  em secções circulares ou  $l_p = 0.5h$  em secções rectangulares, representando  $d$  e  $h$  respectivamente o diâmetro e altura das secções [38].

Um grupo da Universidade de Canterbury, debruçando-se sobre o problema do comprimento da rótula plástica admitiu uma aproximação bilinear das relações momentos-curvaturas e teve em conta o conceito de rótula plástica. A distribuição das curvaturas admitida corresponde à consideração de uma aproximação elasto-plástica da relação momentos-curvaturas nas secções das peças de betão armado e ainda à consideração de uma zona de comprimento  $l_p$  onde se concentra a deformação plástica correspondente a uma curvatura plástica constante. Na realidade, nem as relações momentos-curvaturas são bilineares, nem existe uma zona de curvatura plástica constante. No entanto, os autores, com base nesta fórmula aproximada e num número considerável de observações experimentais, calibraram o valor do comprimento da rótula plástica ( $l_p$ ), tendo proposto a seguinte fórmula [42, 47, 48]:

$$l_p = 0.08l + 6d_b \quad (5.3)$$

sendo:

$l$  - comprimento do elemento

$d_b$  - diâmetro dos varões da armadura longitudinal

Com base nos resultados obtidos em testes de calibração realizados por Carlos T. Vaz com um programa de cálculo automático (SABRI [38]), em que as zonas críticas foram discretizadas num número significativo de elementos (5 a 10) não-lineares obtiveram-se resultados concordantes com as fórmulas empíricas propostas. E, face a esses resultados afigura-se que, quando as zonas críticas sejam discretizadas apenas num único elemento não-linear, devem-se considerar as relações:  $0.5d < l_p < d$  (para secções circulares) ou  $0.5h < l_p < h$  (para secções rectangulares) [38].

### 5.3 - IDEALIZAÇÃO DA ESTRUTURA

#### 5.3.1 - Matriz de rigidez

Conforme foi anteriormente referido no ponto 5.2, para idealização de estrutura global recorre-se a um modelo plano constituído por um sistema discretizado em elementos de barra, cujas extremidades estão ligadas entre si nos pontos nodais (nós). Em cada nó da estrutura consideram-se três graus de liberdade associados aos três deslocamentos no plano (duas translações e uma rotação) referidos a um sistema de eixos ortonormado ligado à estrutura, que se designa referencial geral da estrutura.

Dada uma configuração deformada da estrutura, expressa na discretização considerada pelo vector dos deslocamentos nodais  $u$ , o vector  $F$  das forças nodais correspondentes aos esforços internos instalados nos elementos estruturais pode exprimir-se por:

$$F = K u \quad (5.4)$$

em que  $K$  é a matriz de rigidez global da estrutura e pode ser obtida por um processo de espalhamento, a partir das contribuições das matrizes de rigidez dos elementos:

$$K = \sum_i K_i \quad (5.5)$$

Cada coeficiente da matriz global é assim calculado através da soma apropriada dos coeficientes das matrizes elementares associados aos deslocamentos nodais da estrutura correspondentes.

Uma vez que a matriz de rigidez de cada elemento é construída num sistema de eixos ligado ao elemento (referencial local), é necessário efectuar a sua transformação para o referencial geral da estrutura, de modo a que se possa obter a matriz de rigidez global por espalhamento das matrizes de rigidez dos elementos estruturais.

Atendendo a que as forças generalizadas e os deslocamentos nos seis graus de liberdade de um elemento podem ser transformados do referencial local para o geral através de uma rotação de referencial, tem-se:

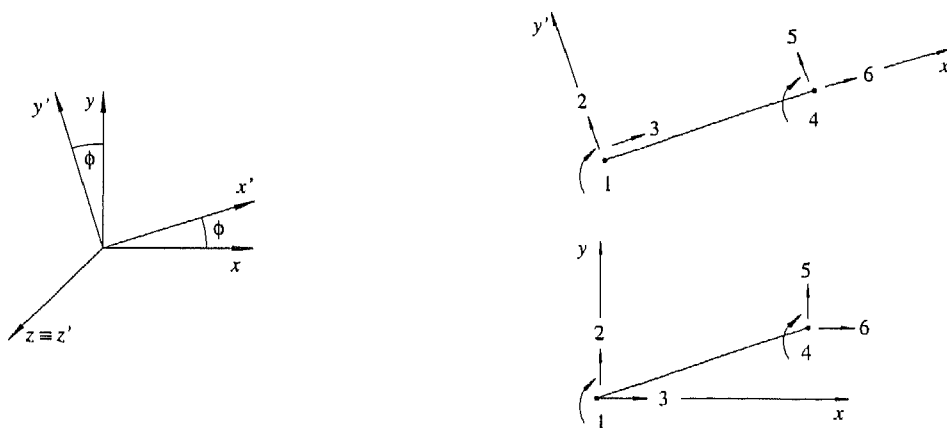
$$R' = T^T R \quad (5.6)$$

$$u' = T^T u \quad (5.7)$$

em que  $R'$  e  $R$  são os vectores de forças no extremo de um elemento definidos no referencial local e geral respectivamente,  $u'$  e  $u$  são os vectores de deslocamento correspondentes e  $T$  é a matriz de transformação da barra. Esta matriz pode ser expressa por:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & [0] & & \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & & & \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & [0] & & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ & & & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

para a rotação de referencial representada na Figura 5.5, onde se esquematiza a transformação de graus de liberdade para um elemento de barra genérico.



a) rotação de referencial num elemento

b) graus de liberdade do elemento

Figura 5.5 - Transformação de referencial num elemento de barra.

O equilíbrio de um elemento pode ser expresso, como se viu anteriormente por:

$$R' = K' u' \quad (5.9)$$

sendo  $K'$  a matriz de rigidez do elemento definida no referencial local.

Tendo em conta as expressões (5.6) e (5.7), tem-se:

$$T^T R = K' T^T u \quad (5.10)$$

ou, atendendo à ortogonalidade da matriz  $T$ :

$$R = T K' T^T u \quad (5.11)$$

Esta equação exprime o equilíbrio do elemento no referencial geral, e pode escrever-se na forma:

$$R = K u \quad (5.12)$$

em que  $K$  é a matriz de rigidez do elemento no referencial geral.

Das expressões (5.11) e (5.12) decorre que a transformação da matriz de rigidez de um elemento vem expressa por:

$$K = T K' T^T \quad (5.13)$$

### 5.3.2 - Matriz de massa

Para representação das características de inércia de uma estrutura, utiliza-se no modelo plano referido uma matriz de massa  $M$  associada aos graus de liberdade considerados na discretização da estrutura. Esta matriz permite relacionar as forças nodais  $I$  correspondentes às forças de inércia que se desenvolvem nos elementos da estrutura quando esta está sujeita a um campo de acelerações expresso pelo vector de acelerações nodais  $\ddot{u}$ :

$$I = M \ddot{u} \quad (5.14)$$

A determinação da matriz de massa global da estrutura  $M$  é efectuada de forma análoga à descrita para a matriz de rigidez, por espalhamento das matrizes de massa de cada elemento estrutural:

$$M = \sum_i M_i \quad (5.15)$$

Admite-se que as matrizes de massa elementares são consistentes [13, 49], o que corresponde à consideração de todos os graus de liberdade do elemento de barra, assumindo, para obtenção dos coeficientes da matriz  $M_i$ , que os deslocamentos ao longo de um elemento são definidos em termos dos deslocamentos nodais através das mesmas funções utilizadas na determinação dos coeficientes da matriz de rigidez do elemento.

Neste pressuposto, a matriz de massa de um elemento de barra de comprimento  $l$  e secção constante com área  $A$ , no referencial local, vem:

$$M' = \begin{bmatrix} 4 \cdot l^2 & & & & & \\ -22 \cdot l & 156 & & & & \\ 0 & 0 & 140 & & & \\ -3 \cdot l^2 & 13 \cdot l & 0 & 4 \cdot l^2 & & \\ -13 \cdot l & 54 & 0 & 22 \cdot l & 156 & \\ 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 140 \end{bmatrix} \cdot \frac{ml}{420} \quad (\text{Simet.}) \quad (5.16)$$

em que  $m$  é o valor da massa por unidade de comprimento da barra.

A transformação da matriz  $M'$  para o referencial geral da estrutura decorre da consideração da rotação de referencial anteriormente referida expressa pela matriz  $T$  de transformação da barra. Tem-se então, analogamente a (5.13):

$$M = T M' T^T \quad (5.17)$$

A matriz de massa global  $M$  é então determinada por espalhamento das matrizes elementares, definidas no referencial geral, e é também uma matriz consistente.

### 5.3.3 - Matriz de amortecimento

A idealização das características de amortecimento numa estrutura sujeita a uma acção dinâmica baseia-se na consideração da existência de forças de amortecimento em todos os graus de liberdade da estrutura, dependentes das velocidades associadas a esses graus de liberdade. A matriz de amortecimento  $C$  da estrutura permite relacionar as forças de amortecimento nodais  $D$  com o vector das velocidades nodais correspondentes  $\dot{u}$ :

$$D = C \dot{u} \quad (5.18)$$

Considera-se no modelo que a matriz de amortecimento  $C$  se obtém através de uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez da estrutura (amortecimento de Rayleigh):

$$C = \alpha M + \beta K \quad (5.19)$$

As constantes  $\alpha$  e  $\beta$  podem ser determinadas com base na condição de proporcionalidade do amortecimento:

$$\phi_n^T C \phi_m = 2\omega_m \xi_n \delta_{nm} \quad (5.20)$$

Em que  $\phi_n$  e  $\phi_m$  são os vectores que traduzem as configurações de dois modos de vibração  $n$  e  $m$  da estrutura,  $\omega_n$  e  $\xi_n$  são respectivamente a frequência angular e o factor de amortecimento associados ao modo  $n$  e  $\delta_{nm}$  é o símbolo de Kronecker.

Substituindo na expressão (5.20) a matriz  $C$  definida de acordo com (5.19), obtem-se:

$$\alpha + \beta \omega_n^2 = 2\omega_n \xi_n \quad (5.21)$$

ou

$$\xi_n = \frac{\alpha}{2\omega_n} + \frac{\beta\omega_n}{2} \quad (5.22)$$

A relação dada por (5.22) entre as constantes  $\alpha$  e  $\beta$  e o factor de amortecimento está ilustrada na Figura 5.6.

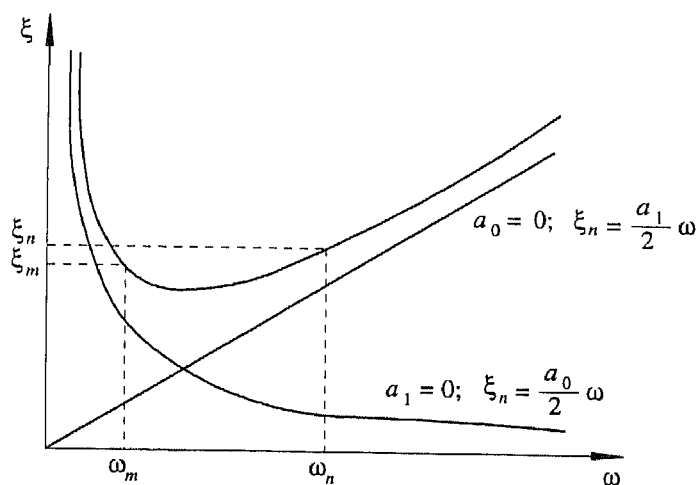


Figura 5.6 - Relação entre amortecimento modal e frequência [30].

Sendo conhecidos os factores de amortecimento  $\xi_m$  e  $\xi_n$  correspondentes a dois modos de vibração da estrutura com frequências próprias  $\omega_m$  e  $\omega_n$  diferentes, podem determinar-se os valores de  $\alpha$  e  $\beta$ , tomando a forma matricial da condição (5.22):

$$\begin{bmatrix} \xi_m \\ \xi_n \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_m} & \omega_m \\ \frac{1}{\omega_n} & \omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

donde

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 2 \frac{\omega_m \omega_n}{\omega_n^2 - \omega_m^2} \begin{bmatrix} \omega_n & -\omega_m \\ -\frac{1}{\omega_n} & \frac{1}{\omega_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_m \\ \xi_n \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

A dedução da expressão (5.24) é apresentada no Anexo II.

O amortecimento de Rayleigh apresenta o inconveniente de, em geral, os modos de ordem superior serem consideravelmente mais amortecidos que os primeiros, a partir dos quais se determinam, em geral, as constantes  $\alpha$  e  $\beta$ . Bathé [50] sugere que este problema pode ser ultrapassado de forma expedita considerando agrupamentos de modos de vibração com frequências próprias próximas para os quais se toma a “frequência média” e se fixa o “amortecimento médio”. É também possível fixar os amortecimentos num qualquer número de modos de vibração (ver, por exemplo, Bathé [50] e Clough e Penzien [13]) mas, além de ser muito mais trabalhoso, o processo conduz a matrizes de amortecimento que não são, em geral, em banda. Casos particulares da matriz de amortecimento representada pela expressão (5.19) são as matrizes de amortecimento proporcionais à matriz de massa,  $C = \alpha M$ , e à matriz de rigidez,  $C = \beta K$ . No primeiro caso o amortecimento varia inversamente com a frequência e portanto os modos superiores são fracamente amortecidos; no segundo caso o amortecimento é directamente proporcional às frequências e portanto os modos superiores são fortemente amortecidos [38, 51].



## **Capítulo 6**

### **DESENVOLVIMENTO DO MODELO NUMÉRICO PARA A ANÁLISE NÃO-LINEAR**

## *Capítulo 6*

# **DESENVOLVIMENTO DO MODELO NUMÉRICO PARA A ANÁLISE NÃO-LINEAR**

### **6.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS**

O modelo analítico desenvolvido para a idealização de elementos estruturais de betão armado sujeitos a acções repetidas e alternadas foi implementado num programa de cálculo automático (*PORANL*). O programa desenvolvido é capaz de representar o comportamento não-linear e hysterético associado à flexão de elementos de betão armado. Salienta-se ainda a possibilidade de realizar análises estáticas (forças aplicadas ou deslocamentos impostos em regime repetido e alternado) e/ou dinâmicas no mesmo modelo.

No Capítulo 4 foi exposto o modelo hysterético utilizado para traduzir o comportamento não-linear dos elementos através das relações momento-curvatura nas zonas inelásticas.

A apresentação dos macro-elementos estruturais, a capacidade de representação do comportamento não-linear nas suas extremidades e a idealização da estrutura obtida pela contribuição dos elementos estruturais foram apresentados no Capítulo 5.

Neste capítulo focam-se os aspectos relacionados com a análise dinâmica, nomeadamente a equação de equilíbrio dinâmico, o método utilizado na resolução das equações de equilíbrio dinâmico e a introdução da solicitação acção sísmica. Apresenta-se ainda a estratégia utilizada na análise não-linear estática e dinâmica.

Finalmente são descritos com algum pormenor os programas de cálculo automático desenvolvidos.

## 6.2 - ANÁLISE DINÂMICA

### 6.2.1 - Introdução

A regulamentação actual ([52], [53]) aponta para a consideração dos efeitos dinâmicos nas estruturas, ao introduzir restrições à aplicabilidade de processos simplificados de análise estática [54].

Para um sistema com  $n$  graus de liberdade as equações de equilíbrio dinâmico podem ser escritas sob a forma matricial como se mostra de seguida, consequência da consideração do equilíbrio das forças que surgem devido a uma acção dinâmica:

$$[M] \cdot \{\ddot{u}(t)\} + [C] \cdot \{\dot{u}(t)\} + [K] \cdot \{u(t)\} = \{f(t)\} \quad (6.1)$$

em que cada grandeza envolvida representa:

- $[M]$  - matriz de massa da estrutura;
- $[C]$  - matriz de amortecimento da estrutura;
- $[K]$  - matriz de rigidez da estrutura;
- $\{u(t)\}$  - vector dos deslocamentos;
- $\{\dot{u}(t)\}$  - vector das velocidades;
- $\{\ddot{u}(t)\}$  - vector das acelerações;
- $\{f(t)\}$  - vector das forças exteriores, função do tempo.

A definição das matrizes de rigidez  $[K]$ , massa  $[M]$  e amortecimento  $[C]$  foi anteriormente feita no Capítulo 5.

Para a resolução das equações diferenciais de equilíbrio dinâmico recorre-se frequentemente à integração numérica. De entre os métodos mais usados optou-se, na implementação do modelo, pelo método implícito de Newmark. Uma descrição mais detalhada da aplicação do referido método é feita na secção que se segue.

### 6.2.2 - Resolução das equações de movimento

Como vimos, a equação de equilíbrio dinâmico generalizada num instante  $t + \Delta t$  toma a seguinte forma:

$$[M] \cdot \{\ddot{u}(t + \Delta t)\} + [C] \cdot \{\dot{u}(t + \Delta t)\} + [K] \cdot \{u(t + \Delta t)\} = \{f(t + \Delta t)\} \quad (6.2)$$

Na resolução das equações diferenciais de equilíbrio dinâmico usou-se o método de Newmark. Este admite uma variação linear das acelerações entre os instantes  $t$  e  $t + \Delta t$ , de onde decorre que:

$$\{\dot{u}(t + \Delta t)\} = \{\dot{u}(t)\} + [(1 - \delta) \cdot \{\ddot{u}(t)\} + \delta \cdot \{\ddot{u}(t + \Delta t)\}] \cdot \Delta t \quad (6.3)$$

$$\{u(t + \Delta t)\} = \{u(t)\} + \{\dot{u}(t)\} \cdot \Delta t + [(0,5 - \alpha) \cdot \{\ddot{u}(t)\} + \alpha \cdot \{\ddot{u}(t + \Delta t)\}] \cdot \Delta t^2 \quad (6.4)$$

onde  $\alpha$  e  $\delta$  são parâmetros que podem ser determinados de modo a obter-se precisão e estabilidade no processo de integração [54]. Segundo Newmark se os parâmetros de integração assumirem os valores:

$$\alpha = 1/4 \quad e \quad \delta = 1/2 \quad (6.5)$$

o método é incondicionalmente estável.

Resolvendo a expressão (6.4) em relação a  $\{\ddot{u}(t + \Delta t)\}$  e substituindo em (6.3), obtém-se os vectores  $\{\ddot{u}(t + \Delta t)\}$  e  $\{\dot{u}(t + \Delta t)\}$  em função do vector  $\{u(t + \Delta t)\}$  e de valores de aceleração, velocidade e deslocamento no instante anterior supostamente conhecidos como se mostra nas expressões (6.6) e (6.7).

$$\{\ddot{u}(t + \Delta t)\} = \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot \{u(t + \Delta t)\} - \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot \{u(t)\} - \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot \{\dot{u}(t)\} - \frac{(0,5 - \alpha)}{\alpha} \cdot \{\ddot{u}(t)\} \quad (6.6)$$

$$\{\dot{u}(t + \Delta t)\} = \frac{\delta}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot \{u(t + \Delta t)\} - \frac{\delta}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot \{u(t)\} + \left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) \cdot \{\dot{u}(t)\} + \Delta t \cdot \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha}\right) \cdot \{\ddot{u}(t)\} \quad (6.7)$$

Impondo as equações de equilíbrio dinâmico no instante  $t + \Delta t$ , como se ilustra na expressão (6.2), e substituindo os vectores  $\{\ddot{u}(t + \Delta t)\}$  e  $\{\dot{u}(t + \Delta t)\}$  dados pelas expressões (6.6) e (6.7) respectivamente, a expressão (6.2) ficará resolúvel em ordem a  $\{u(t + \Delta t)\}$  como se demonstra no que se segue.

$$\begin{aligned}
& [M] \cdot \left( \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot \{u(t + \Delta t)\} - \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot \{u(t)\} - \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot \{\dot{u}(t)\} - \frac{0,5 - \alpha}{\alpha} \cdot \{\ddot{u}(t)\} \right) + \\
& + [C] \cdot \left( \frac{\delta}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot \{u(t + \Delta t)\} - \frac{\delta}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot \{u(t)\} + \left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) \cdot \{\dot{u}(t)\} + \left(1 - \frac{\delta}{2 \cdot \alpha}\right) \cdot \Delta t \cdot \{\ddot{u}(t)\} \right) + \quad (6.8) \\
& + [K] \cdot \{u(t + \Delta t)\} = \{f(t + \Delta t)\}
\end{aligned}$$

de onde vem:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot [M] + \frac{\delta}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot [C] + [K] \right) \cdot \{u(t + \Delta t)\} = \{f(t + \Delta t)\} + \\
& + \left( \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot [M] + \frac{\delta}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot [C] \right) \cdot \{u(t)\} + \left( \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot [M] + \left( \frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) \cdot [C] \right) \cdot \{\dot{u}(t)\} + \quad (6.9) \\
& + \left( \left( \frac{0,5}{\alpha} - 1 \right) \cdot [M] + \left( \frac{\delta}{2 \cdot \alpha} - 1 \right) \cdot \Delta t \cdot [C] \right) \cdot \{\ddot{u}(t)\}
\end{aligned}$$

fazendo

$$[K]_{ef} = \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot [M] + \frac{\delta}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot [C] + [K] \quad (6.10)$$

e

$$\begin{aligned}
\{f(t + \Delta t)\}_{ef} & = \{f(t + \Delta t)\} + \left( \left( \frac{0,5}{\alpha} - 1 \right) \cdot [M] + \left( \frac{\delta}{2 \cdot \alpha} - 1 \right) \cdot \Delta t \cdot [C] \right) \cdot \{\ddot{u}(t)\} + \\
& + \left( \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot [M] + \left( \frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) \cdot [C] \right) \cdot \{\dot{u}(t)\} + \left( \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot [M] + \frac{\delta}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot [C] \right) \cdot \{u(t)\} \quad (6.11)
\end{aligned}$$

vem:

$$[K]_{ef} \cdot \{u(t + \Delta t)\} = \{f(t + \Delta t)\}_{ef} \quad (6.12)$$

designando-se:

$[K]_{ef}$  - matriz de rigidez efectiva da estrutura;

$\{f(t + \Delta t)\}_{ef}$  - vector das forças efectivo no instante  $t + \Delta t$ .

Assim, recorrendo ao método de Newmark, e admitindo que são conhecidos os vectores deslocamento, velocidade e aceleração nodais no instante  $t$ , podemos determinar os

deslocamentos no instante  $t + \Delta t$  através da expressão (6.12), que no fundo passa pela resolução de um problema estático em cada passo. Conhecido o valor do deslocamento no instante  $t + \Delta t$ , calculam-se os valores das velocidades e acelerações nesse mesmo instante através das expressões (6.6) e (6.7).

### 6.2.3 - Acção sísmica

Na determinação da resposta dinâmica de estruturas sujeitas a uma acção sísmica a solicitação é constituída por uma lei de variação das acelerações (acelerograma) que será imposta na base da estrutura [54].

Considerando a acção sísmica expressa através da variação de aceleração, em função do tempo, a equação de equilíbrio dinâmico assume a forma:

$$[M] \cdot \{\ddot{u}(t)\} + [C] \cdot \{\dot{u}(t)\} + [K] \cdot \{u(t)\} = \{f_g(t)\} \quad (6.13)$$

em que para além das grandezas de significado já referido em 6.2.1, surge o vector solicitação devido à acção sísmica  $\{f_g(t)\}$ , que é definido na expressão seguinte:

$$\{f_g(t)\} = -[M] \cdot \{\ddot{u}_g(t)\} \quad (6.14)$$

como o produto da matriz de massa  $[M]$  pelo vector  $\{\ddot{u}_g(t)\}$  que define para cada instante  $t$  a aceleração na base da fundação.

## 6.3 - ANÁLISE NÃO-LINEAR ESTÁTICA E DINÂMICA

Tanto para a análise estática como dinâmica, o procedimento adoptado para o tratamento da não linearidade material baseia-se numa análise incremental das equações estruturais, trabalhando assim em cada instante com a rigidez real instalada nas diversas secções. A formulação incremental utilizada está associada à subdivisão em pequenos incrementos da solicitação exterior e à linearização das relações constitutivas do comportamento estrutural em cada incremento. A resposta da estrutura é obtida pela sucessão de estados de equilíbrio no final de cada incremento. É corrente a introdução de processos iterativos em análises não-lineares para garantir o equilíbrio.

Optou-se pela não inclusão de procedimentos iterativos no modelo pelo facto das leis de comportamento dos materiais serem admitidas lineares por troços. Daí que apenas pontualmente ocorram mudanças de rigidez nas diferentes secções com comportamento não-linear.

Se nos cálculos efectuados o passo de integração for suficientemente pequeno, o incremento de solicitação também o será, logo a mudança de rigidez (em casos pontuais) acarreta erros desprezáveis. Refira-se que o grande inconveniente introduzido pelo uso de valores muito reduzidos do passo de integração é o aumento do volume de cálculo mas, sabendo-se que os computadores estão em permanente evolução este inconveniente tende a diluir-se. Sendo assim, no caso presente os processos iterativos não são justificáveis, devendo-se alterar a rigidez apenas nos pontos de transição do incremento, introduzindo uma simplificação válida para pequenos incrementos, como admitido.

Assim, o modelo prevê que quando seja detectada a mudança de rigidez de alguma secção, o programa corrige a rigidez e recalcula as deformações nesse mesmo incremento. O algoritmo utilizado prevê que se avance para o incremento de carga seguinte se não houver qualquer alteração de rigidez para todas as secções da estrutura.

A implementação da análise não-linear foi efectuada num único programa de forma a realizar análises estáticas e/ou dinâmicas de estruturas planas. Como foi dito atrás, essa análise não-linear é feita com recurso a um processo incremental tanto para os estudos estáticos como dinâmicos.

O procedimento incremental de equilíbrio, considera o parâmetro de carga ou o tempo, subdividido em incrementos sendo a solução obtida progressivamente de incremento a incremento.

No caso das análises estáticas para cada incremento de solicitação (forças ou deslocamentos impostos) surge como resposta um vector deslocamento referente a esse incremento. A determinação da resposta passa pelo estabelecimento do equilíbrio em cada incremento expresso da seguinte forma:

$$[K] \cdot \{\Delta u\} = \{\Delta F\} \quad (6.15)$$

em que:

$[K]$  - matriz de rigidez global;

$\{\Delta u\}$  - vector deslocamento incremental;

$\{\Delta F\}$  - vector solicitação incremental.

Como já tínhamos referido a matriz  $[K]$  em cada incremento é sempre a matriz de rigidez actual que é actualizada ao longo do carregamento.

Para as análises dinâmicas somos conduzidos a equações que traduzem o equilíbrio estrutural formalmente semelhantes à equação (6.15), desde que sejam utilizadas aproximações adequadas das velocidades e das acelerações para exprimir as forças de inércia e amortecimento, como vimos em 6.2.2.

Supondo a satisfação da equação de equilíbrio dinâmica no instante  $t$ , como se expressa de seguida:

$$[K]_{ef} \cdot \{u(t)\} = \{f(t)\}_{ef} \quad (6.16)$$

e impondo o equilíbrio no passo seguinte,  $t + \Delta t$ , somos conduzidos a:

$$[K]_{ef} \cdot \{u(t + \Delta t)\} = \{f(t + \Delta t)\}_{ef} \quad (6.17)$$

Admitindo que entre os dois instantes em questão não se altera a matriz de rigidez efectiva, é válida a subtracção directa das duas equações de equilíbrio, de onde vem:

$$[K]_{ef} \cdot (\{u(t + \Delta t)\} - \{u(t)\}) = \{f(t + \Delta t)\}_{ef} - \{f(t)\}_{ef} \quad (6.18)$$

ou, simplificadamente:

$$[K]_{ef} \cdot \Delta\{u(t + \Delta t)\} = \Delta\{f(t + \Delta t)\}_{ef} \quad (6.19)$$

obtemos assim a equação de equilíbrio dinâmico na sua formulação incremental. O procedimento implementado no programa de cálculo automático é baseado nesta formulação que é também apresentada por Mário Paz [55].

Este procedimento assume que no instante para o qual se impõe o equilíbrio, a matriz de rigidez efectiva é calculada com a matriz de rigidez actual no instante  $t$ , pois como se sabe, a matriz de rigidez varia ao longo do processo não linear.

Esta simplificação surge apenas pontualmente, uma vez que a mudança de rigidez de alguma secção ocorre poucas vezes ao longo do processo de carregamento (estático ou dinâmico). Isto deve-se a que se por um lado o passo utilizado nos estudos realizados é pequeno, por outro lado as leis de comportamento em flexão das diversas secções são lineares por troços.



A formulação incremental implementada no modelo numérico desenvolvido foi aferida para dois exemplos com um grau de liberdade apenas de resposta analítica conhecida. O modelo usado para ambos os exemplos é constituído por uma barra vertical em consola com uma massa concentrada na extremidade livre e sujeito a um acelerograma na base. A lei das acelerações na base adoptada no primeiro caso foi uma função constante e no segundo uma função sinusoidal. E, refere-se que as respostas obtidas com o modelo numérico desenvolvido coincidiram com os valores esperados determinados analiticamente.

#### 6.4 - PROGRAMA DE CÁLCULO AUTOMÁTICO

O programa de cálculo automático desenvolvido para a análise não-linear de estruturas (estática ou dinâmica) foi estruturado em três sub-programas (ver Figura 6.1), sendo um de pré-processamento (*PREANL*), outro de pós-processamento (*POSANL*) e finalmente o programa de cálculo de estruturas planas com análise não linear (*PORANL*).

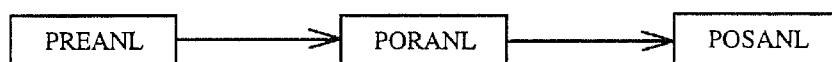


Figura 6.1 - Estrutura geral do programa de cálculo automático.

São descritas de seguida as tarefas executadas por cada um dos sub-programas, salientando-se que algumas dessas tarefas são opcionais.

##### 6.4.1 - Programa *PREANL*

O programa concebido para pré-processamento de dados (*PREANL*) inclui o seguinte pacote de módulos:

- A1 - refinamento de acelerograma;
- A2 - determinação dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  caracterizadores do material com comportamento não-linear;
- A3 - geração de uma lei linear por troços;

- A4 - geração automática de ficheiros de dados para o programa *BIAX*;
- A5 - determinação de frequências próprias e modos de vibração da estrutura;
- A6 - determinação dos parâmetros de amortecimento de Rayleigh.

- No módulo A1 é definida a lei de aceleração sísmica a impor nas direcções horizontal e vertical a partir de um acelerograma com a possibilidade de efectuar um refinamento do mesmo e elaborar as saídas gráficas.
- Baseadas nas fórmulas empíricas propostas por William C. Stone e Andrew W. Taylor [39] e apresentadas no Capítulo 4, foi implementado o módulo A2 capaz de definir o parâmetro de degradação de resistência, o de degradação de rigidez e o definidor do efeito de “slipping”, necessários para definição do comportamento hysterético dos sub-elementos com comportamento não-linear.
- No módulo A3 é gerada e refinada uma lei linear por troços a usar por exemplo num acelerograma, numa lei de imposição de deslocamentos, etc..
- O módulo A4 foi desenvolvido para gerar automaticamente os ficheiros necessários para a execução do programa desenvolvido por Carlos T. Vaz (*BIAX* [38]). O programa *BIAX* determina as curvas caracterizadoras do comportamento não-linear de secções de betão armado por um método de fibras (como foi exposto no Capítulo 4). Neste trabalho implementou-se a geração automática apenas para secções rectangulares.
- O módulo A5, lê os ficheiros de dados de um dado problema (que serão os usados pelo programa de análise não linear dinâmica *PORANL*) e em função da geometria da estrutura porticada plana e da massa volúmica por elemento, calcula os valores e vectores próprios recorrendo à subrotina *JACOBI* [56], isto é, as frequências próprias e os modos de vibração associados. Este programa compõe as matrizes de rigidez e de massa globais da estrutura através do espalhamento da contribuição de cada barra. A introdução das condições de apoio é realizada através da eliminação das linhas e colunas correspondentes aos graus de liberdade restringidos.
- O módulo A6, a partir de duas frequências fundamentais e dos coeficientes de amortecimento associados a cada modo, determina os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  definidores do amortecimento de Rayleigh baseados na formulação apresentada no ponto 5.3.3 e no Anexo II.

### 6.4.2 - Programa POSANL

À semelhança do programa de pré-processamento *PREANL*, o programa de pós-processamento gráfico *POSANL* foi estruturado como um pacote de vários módulos que se apresentam de seguida:

- B1 - definição de diversas curvas *2D*;
- B2 - preparação de saídas gráficas para o programa *DRAWMESH* [57];
- B3 - limpeza dos ficheiros de resultados;
- B4 - definição da evolução do deslocamento, velocidade e aceleração dos nós ao longo do tempo de integração.

- O módulo B1 prepara saídas gráficas das curvas momento-curvatura, curvatura-tempo, momento-tempo para as secções de controle de um dado pórtico e para análise dinâmica ou estática, e ainda curvas força-deslocamento para exemplos de análise estática com imposição de deslocamentos.
- O módulo B2 prepara saídas gráficas da estrutura porticada para o programa *DRAWMESH* (desenvolvido por Álvaro Azevedo [57] - C.E.C.U.P.) indicando o estado do material constituinte da estrutura num instante pretendido, isto é, com informações das zonas fendilhadas ou plastificadas salientando-se o sentido em que ocorrem. Para os elementos plastificados (em cedência) é ainda indicado o nível de ductilidade (*ND*) instalado como se refere no Quadro 6.1.

Quadro 6.1 - Níveis de ductilidade.

Nível de ductilidade	1	2	3	4	5	6	7
Razão entre a curvatura e a curvatura limite da cedência	[1.0; 1.5[	[1.5; 2.0[	[2.0; 2.5[	[2.5; 3.0[	[3.0; 3.5[	[3.5; 4.0[	≥ 4.0

- O módulo B3 apaga todos os ficheiros de resultados de um dado problema.
- O módulo B4 prepara a saída gráfica das curvas de evolução do deslocamento, velocidade ou aceleração de um nó pretendido da estrutura porticada.

### 6.4.3 - Programa PORANL

O modelo desenvolvido para a análise não linear de pórticos planos sujeitos a cargas dinâmicas e/ou estáticas foi implementado no programa *PORANL*.

A formulação que serviu de base para o modelo foi já detalhadamente apresentada atrás, sendo o objectivo deste ponto a enumeração das diferentes subrotinas, apresentação do seu encadeamento no programa e a descrição das operações por estas efectuadas. Será também apresentado um fluxograma que pretende ilustrar o encadeamento das subrotinas de uma forma sumária.

Apresentam-se a seguir de uma forma resumida as tarefas executadas por cada sub-rotina que compõe o programa *PORANL*:

#### *INPUTI*

- Leitura dos parâmetros de controlo.

#### *DAECON*

- Entrada de dados: topologia da estrutura; condições de ligação ao exterior; definição dos materiais-tipo (características mecânicas e parâmetros elásticos) e solicitações estáticas.

#### *INTIME*

- Entrada de dados para o cálculo dinâmico: parâmetros do método de integração (coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  do método de Newmark); parâmetros definidores da matriz de amortecimento (como combinação linear das matrizes de rigidez e de massa); intervalo de tempo do passo de integração; intervalo de tempo total de integração; lei de acelerações imposta na base (acelerograma). São também lidas as condições iniciais do movimento em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações para todos os graus de liberdade.

#### *LOAD*

- Cálculo das forças nodais equivalentes devido às solicitações estáticas para cada barra no referencial local.

*MARIEC*

- Cálculo das matrizes de rigidez e de massa para cada barra no referencial local. Salienta-se o facto da matriz de massa ser calculada apenas no caso de análise dinâmica. A matriz de massa calculada é consistente.
- Passagem das matrizes de rigidez e massa de cada barra para o referencial geral.
- Chamada da subrotina *FORCEC* que faz a passagem das forças nodais equivalentes para o referencial geral.

*ASSEMB*

- Cálculo da matriz de amortecimento.
- Determinação da matriz de rigidez efectiva  $[K]_{ef}$  para cada elemento, a partir das matrizes de rigidez  $[K]$ , massa  $[M]$  e amortecimento  $[C]$ , conforme as expressões vistas do processo de integração das equações de equilíbrio dinâmico.

$$[C] = \alpha \cdot [M] + \beta \cdot [K_0] \quad (6.20)$$

e,

$$[K]_{ef} = [K] + [M] \cdot \frac{1}{\alpha_N \cdot \Delta t^2} + [C] \cdot \frac{\delta_N}{\alpha_N \cdot \Delta t} \quad (6.21)$$

em que:

$[K]$  - matriz de rigidez do elemento;

$[M]$  - matriz de massa do elemento;

$[C]$  - matriz de amortecimento do elemento;

$[K_0]$  - matriz de rigidez inicial do elemento;

$\alpha_N$ ;  $\delta_N$  - parâmetros de integração pelo método de Newmark.

$\Delta t$  - passo da integração;

$\alpha$ ;  $\beta$  - parâmetros definidores da matriz de amortecimento como combinação linear da matriz de rigidez inicial e da matriz de massa. E, são calculados no módulo A6 do programa *PREANL*.

*ASLOAD*

- Prepara o vector de solicitação efectivo incremental  $\Delta\{f(t)\}_{ef}$  em cada passo como foi definido na secção 6.3. O vector das forças efectivo é calculado em função dos valores

de deslocamento, velocidade e aceleração no instante anterior, da aceleração na base nesse instante e do vector das forças efectivas no instante anterior.

### FRONT

- Efectua o agrupamento (assemblagem ou espalhamento) das matrizes efectivas de rigidez das barras.
- Resolução do sistema de equações

$$[K]_{ef} \cdot \Delta\{u(t)\} = \Delta\{f(t)\}_{ef} \quad (6.22)$$

em cada passo, determinando assim o vector deslocamento incremental que irá ser adicionada ao vector dos deslocamentos totais acumulados no instante anterior. O processo de resolução do sistema de equações é do tipo frontal [58].

### NEWVEL

- Cálculo de velocidades e acelerações no instante seguinte ( $t + \Delta t$ ), necessários para o passo de integração seguinte, conforme as expressões (6.6) e (6.7).
- Actualiza os valores totais de deslocamento, velocidade e aceleração para a iteração seguinte.
- Escrita em ficheiro da evolução do deslocamento, velocidade e aceleração em cada instante dos graus de liberdade pretendidos.

### RESUL

- Cálculo de esforços nas extremidades das barras e reacções nos apoios incrementais e totais.
- Chamada da subrotina *SAIDA* que por sua vez escreve os resultados em cada instante dos esforços nas extremidades das barras, reacções de apoio e deslocamento dos nós.

### ANL

Programa gestor da análise não-linear, que executa as seguintes tarefas:

- Na primeira passagem por esta subrotina é chamada a *INANL* que faz a leitura dos dados necessários para a análise não-linear.
- Define o comprimento das rótulas plásticas. Em relação à definição do comprimento da rótula plástica  $l_p$ , das barras foram implementadas várias opções:

i) baseada na fórmula apresentada na secção 5.2.4;  $l_p = 0,08 \cdot l + 6 \cdot \phi$  (6.23)

ii)  $l_p = 0,50 \cdot h$  (6.24)

iii)  $l_p = 0,75 \cdot h$  (6.25)

iv)  $l_p = 1,00 \cdot h$  (6.26)

v)  $l_p$  imposto para cada extremidade das barras.

sendo:

$l_p$  - comprimento da rótula plástica;

$l$  - comprimento da barra;

$h$  - altura da secção transversal;

$\phi$  - diâmetro da armadura longitudinal.

Nas opções i), ii), iii) e iv) o valor de  $l_p$  é definido automaticamente para todas as barras com comportamento não-linear.

- Controle do estado actual de cada secção.
- Chamada das subrotinas necessárias para a análise não linear: *RESUL2*, *CALCMM* e *TAKEDA*.

#### *RESUL2*

- Cálculo dos momentos flectores nas extremidades das barras com comportamento não linear para controle da evolução não-linear desses esforços.

#### *CALCMM*

- Cálculo dos momentos flectores nas secções médias dos sub-elementos extremos com comportamento não-linear.

#### *INANL*

- Leitura de dados relativos à caracterização não-linear dos diferentes elementos, nomeadamente, definição do comprimento das rótulas plásticas, definição das curvas-base de cada secção extrema e dos parâmetros definidores do comportamento histerético.
- Leitura das secções onde se pretendem saídas gráficas de curvas: momento-curvatura; momento-tempo e curvatura-tempo.

#### *MARIEC2*

- Alteração da matriz de rigidez dos elementos onde ocorreu modificação da rigidez de alguns dos sub-elementos extremos ao longo do processo de integração.

- Chamada da sub-rotina *MARIIV*, que define a matriz de rigidez de um macro-elemento referida aos graus de liberdade de extremidade, composto pela associação em série de três sub-elementos com características mecânicas diferentes, como se apresentou no Anexo I.

#### *ACTUAL*

- Guarda os valores do momento e curvatura em todas as secções para a iteração seguinte.

#### *GRAF*

- Prepara saídas gráficas em termos de curvas momento-curvatura, momento-tempo e curvatura-tempo para as secções pretendidas. No caso do programa estático não é definida a variável tempo, mas define-se ao longo do ensaio a evolução dos momentos e curvaturas.

#### *INDIMP*

- Leitura da lei de imposição de deslocamentos para os graus de liberdade em causa (problemas estáticos).

#### *ASSDIF*

- Cálculo dos deslocamentos impostos diferenciais no passo corrente.

#### *GRAF2*

- Preparação de saídas gráficas em termos da evolução de deslocamentos em relação aos graus de liberdade pretendidos e das curvas força-deslocamento nos pontos e para as direcções onde existe imposição de deslocamento.

#### *FENDIL*

- Saída de informação de início de fendilhação e cedência nas diversas secções com comportamento não-linear.
- São definidos sete níveis de ductilidade diferentes como foram referidos no Quadro 6.1.
- A informação é guardada em ficheiros para posterior pos-processamento (*POSANL*) e saídas gráficas (*DRAWMESH*).



### *TAKEDA*

- A subrotina *TAKEDA* encarrega-se do controlo do regime em que se encontra cada secção da estrutura, identificando a posição no diagrama de comportamento. Assim, é capaz de identificar as descargas, recargas e de introduzir o efeito de “slipping”. Esta subrotina faz ainda a actualização da rigidez nos incrementos para os quais ocorra mudança de rigidez em alguma secção. Uma descrição mais pormenorizada do funcionamento desta subrotina foi apresentada no Capítulo 4.

### *TOPOL*

- Cria um ficheiro com a topologia da estrutura porticada para o programa *POSANL*.

Refira-se que todas as subrotinas que preparam as saídas gráficas escrevem a informação necessária em ficheiros para serem posteriormente lidos e tratados pelo programa *POSANL*.

O programa principal para além de fazer a gestão das subrotinas, ficheiros e matrizes, encarrega-se de realizar as inicializações necessárias.

A organização das subrotinas apresentadas que compõe o programa *PORANL* será exposta no que se segue recorrendo ao fluxograma da Figura 6.2.

Na Figura 6.3 apresenta-se o fluxograma do bloco *ANL* que corresponde ao subprograma gestor da análise não-linear.

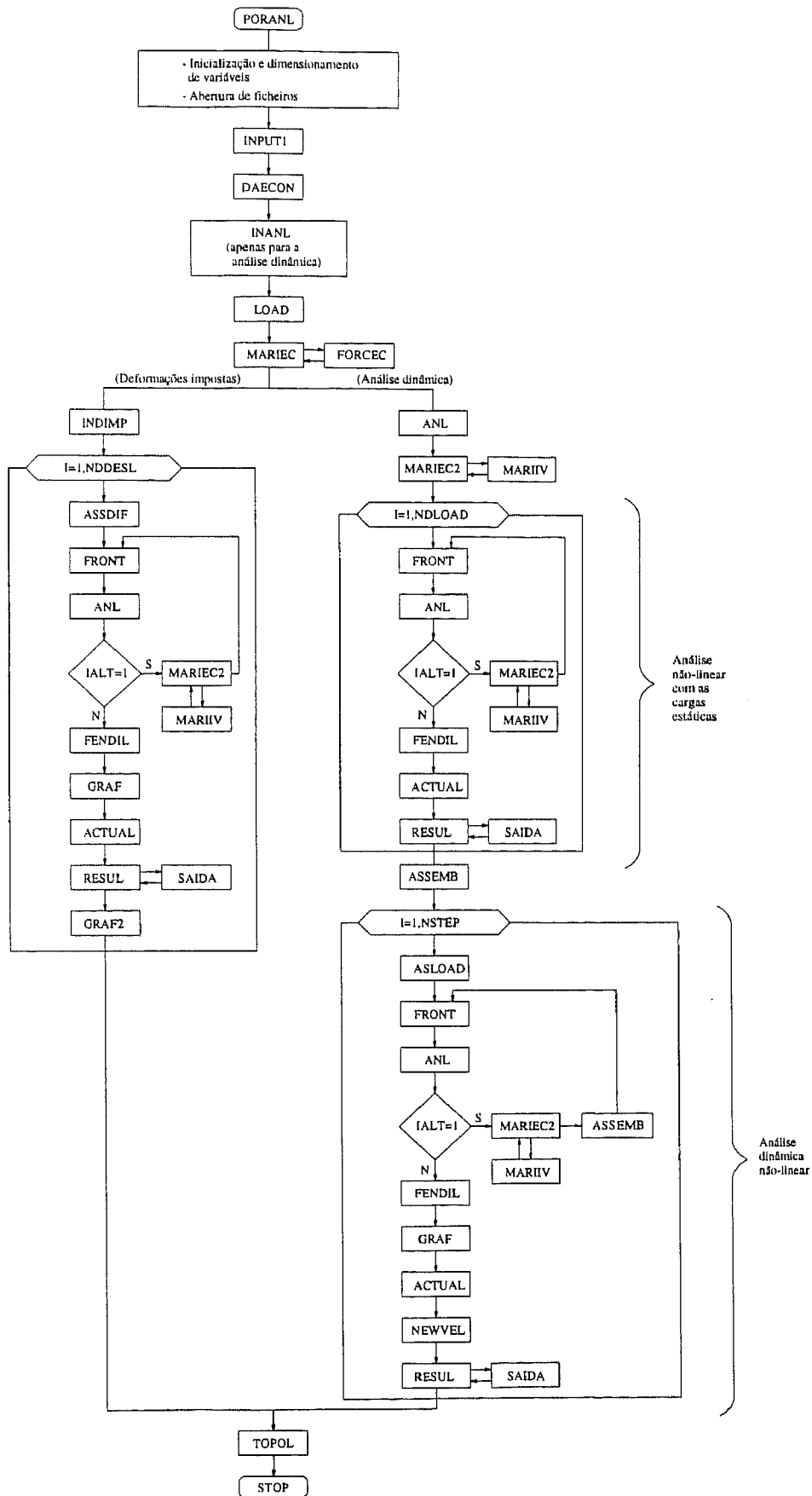


Figura 6.2 - Fluxograma geral do programa *PORANL*.

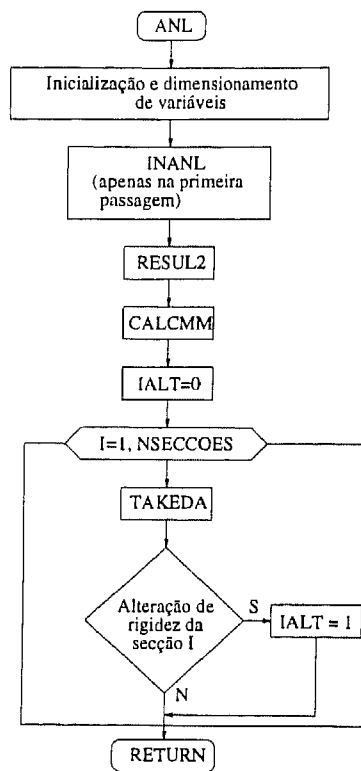


Figura 6.3 - Fluxograma do bloco ANL.

## **Capítulo 7**

### **EXEMPLOS DE APLICAÇÃO**

## *Capítulo 7*

### **EXEMPLOS DE APLICAÇÃO**

#### **7.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS**

Neste capítulo apresentam-se alguns exemplos de aplicação do modelo implementado, sendo no primeiro ponto estabelecido o confronto com resultados experimentais obtidos em ensaios sobre modelos reduzidos de estruturas porticadas. No segundo ponto exemplifica-se a determinação da resposta sísmica de estruturas em pórtico regulares, dimensionadas de acordo com a regulamentação sísmica europeia (EC8), efectuada por Erna Coelho [3], e são feitas algumas considerações com base nos resultados obtidos.

Na secção 7.2, ilustra-se a calibração do modelo analítico desenvolvido neste trabalho que foi apresentado nos capítulos anteriores, sendo apresentados e comparados os resultados obtidos com resultados experimentais.

Na secção 7.3, exemplifica-se a determinação da resposta sísmica de duas estruturas em pórtico regulares dimensionadas de acordo com a regulamentação sísmica europeia (EC8), sendo apresentados e apreciados alguns resultados das análises dinâmicas não-lineares efectuadas.

#### **7.2 - COMPARAÇÃO COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS**

##### **7.2.1 - Introdução**

Com o objectivo de ilustrar a calibração do modelo analítico desenvolvido foi reproduzido numericamente um ensaio experimental, realizado no LNEC [59, 60].

Foi assim analisado um pórtico de um piso e um tramo em regime estático não-linear, sob acção de deslocamentos impostos alternados.

### 7.2.2 - Descrição do ensaio experimental e calibração dos parâmetros a usar no modelo numérico

O pórtico foi ensaiado no âmbito de um programa experimental que teve por objectivo o estudo da influência dos painéis de enchimento de alvenaria nas estruturas em pórtico de betão armado. Este programa envolveu a realização de ensaios sobre modelos, à escala 2/3, de uma série de pórticos com e sem alvenaria de enchimento. O modelo seleccionado para a análise numérica foi um modelo sem enchimento (modelo M1) [60], dimensionado de acordo com as prescrições do REBAP [61] e foi realizada uma análise estática não-linear procurando reproduzir-se da melhor forma as condições de ensaio, nomeadamente a consideração de esforço axial inicial nos pilares, condições de apoio e história de deslocamentos impostos considerada no ensaio experimental.

O modelo foi construído sobre um maciço de betão armado, ao qual se ligaram as armaduras dos pilares conferindo uma ligação da base dos pilares ao exterior que se podem considerar como encastramentos perfeitos.

Apresenta-se na Figura 7.1 as características geométricas do pórtico ensaiado, e na Figura 7.2 a pormenorização das armaduras na viga e nos pilares nas zonas onde se concentra o comportamento não-linear dos elementos (viga e pilares) constituintes da estrutura porticada.

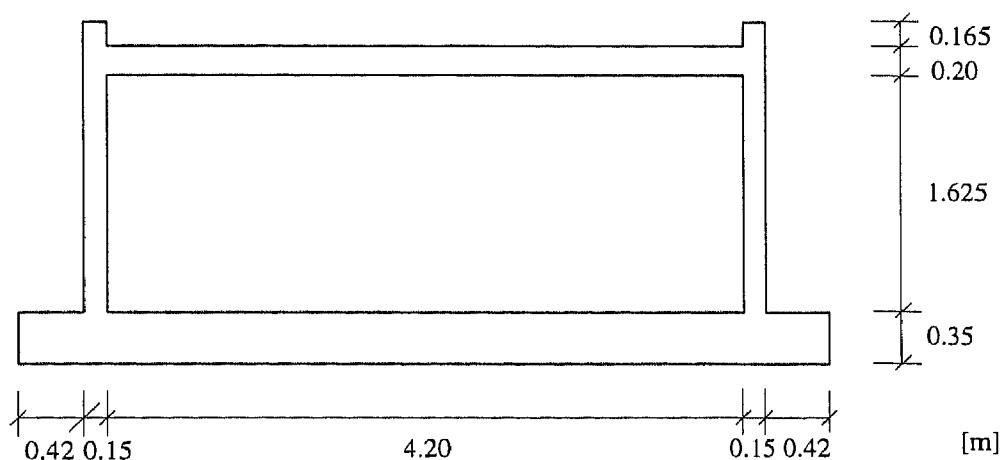


Figura 7.1 - Modelo M1 - Características geométricas.

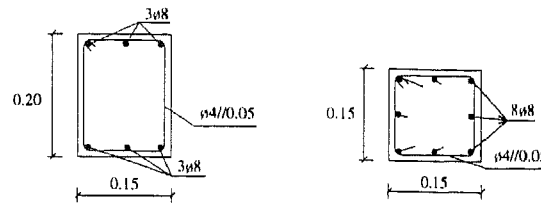


Figura 7.2 - Modelo M1 - Pormenorização das armaduras.

Para a caracterização dos materiais utilizados na execução do pórtico foram efectuados diversos ensaios experimentais.

Uma descrição pormenorizada dos resultados dos referidos ensaios, bem como da execução do modelo é feita por Felicita Pires [60].

Limitando-se assim neste trabalho a descrever apenas os dados e parâmetros necessários para a realização do teste numérico.

Os parâmetros do modelo histerético representativo das relações momento-curvatura para os elementos (viga e pilares) foram determinados para o modelo em causa com base nos seguintes critérios:

- A curva base trilinear é definida a partir de cinco parâmetros apenas, uma vez que as secções das peças em causa neste modelo são simétricas e simetricamente armadas. Como vimos no Capítulo 4, esses parâmetros são: rigidez inicial, rigidez após fendilhação, rigidez após cedência, curvatura de fendilhação e curvatura de plastificação. E, foram determinados através da análise das secções de betão armado junto das extremidades das peças (viga e pilares) sujeitos a um carregamento monotónico, traduzido pela imposição de curvaturas, com base num modelo de fibras [38]. A partir das curvas obtidas pelo modelo foi feito o ajuste de uma curva tri-linear, adequado a cada secção, para traduzir da melhor forma o seu comportamento.
- O dispositivo de ensaio utilizado limitou a deformação da viga como pode ser observado no modelo após o ensaio [60]. Daí, considerou-se que o comportamento não-linear do pórtico ocorrerá apenas devido às deformações inelásticas nas secções extremas dos pilares, mantendo-se a viga com comportamento elástico linear [3].

Ilustra-se na Figura 7.3 a relação momento-curvatura obtida para a secção do pilar com o modelo de fibras (programa *BIAX*).

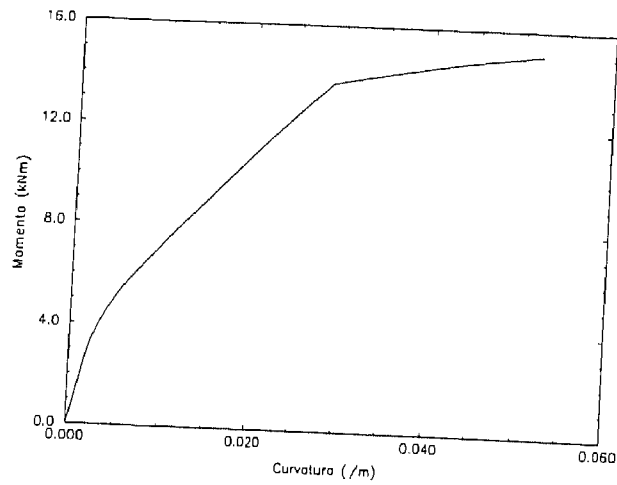


Figura 7.3 - Relações momento-curvatura obtidas com o modelo de fibras (Pilar).

Inicialmente foi ajustada uma curva trilinear de forma a acompanhar o mais possível a curva obtida pelo modelo de fibras. Mas, por comparação dos resultados obtidos no modelo numérico com os resultados experimentais, foram feitos os ajustes adequados de forma a calibrar os parâmetros envolvidos no modelo numérico, com vista a obtenção de resultados globais analíticos próximos dos resultados experimentais. Apresenta-se na Figura 7.4 a curva-base trilinear utilizada no modelo analítico.

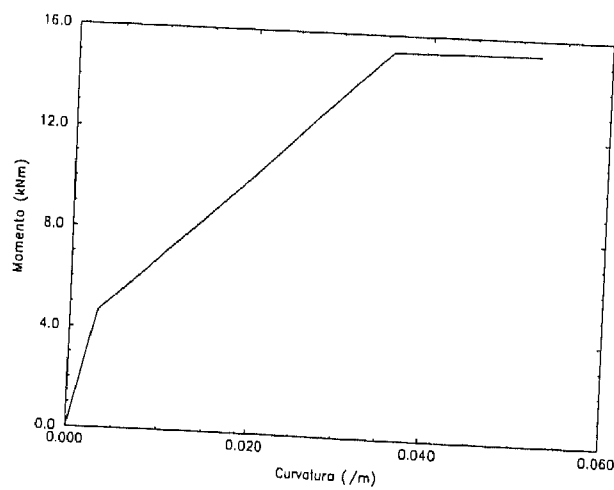


Figura 7.4 - Relações momento-curvatura utilizadas no modelo numérico (Pilar).

- Em relação aos restantes parâmetros definidores do modelo hysterético, nomeadamente os que caracterizam a degradação da rigidez, degradação de resistência e os efeitos de "pinching" e "slipping" que são  $\alpha$ ,  $\gamma$  (definido em função de  $\mu$ , como vimos no Capítulo 4) e  $\beta$  respectivamente, estes foram estimados com



base na observação dos diagramas momento-curvatura obtidos experimentalmente para o modelo M1 [60].

- Para comprimentos das rótulas plásticas ( $l_p$ ) dos diferentes elementos foram utilizados valores estimados com base na expressão empírica proposta por Park e Priestley [42] apresentada no Capítulo 5.
- No modelo numérico foi imposta a mesma história de deslocamentos alternados que tinha sido utilizada no ensaio cíclico experimental quase estático (páginas 187 e 193 [60]), como se ilustra na Figura 7.5.

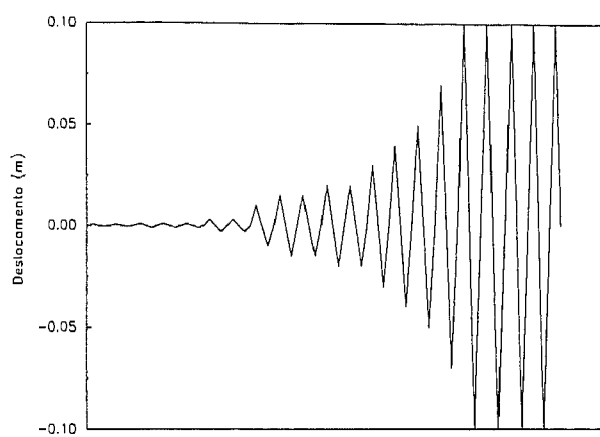


Figura 7.5 - História de deslocamentos impostos (Modelo M1).

Estes deslocamentos impostos foram aplicados na direcção horizontal e no topo do pórtico, isto é, ao nível da viga [60, 62].

- Foram também aplicadas cargas verticais no topo dos pilares descendentes e com o valor de 10 kN (página 186 - [60]).

Em resumo, apresentam-se no Quadro 7.1 os valores dos parâmetros do modelo hysterético considerados para as secções extremas dos elementos estruturais com comportamento não-linear (pilares).

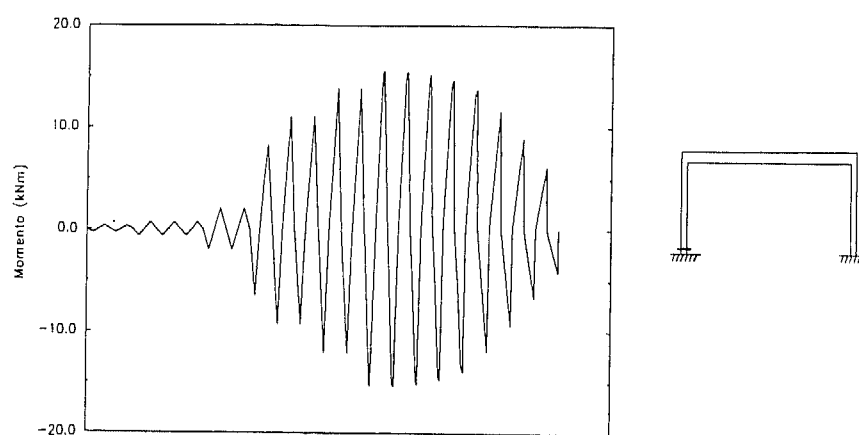
Quadro 7.1 - Parâmetros do modelo hysterético para o pilar do modelo M1.

$k_0^- = k_0^+$ [kN×m <sup>2</sup> ]	$k_1^- = k_1^+$ [kN×m <sup>2</sup> ]	$k_2^- = k_2^+$ [kN×m <sup>2</sup> ]	$\rho_f^- = \rho_f^+$ (×10 <sup>-3</sup> ) [m <sup>-1</sup> ]	$\rho_c^- = \rho_c^+$ (×10 <sup>-3</sup> ) [m <sup>-1</sup> ]	$\alpha$	$\beta$	$\mu$	$l_p$ [m]
1490.00	327.35	4.28	3.154	35.599	0.25	0.00	10.0	0.186

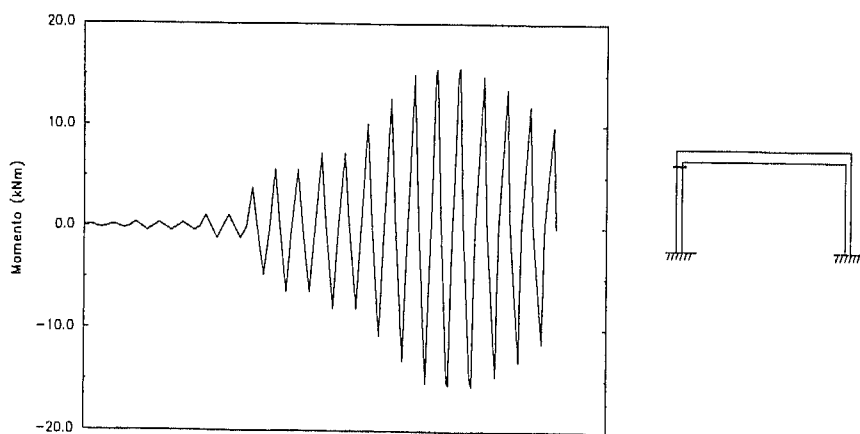
### 7.2.3 - Resultados do modelo numérico

Para o pórtico em estudo e sujeito à história de deslocamentos imposta no ensaio, vamos agora analisar os resultados obtidos da análise da estrutura com o modelo analítico desenvolvido.

Nas Figuras 7.6 e 7.7 apresentam-se a evolução dos momentos e das curvaturas ao longo do ensaio nas secções de extremidade de um dos pilares.

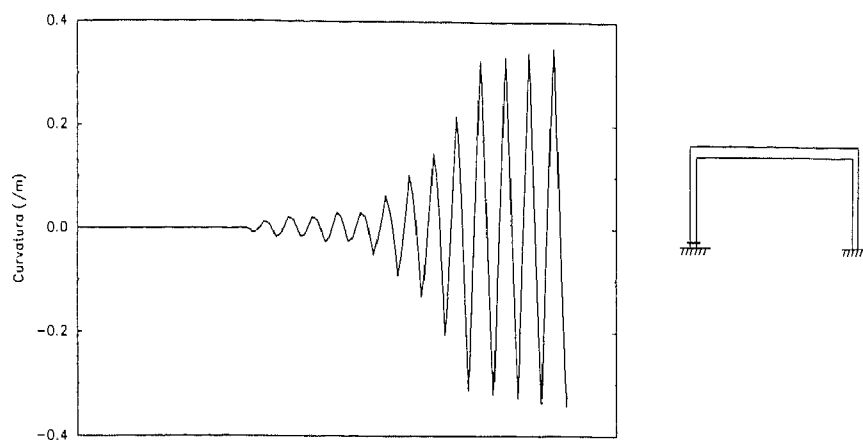


a) Extremidade inferior do pilar

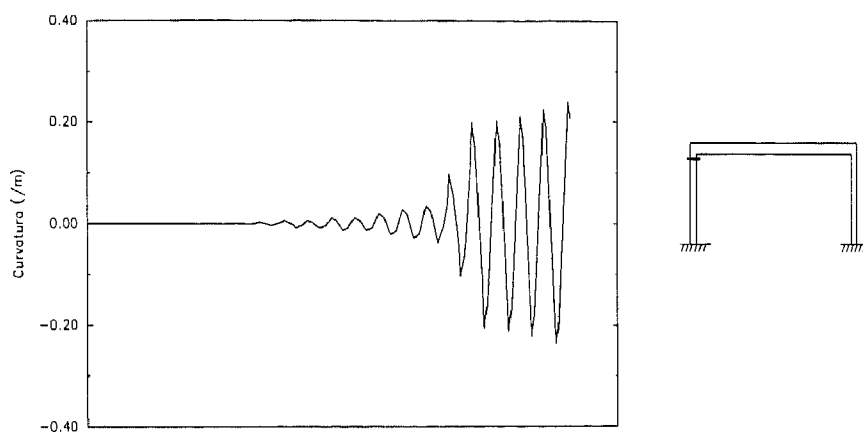


b) Extremidade superior do pilar

Figura 7.6 - Evolução dos momentos ao longo do ensaio.



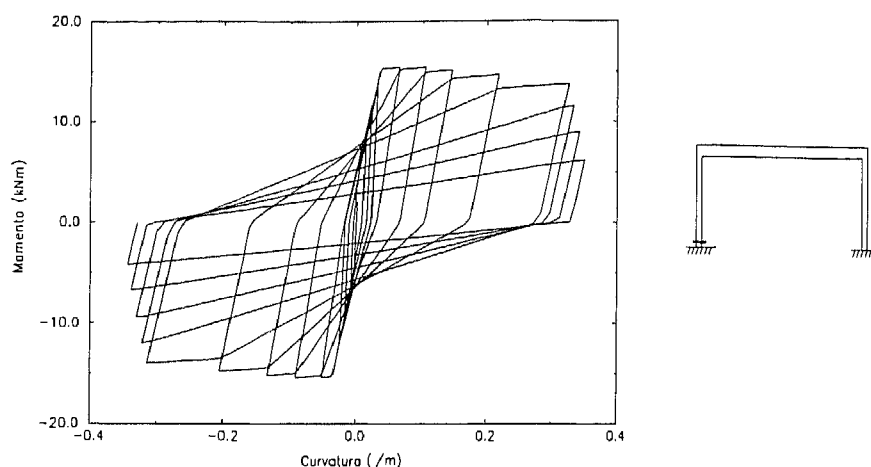
a) Extremidade inferior do pilar



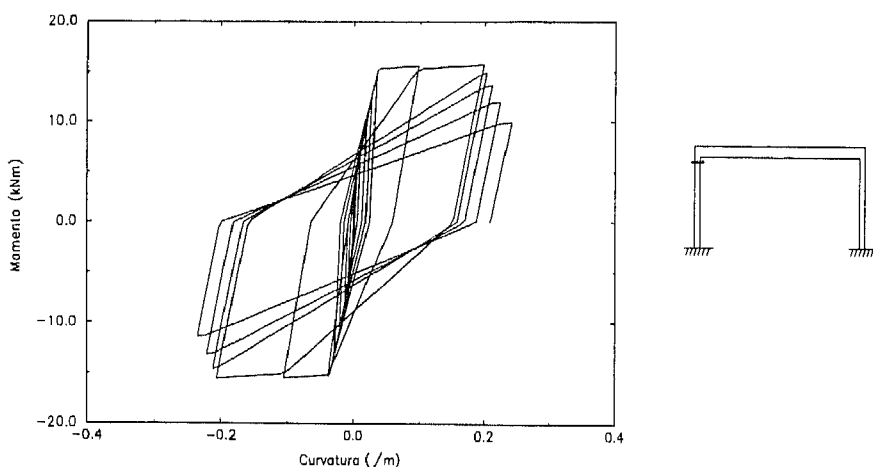
b) Extremidade superior do pilar

Figura 7.7 - Evolução das curvaturas ao longo do ensaio.

Na Figura 7.8 ilustra-se a evolução ao longo do ensaio das curvas momento-curvatura nas extremidades de um pilar.



a) Extremidade inferior do pilar



b) Extremidade superior do pilar

Figura 7.8 - Diagramas momento-curvatura no pilar.

De seguida mostram-se mais alguns resultados analíticos do Modelo M1 tendo em vista analisar o comportamento global da estrutura e fazer uma comparação com os resultados obtidos experimentalmente (ver [60]). Assim, ilustram-se nas Figuras 7.10, 7.11, 7.12 e 7.13 respectivamente o diagrama força-deslocamento global, a "energia total", a envolvente do diagrama força-deslocamento e o diagrama força horizontal-deslocamento total obtidos com a análise numérica. Define-se como energia total a soma da energia total dissipada pelo sistema por histerese com a energia elástica armazenada que é recuperável por deformação elástica, como se mostra na Figura 7.9.

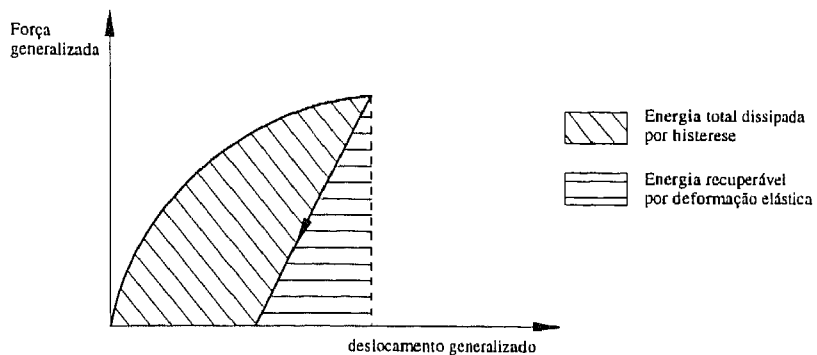


Figura 7.9 - Definição de energia total.

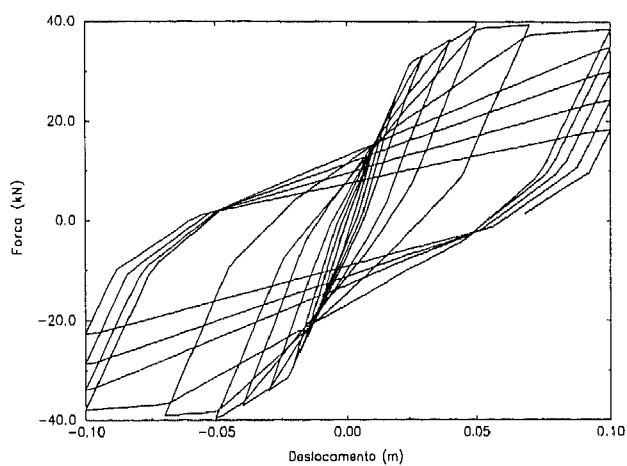


Figura 7.10 - Diagrama força-deslocamento global.

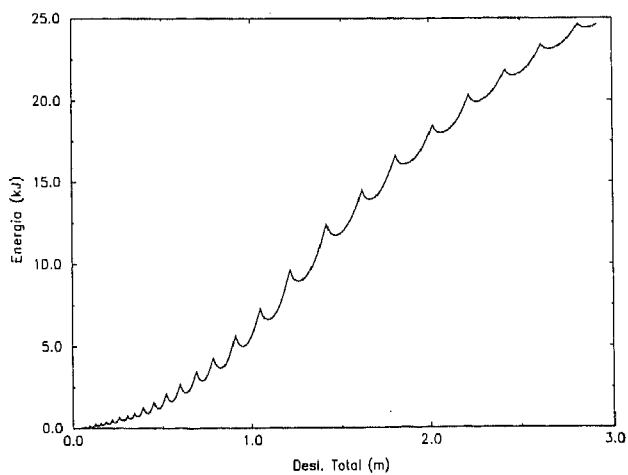


Figura 7.11 - Energia total.

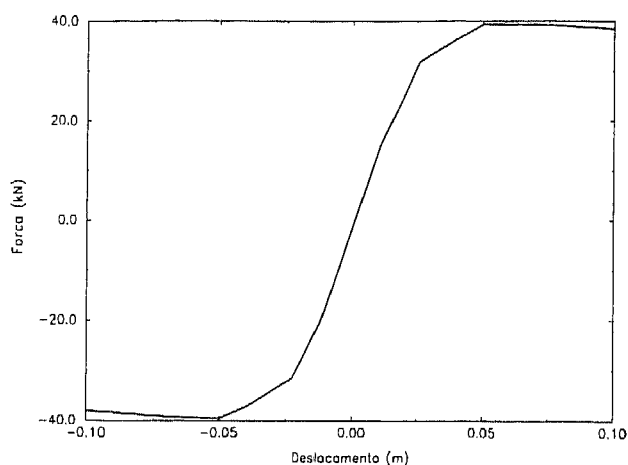


Figura 7.12 - Envoltória do diagrama força-deslocamento global.

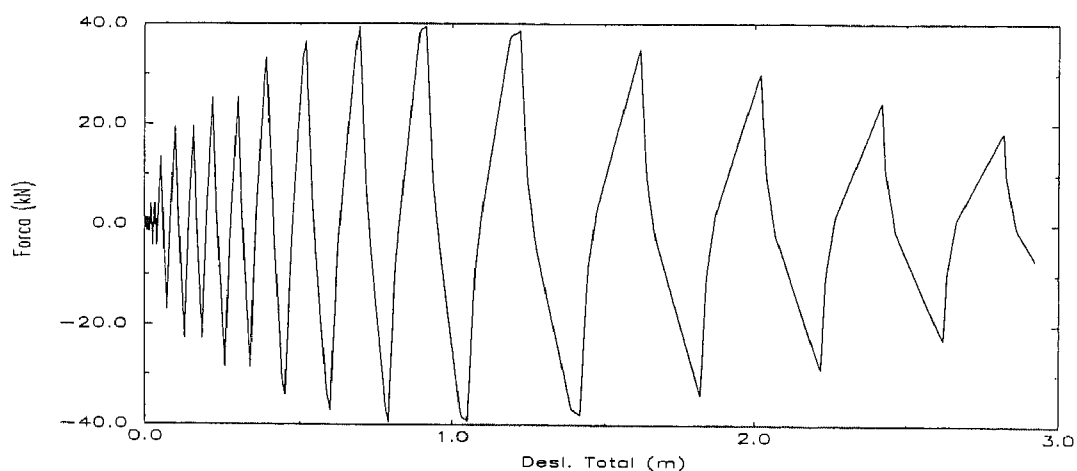


Figura 7.13 - Diagrama força-deslocamento total.

Apresenta-se de seguida na Figura 7.14 a evolução da fendilhação e da plastificação das diversas secções do Modelo M1, ao longo do ensaio com recurso ao modelo numérico desenvolvido. A partir do valor limite de plastificação são considerados sete níveis de ductilidade como foram definidos no Capítulo 6.

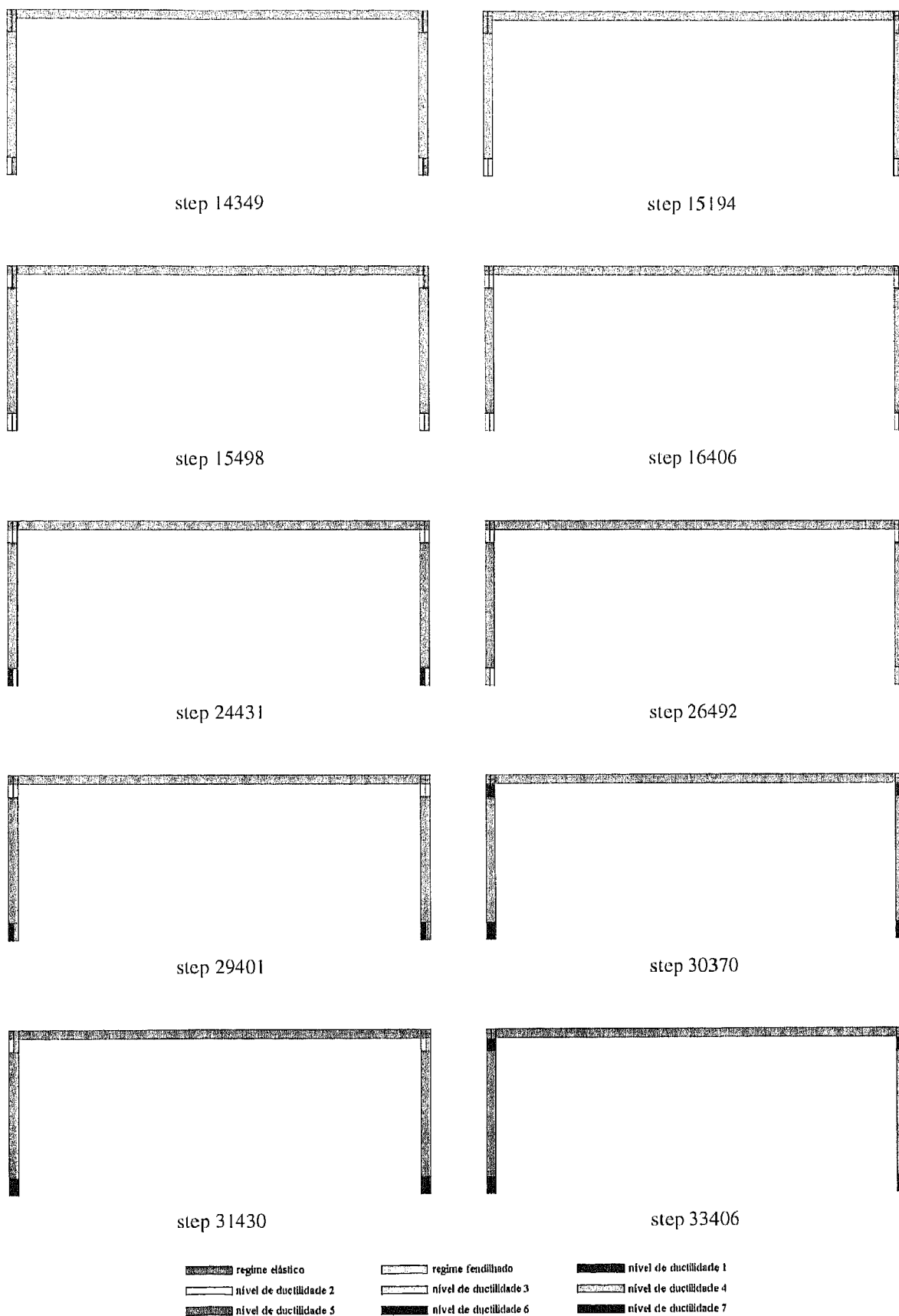


Figura 7.14 - Evolução da fendilhação e plastificação (Modelo M1).

Da comparação dos resultados analíticos obtidos com os resultados experimentais [60], e com os resultados obtidos com o modelo numérico desenvolvido por Ema Coelho [3], pode dizer-se que:

- Em termos das curvas globais existe uma boa aproximação dos resultados experimentais e analíticos, nomeadamente em termos da envolvente do diagrama força-deslocamento, da evolução global da mesma, da evolução da energia total e da evolução do diagrama força horizontal-deslocamento total.
- É de salientar, que a evolução da fendilhação e plastificação ao longo do teste numérico aproxima-se também de forma satisfatória dos resultados observados experimentalmente.

Com procedimentos similares ao visto para o modelo M1 (ensaios estáticos com imposição de deslocamentos alternados) consegue-se aferir parâmetros característicos do modelo e do material (veja-se o exemplo [1], [63], [64]). Muitas vezes metodologias similares são usadas para realizar testes aos modelos numéricos.

### **7.3 - AVALIAÇÃO DA RESPOSTA SÍSMICA DE ESTRUTURAS**

Neste ponto faz-se a aplicação do modelo analítico desenvolvido a um edifício de oito pisos com estrutura em pórtico regular, com características diferentes nas duas direcções principais ortogonais. Este edifício foi previamente dimensionado [65] para o nível de ductilidade mais elevado (tomando um coeficiente de comportamento global de 5.0) de acordo com as prescrições do Eurocódigo 2 [66] e do Eurocódigo 8 [53].

Para a determinação da resposta sísmica do edifício foi realizada uma análise para as duas direcções separadamente, usando o modelo analítico plano descrito no Capítulo 5. Assim, estudaram-se dois pórticos correspondentes cada um a uma das direcções da malha ortogonal.

Para a determinação da resposta em regime não-linear de cada uma das estruturas planas foram utilizados acelerogramas artificiais [67] gerados com base no espectro de potência definido no Regulamento de Segurança e Acções para Estruturas de Edifícios e Pontes (RSA [52]).

De seguida, apresenta-se em primeiro lugar as características dos dois pórticos planos analisados e um resumo do seu dimensionamento. Num segundo ponto descrevem-se os



cálculos não-lineares efectuados com base no modelo desenvolvido e é feita a apresentação e análise de alguns resultados obtidos.

### 7.3.1 - Descrição das estruturas e seu dimensionamento

#### 7.3.1.1 - Descrição das estruturas

Apresenta-se a descrição das estruturas planas correspondentes a dois pórticos planos intermédios do edifício de oito pisos estudado por Ema Coelho [3]. São também apresentadas as solicitações em causa para o referido edifício.

Os dois pórticos a estudar estão orientados segundo as duas direcções ortogonais da malha que define o edifício conforme se esquematiza na Figura 7.15.

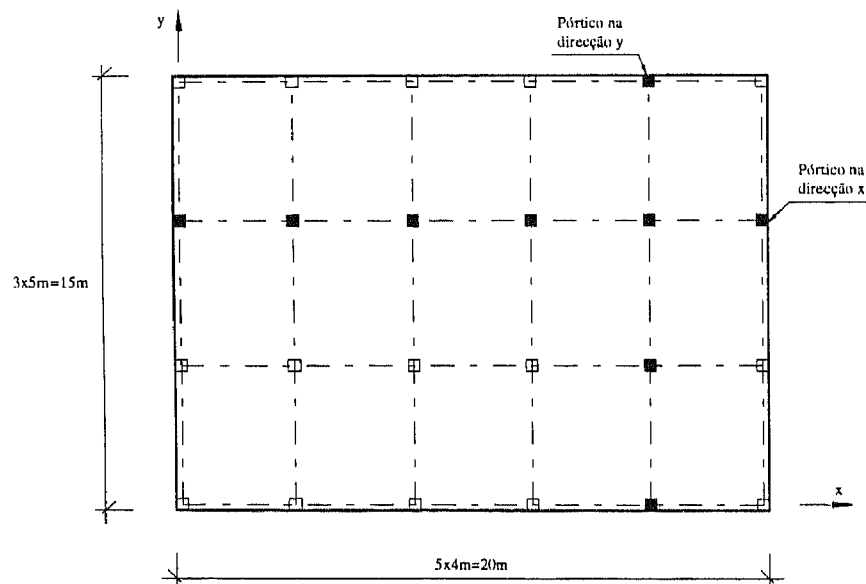


Figura 7.15 - Identificação dos pórticos analisados.

As estruturas analisadas apresentam vãos constantes de 5.0 m e 4.0 m, para os pórticos segundo as direcções *Y* e *X* respectivamente, sendo a altura entre pisos também constante e igual a 3.0 m. As dimensões dos elementos estruturais são constantes em todo o edifício, tendo-se considerado uma espessura de 0.15 m para as lajes e as secções transversais que se indicam no Quadro 7.2.

Quadro 7.2 - Dimensões das secções transversais das peças lineares [m].

Pilares	0.60 × 0.60
Viga (em ambas as direcções)	0.60 × 0.25 ( $h \times b$ )

Os materiais constituintes são o betão da classe C25 e o aço da classe S400.

Consideraram-se as seguintes acções:

- Acções permanentes ( $G$ ):  
Peso próprio do betão armado 25 kN/m<sup>3</sup>  
Revestimentos de piso e peso de divisórias 2.5 kN/m<sup>2</sup>
- Sobrecarga de utilização ( $Q$ )  
Carga uniforme nos pisos (edifício de escritórios) 2.0 kN/m<sup>2</sup>  
Ocupação diferenciada:  $\varphi = 1$  no último piso:  $\varphi = 0.5$  nos restantes pisos
- Acção sísmica ( $E$ ):  
Definida de acordo com o EC8 [53], considerando um terreno de fundação tipo B, aceleração máxima  $a_g = 0.25g$  e amortecimento  $\xi = 5\%$ .  
Coeficiente de comportamento (classe de ductilidade  $DC$  "H" do EC8)  $q = 5.0$ .

### 7.3.1.2 - Quantificação das frequências próprias

O peso total do edifício  $W_{tot}$  foi avaliado com base nas acções permanentes e no valor quase-permanente da sobrecarga em cada piso  $i$ :

$$W_{tot} = \sum (G_i + \varphi_{E_i} Q_i) \quad (7.1)$$

com  $\varphi_{E_i} = \varphi \cdot \psi_{2i}$  e  $\psi_{2i} = 0,30$ .

As frequências próprias da estrutura do edifício foram determinadas separadamente para as duas direcções da malha ortogonal. Para tal, usou-se um programa desenvolvido com base no método de sobreposição modal [56].

Para as acções permanentes (peso próprio de lajes, vigas, pilares, divisórias e revestimento) e sobrecargas com o respectivo valor reduzido foram obtidos os pesos para os diferentes pisos como se indicam no Quadro 7.3.

Quadro 7.3 - Peso por piso [kN].

Piso corrente	3088
Último piso	2854

Tendo sido divididos estes pesos pelo número de pórticos existentes em cada direcção e considerando que a massa surge concentrada apenas nas vigas, obtiveram-se os seguintes valores para a massa volúmica das vigas que se indicam no Quadro 7.4.

Quadro 7.4 - Massa volúmica das vigas - [ton/m<sup>3</sup>].

	Piso corrente	Último piso
Pórtico PX	25.733	23.783
Pórtico PY	22.874	21.141

Recorrendo ao programa desenvolvido, foram calculadas as frequências fundamentais da estrutura do edifício, indicando-se no Quadro 7.5 apenas as três primeiras para cada direcção.

Quadro 7.5 - Frequências fundamentais - [Hz].

Frequência	Direcção	
	X	Y
1ª	1.52	1.35
2ª	4.76	4.28
3ª	8.57	7.83

Como se pode constatar, a primeira frequência (para ambas as direcções) coincide com a calculada pelo método de Rayleigh por Ema Coelho [3].

### 7.3.1.3 - Dimensionamento das estruturas

Passa-se, de seguida, a descrever o dimensionamento dos elementos estruturais realizado por Ema Coelho [3].

Apresentam-se no Quadro 7.6 os valores que definem o espectro de resposta de dimensionamento, de acordo com o EC8 [53].

Quadro 7.6 - Espectro de resposta para dimensionamento (solo B).

$\alpha$	$T_1(s)$	$T_2(s)$	$S$	$K$	$\beta_0$
0.25	0.20	0.60	1	2/3	2.5

Com base no espectro apresentado, no valor da massa da estrutura e nos valores dos períodos fundamentais da estrutura, obtiveram-se as forças sísmicas equivalentes actuantes nos pórticos planos em cada uma das direcções  $Y$  e  $X$  da malha. Apresentam-se nos Quadros 7.7 e 7.8 os valores das forças sísmicas totais num pórtico em cada direcção e os valores das forças sísmicas ao nível dos pisos e dos esforços transversos correspondentes. Incluem-se ainda no Quadro 7.7 os valores do coeficiente de comportamento  $q$  considerados para o cálculo daquelas forças e os valores dos coeficientes sísmicos  $\beta$  resultantes da aplicação do espectro de resposta de dimensionamento.

Quadro 7.7 - Forças sísmicas actuantes nos pórticos (cálculos lineares).

Direcção	$W_{tot}$ (kN)	$T(s)$	$q$	$\beta$	$F_p$ (kN)
$Y$	24 470	0.74	5	0.108	441
$X$	24 470	0.66	5	0.117	716

Quadro 7.8 - Forças sísmicas nos pisos dos pórticos (cálculos lineares).

Piso ( $i$ )	$w_i$ (kN)	Direcção $X$		Direcção $Y$	
		$F_{pi}$ (kN)	$H_{pi}$ (kN)	$F_{pi}$ (kN)	$H_{pi}$ (kN)
8	2854	127.50	127.50	79.83	79.83
7	3088	133.00	260.50	82.50	162.33
6	3088	123.75	384.25	76.50	238.83
5	3088	109.50	493.75	67.67	306.50
4	3088	91.25	585.00	56.33	362.83
3	3088	70.50	655.50	42.50	405.33
2	3088	43.50	699.00	26.17	431.50
1	3088	17.25	716.25	9.33	440.83

Utilizando um modelo plano, com três graus de liberdade por nó, foi efectuada a análise estática linear dos dois pórticos planos e determinaram-se os esforços nos elementos

estruturais que serviram de base ao dimensionamento, considerando três combinações de acções. Para o cálculo foram consideradas três tipos de acções (permanentes, sobrecarga e sismo), sendo combinadas com os coeficientes que se indicam no Quadro 7.9, em que  $G$ ,  $Q$  e  $E$  representam os valores dos esforços devidos respectivamente às acções permanentes, à sobrecarga e à acção sísmica.

Quadro 7.9 - Coeficientes de combinação.

Combinações	$G$	$Q$	$E$
1	1.35	1.50	--
2	1.00	0.30	1.00
3	1.00	0.30	-1.00

Quadro 7.10 - Pormenorização das secções.

Secção	Longitudinal		Transversal	Esquema da secção
	$A_s$	$A'_s$	$A_t$	
VIGAS	A	6 $\phi$ 16 2 $\phi$ 12	4 $\phi$ 16 $\phi$ 8//0.10	
	B	6 $\phi$ 16 2 $\phi$ 12	5 $\phi$ 16 $\phi$ 8//0.10	
	C	4 $\phi$ 16	2 $\phi$ 16 $\phi$ 6//0.10	
	D	6 $\phi$ 16 2 $\phi$ 8	4 $\phi$ 16 $\phi$ 8//0.10	
	E	5 $\phi$ 16	4 $\phi$ 16 $\phi$ 8//0.10	
	F	6 $\phi$ 16 2 $\phi$ 8	4 $\phi$ 16 2 $\phi$ 8 $\phi$ 8//0.10	
	G	6 $\phi$ 16	4 $\phi$ 16 2 $\phi$ 8 $\phi$ 8//0.10	
PILARES	I	4 $\phi$ 25 10 $\phi$ 20	$\phi$ 10//0.10	
	II	12 $\phi$ 20	$\phi$ 10//0.10	
	III	12 $\phi$ 20	$\phi$ 8//0.10	

O dimensionamento e pormenorização das secções de betão armado dos elementos foram efectuados de acordo com as prescrições do EC8 [53], nomeadamente utilizando o processo de dimensionamento baseado na avaliação da capacidade real (“capacity design”) que corresponde basicamente à atribuição de maiores resistências aos pilares do que às vigas. Este critério visa essencialmente, como já foi anteriormente referido, originar a formação de mecanismos de histerese decorrentes da exploração da ductilidade nas vigas e controlados pelo comportamento inelástico em flexão destes elementos [3].

Apresenta-se no Quadro 7.10 um resumo do dimensionamento das secções de betão armado, esquematizando-se a sua pormenorização e indicando-se a armadura adoptada para as diferentes secções.

Na Figura 7.16 indica-se a localização das diferentes secções de betão armado nos elementos estruturais dos dois pórticos planos dimensionados.

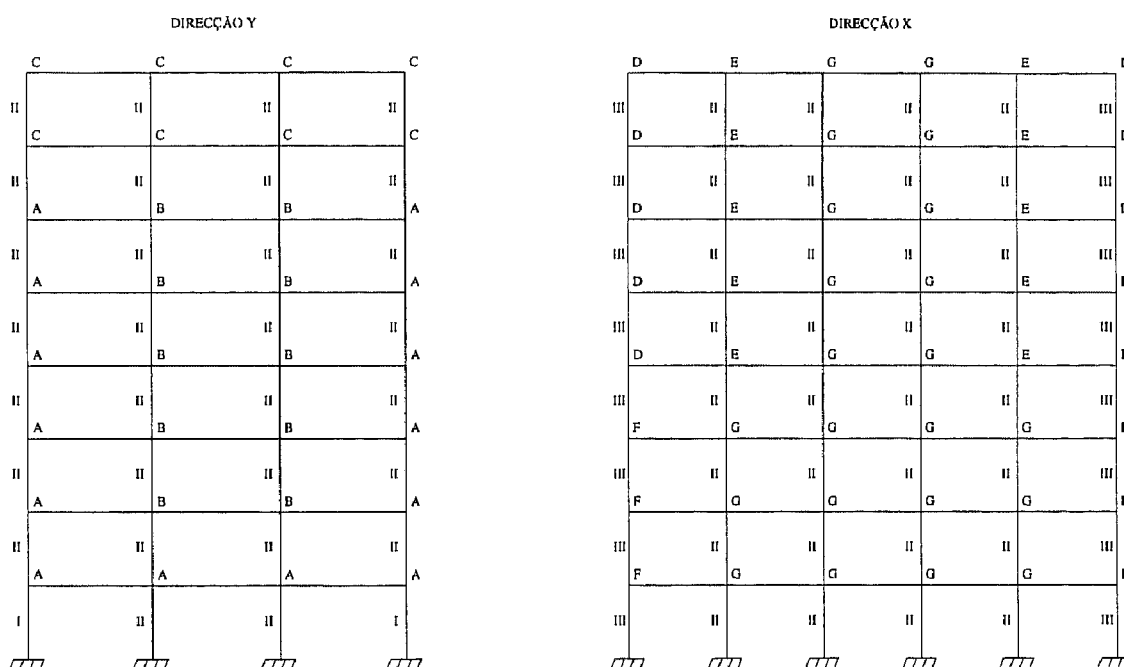


Figura 7.16 - Esquema do dimensionamento dos pórticos.

### 7.3.2 - Determinação da resposta dinâmica não-linear

Apresentam-se nesta secção os cálculos efectuados para a determinação da resposta sísmica das duas estruturas planas atrás referidas, recorrendo ao modelo analítico desenvolvido (programa *PORANL*).

### 7.3.2.1 - Idealização da acção sísmica

A propagação das ondas sísmicas, desde o local onde são geradas até ao ponto onde hipoteticamente interessa considerar o seu movimento vibratório, é traduzida num conjunto de séries temporais que caracterizam o movimento do solo no local em análise, em termos de acelerações, velocidades ou deslocamentos.

O modelo usado para a definição da acção sísmica no estudo do comportamento de estruturas é descrito nos pontos que se seguem.

#### 7.3.2.1.1 - Geração de acelerogramas artificiais

No campo da engenharia estrutural, o movimento vibratório sísmico é representado através de registos gerados artificialmente, compatíveis com as características de registos obtidos em situações análogas do ponto de vista da propagação.

A precisão na geração de acelerogramas artificiais, que reproduzam o movimento vibratório para um determinado local, está dependente do grau de conhecimento dos parâmetros sísmicos do local. Em virtude do estado actual desses conhecimentos, a geração dos acelerogramas só é possível assumindo bastantes simplificações. Na tentativa de contrariar isto, têm sido usados métodos de geração baseados em modelações estocásticas da acção sísmica, tratando os movimentos sísmicos de forma probabilística, como realizações, com dada duração, de um processo estocástico vectorial gaussiano estacionário ([52], [67]).

Estes processos gaussianos são especialmente atractivos pelo facto das suas propriedades serem passivas de determinação a partir das respectivas funções densidade espectral de potência, habitualmente conhecidas por espectros de potência.

A geração das séries temporais de acelerações sísmicas (acelerogramas) a usar no presente trabalho foi realizada com base no programa de cálculo automático *GERNES* [67].

O processo de geração desenvolve-se nas seguintes fases:

- o espectro de potência  $S(w)$  é dividido, considerando partições logarítmicas, em intervalos  $\Delta w_i$ ;
- considera-se uma série de fases geradas aleatoriamente, com uma distribuição

uniforme no intervalo  $[0; 2\pi]$ ;

- as amplitudes do movimento são geradas a partir da expressão:

$$A_i = \left( 2 \int_{\Delta w_i} S(w) dw \right)^{1/2} \quad (7.2)$$

- os acelerogramas são gerados a partir da relação:

$$\ddot{u}(t) = \sum_{i=1}^n A_i \cos(w_i t + \phi_i) \quad (7.3)$$

em que  $A_i$  e  $\phi_i$  representam a amplitude e a fase das  $n$  contribuições sinusoidais, respectivamente;

- modulação dos acelerogramas anteriores com uma função determinística, envolvente no tempo e na frequência, Figura 7.17, para simular o carácter transiente dos acelerogramas reais;

- correcção da linha base e ajuste da aceleração máxima dos acelerogramas gerados aos reais.

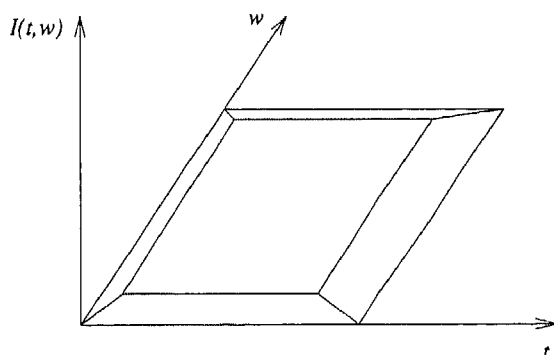


Figura 7.17 - Função determinística, envolvente no tempo e na frequência, simuladora do carácter transiente dos acelerogramas reais.

#### 7.3.2.1.2 - Definição da acção sísmica adoptada

Embora as estruturas porticadas estudadas tenham sido dimensionadas segundo o EC8 [53] (por Ema Coelho [3]), optou-se por quantificar a acção sísmica com base na regulamentação portuguesa [52] a partir dos espectros de potência. Assim, poder-se-ão comparar os resultados obtidos com os dois regulamentos em causa (RSA e EC8).

Foram considerados dois tipos de acção sísmica preconizados pelo RSA [52], os quais são representativos de:



- zona A, terreno de fundação do tipo II e duração limitada a 10 segundos. Foi adoptada a designação de acção sísmica tipo 1 (AST1);
- zona A, terreno de fundação tipo II e duração limitada a 30 segundos. Foi adoptada a designação de acção sísmica tipo 2 (AST2).

No Quadro 7.11 representam-se os valores das funções densidade espectral de potência regulamentares utilizadas na geração dos acelerogramas de trabalho, Figuras 7.18 e 7.19.

Quadro 7.11 - Densidades espectrais de potência de aceleração,  $S(f)$ , das componentes horizontais para a zona A, terreno tipo II, usados na geração dos acelerogramas representativos dos dois tipos de acção sísmica regulamentar considerados.

AST1 Terreno tipo II		AST2 Terreno tipo II	
$f$ (Hz)	$S(f)$ ( $\text{cm/s}^2$ ) <sup>2</sup> /Hz	$f$ (Hz)	$S(f)$ ( $\text{cm/s}^2$ ) <sup>2</sup> /Hz
0.03	0	0.03	0
0.90	220	0.50	220
1.80	300	1.00	400
3.60	300	2.00	160
7.20	130	4.00	65
14.40	40	8.00	25
20.00	16	20.00	0

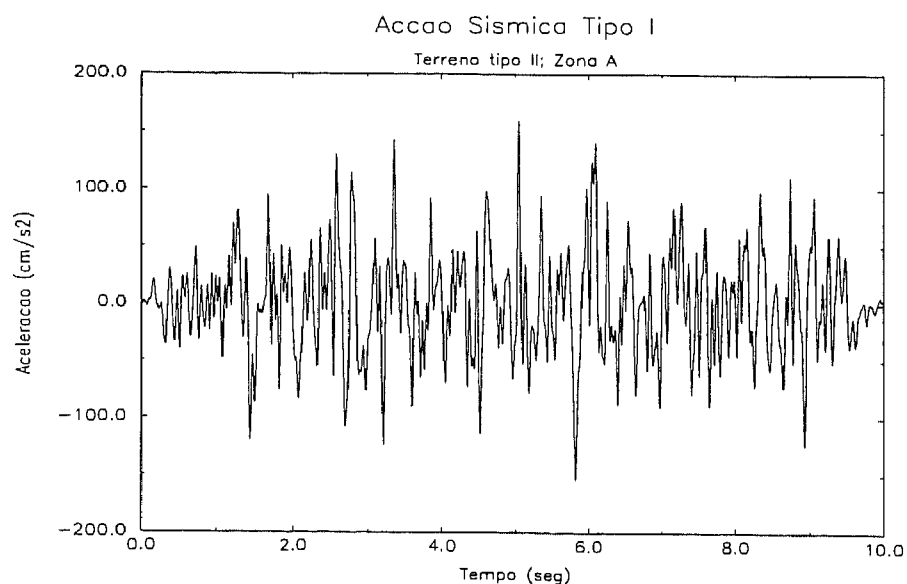


Figura 7.18 - Acelerograma representativo da AST1.

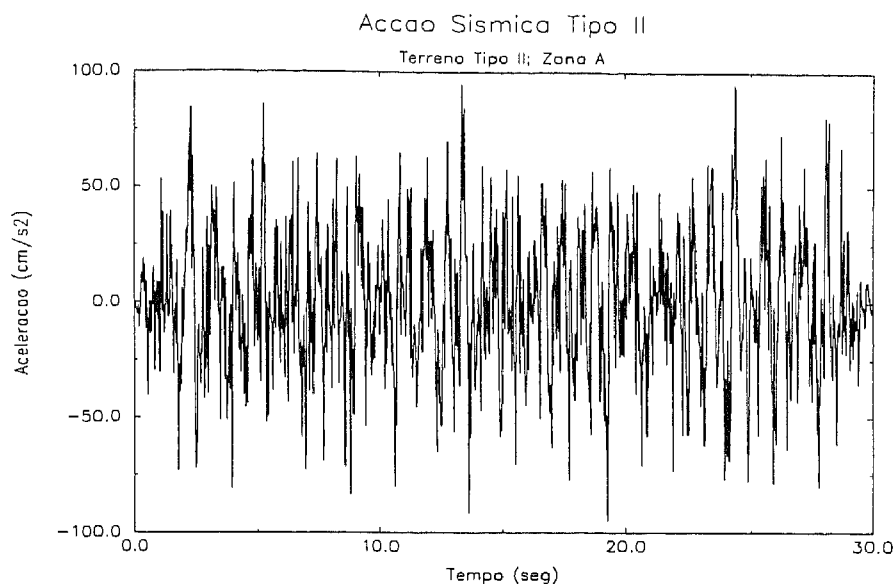


Figura 7.19 - Acelerograma representativo da AST2.

Relativamente aos acelerogramas representativos da acção sísmica tipo 1, registou-se um valor médio da aceleração de pico igual a 0.15g, enquanto que para a acção sísmica tipo 2 obteve-se para o valor médio de pico 0.10g.

Para que a resposta estrutural não reflecta as incertezas associadas ao movimento sísmico, devem ser usados vários acelerogramas artificiais representativos de um mesmo tipo de acção sísmica na obtenção da resposta, uma vez que o comportamento dinâmico das estruturas é particularmente sensível a diferenças, aparentemente pequenas, no movimento de base que as solicita.

Atendendo ao facto deste trabalho ter por objectivo a apresentação do modelo desenvolvido, considerou-se para cada acção sísmica tipo um acelerograma apenas.

Salienta-se a necessidade do estudo de estruturas de betão armado sujeitas à acção sísmica com base em múltiplos acelerogramas artificiais para ultrapassar as incertezas associadas à acção sísmica. Fazendo-se a análise da resposta sísmica das estruturas em termos de valores médios dos parâmetros em estudo (deslocamentos ou esforços).

Com o objectivo de analisar a sensibilidade do comportamento estrutural a diferentes intensidades sísmicas foram considerados posteriormente outros acelerogramas artificiais, obtidos por uma simples majoração dos valores para os acelerogramas gerados (AST1 e AST2), como se verá no ponto seguinte.

### 7.3.2.2 - Metodologia dos cálculos não-lineares

A resposta das duas estruturas planas (direcção  $X$  e  $Y$ ) foi determinada para os dois acelerogramas AST1 e AST2 e para os acelerogramas obtidos por majoração destes (obtidos multiplicando por 2, 3 e 4 os acelerogramas gerados).

Nos estudos realizados tem-se em conta o nível de esforço axial instalado para as cargas estáticas na obtenção da curva-base da secção de betão armado, admitindo-se na análise dinâmica que este não varia de forma a que os resultados sejam significativamente diferentes.

Na Figura 7.20 representam-se os esquemas das duas estruturas analisadas.

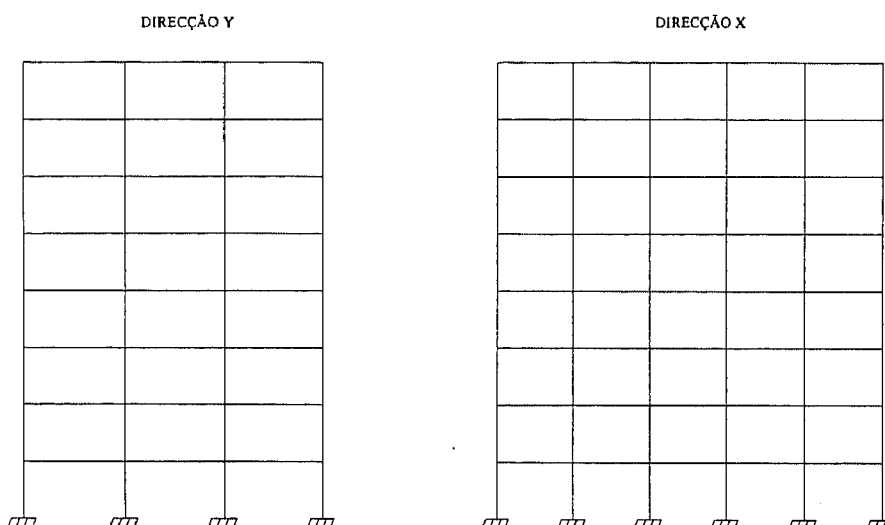


Figura 7.20 - Esquema dos pórticos planos analisados.

Para as estruturas em estudo fez-se inicialmente uma análise não-linear com as cargas estáticas, sabendo-se ser importante o estado inicial dos diferentes elementos constituintes das estruturas.

Este carregamento é constituído pelo peso próprio dos elementos estruturais dos pórticos e por cargas verticais aplicadas nas vigas e nos nós representativas respectivamente das reacções (carga permanente e valor quase-permanente da sobrecarga utilizada em fase de dimensionamento para avaliação da massa das estruturas) das lajes e das vigas transversais.

As análises dinâmicas não-lineares de cada estrutura foram efectuadas a partir dos valores de deslocamentos e esforços instalados devido ao carregamento estático, constituindo estes valores obtidos as condições iniciais para a análise dinâmica. Como já tinha sido referido atrás, o valor do esforço axial instalado em cada secção foi tido em conta na avaliação da respectiva resistência em flexão.

Relativamente à massa das estruturas, foram considerados pesos distribuídos nas vigas correspondentes ao peso total por piso  $w_i$ , determinado em fase de dimensionamento e cujo valor se apresentou no Quadro 7.4.

Nas análises não-lineares dinâmicas considerou-se para a avaliação da matriz de amortecimento de cada pórtico, um coeficiente de amortecimento  $\xi = 2\%$  relativamente ao primeiro e terceiro modos de vibração para a determinação das constantes que afectam as matrizes de massa e rigidez na combinação linear considerada na definição daquela matriz. Utilizou-se o valor  $\xi = 2\%$  com o objectivo de reproduzir de uma forma mais realista a parcela de amortecimento viscoso de uma estrutura de betão armado dado que a parcela devida a dissipação histerética é explicitamente considerada no modelo de comportamento não-linear [3].

Apresentam-se de seguida os resultados obtidos com o programa *PREANL* para os constantes que definem a matriz de amortecimento como combinação linear das matrizes de massa e rigidez:

$$[C] = \alpha \cdot [M] + \beta \cdot [K] \quad (7.4)$$

Pórtico na direcção  $x$  (EDX):

$$\begin{cases} f_1 = 1,52 \text{ Hz } (\xi_1 = 2\%) \\ f_3 = 0,57 \text{ Hz } (\xi_3 = 2\%) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0,3245 \\ \beta = 6,309 \times 10^{-4} \end{cases} \quad (7.5)$$

Pórtico na direcção  $y$  (EDY):

$$\begin{cases} f_1 = 1,35 \text{ Hz } (\xi_1 = 2\%) \\ f_3 = 7,83 \text{ Hz } (\xi_3 = 2\%) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0,2894 \\ \beta = 6,935 \times 10^{-4} \end{cases} \quad (7.6)$$

A rigidez inicial das estruturas para a análise dinâmica foi determinada a partir das matrizes de rigidez dos macro-elementos tendo em conta o seu estado depois de instaladas as cargas estáticas. Considerou-se apenas a deformabilidade por flexão e esforço axial tendo-se desprezado a deformação por esforço transversal.

O cálculo dos diagramas momento-curvatura monotónicos das secções de betão armado foi efectuado com recurso a um modelo de fibras [38], tendo sido utilizado o modelo de Kent-Park modificado para a representação do diagrama tensões-extensões do betão confinado sujeito a compressão e um diagrama elasto-plástico para o aço com uma extensão  $\varepsilon_{sy} = 2,3\%$  correspondente à cedência. No caso das secções transversais dos pilares, consideraram-se os níveis de esforço axial na determinação dos diagramas momento-curvatura calculados para o carregamento estático das estruturas.

Conforme tinham sido apresentados na secção 7.3.1.1 os materiais usados tem as seguintes propriedades:

- Aço da classe S400 sem endurecimento e caracterizado por uma tensão de cedência média  $\sigma_y = 460\text{MPa}$ .
- Betão da classe C25 caracterizado por uma resistência à compressão média  $f_c = 33\text{MPa}$ .

A determinação dos diagramas momento-curvatura foi realizada para as diferentes secções de betão armado representativas de um subelemento. Foram assim calculados os diagramas momento-curvatura sob carregamento monotónico para as secções de betão armado dos vários tipos de elementos estruturais de acordo com a geometria das secções e pormenorização da armadura adoptada e apresentada no Quadro 7.10.

A partir das curvas momento-curvatura obtidos faz-se a aproximação de uma curva tri-linear de acordo com o descrito no Capítulo 4.

### **7.3.2.3 - Caracterização dos tipos de elementos estruturais**

A caracterização dos diferentes elementos estruturais dos pórticos em análise foi detalhadamente exposta por Ema Coelho [3]. No que se segue será apresentada sumariamente essa caracterização, bem como as adaptações necessárias para o modelo desenvolvido pelo autor.

Tendo em conta as disposições de armadura adoptadas para as secções de betão armado dos elementos estruturais que se apresentaram no Quadro 7.10 e na Figura 7.16 e considerando diferentes níveis de esforço axial inicial nos pilares ao longo da altura (tipicamente de 2 em 2 pisos) e diferenciando esses níveis para os pilares extremos (externos) e intermédios (internos) dos dois pórticos planos analisados, obtiveram-se para as estruturas

na direcção *X* e *Y* respectivamente 14 e 15 tipos diferentes de elementos. Apresentam-se na Figura 7.21 os esquemas dos dois pórticos planos e identificam-se os tipos de elementos considerados.

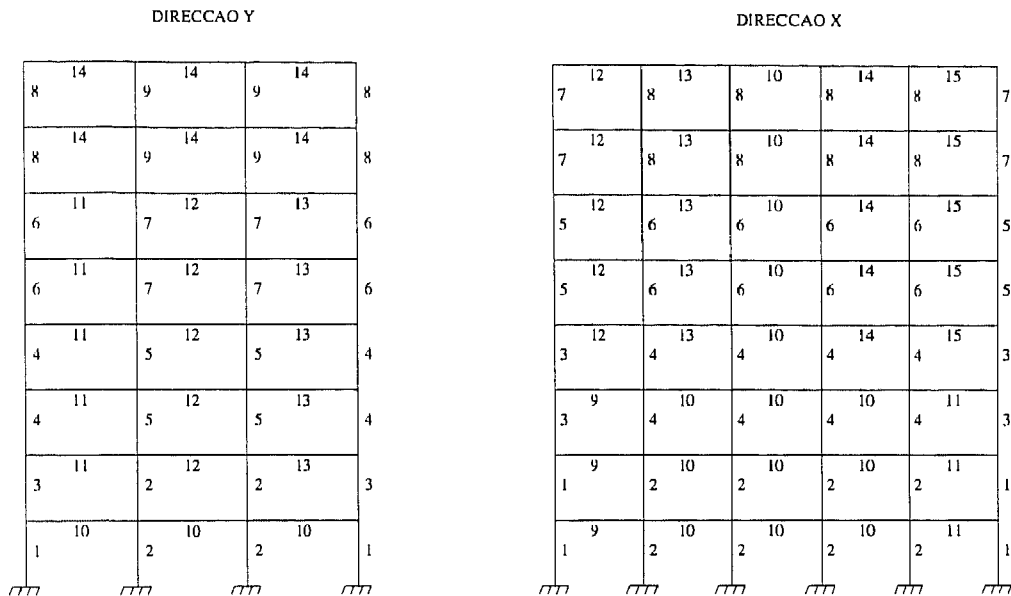


Figura 7.21 - Definição dos tipos diferentes de elementos estruturais.

A caracterização dos tipos de elementos estruturais, nomeadamente a definição dos parâmetros do modelo hysterético representativo do comportamento em flexão das suas secções extremas foi baseada nas seguintes hipóteses:

- Para todos os tipos de elementos, desprezam-se os efeitos da degradação de rigidez, da degradação de resistência e o efeito de “slipping”. Tomaram-se assim, para todas as secções, os seguintes valores para os parâmetros correspondentes do modelo hysterético:

$$\begin{cases} \alpha = 0.0 \\ \beta = 0.0 \\ \gamma = 0.0 \end{cases} \quad (7.7)$$

- Admitiu-se para as diferentes secções que a rigidez de flexão inicial  $K_0$  é igual à rigidez da secção bruta de betão ( $K_0 = EI$ ) até a ocorrência da cedência. Assim, admitiu-se que a fendilhação não altera o valor da rigidez, isto é,  $K_1 = K_0$ . Atendendo a que no modelo desenvolvido a idealização da curva-base das secções é tomada

trilinear surgiu a necessidade de definir a curvatura limite de fendilhação  $\rho_f$ , tendo-se admitido que esta vale sensivelmente um terço do valor da curvatura de cedência  $\rho_c$ .

- Os valores da curvatura de plastificação  $\rho_c$  e da rigidez após cedência (plastificação)  $K_2$  considerados para a definição da curva-base do modelo hysterético associado aos vários tipos de elementos foram estimados a partir dos diagramas teóricos momento-curvatura calculados para as diferentes secções sujeitas a carregamento monotónico. A diferenciação nos dois sentidos de flexão foi apenas considerada para as vigas dado que as suas secções são assimetricamente armadas. Além disso, consideram-se diferentes parâmetros para as duas extremidades de alguns dos tipos de vigas de acordo com o dimensionamento considerado para as respectivas secções de betão armado.
- Considerou-se para o comprimento de plastificação  $l_p$  das zonas inelásticas nas extremidades dos macro-elementos estruturais um valor igual a 10% do comprimento do elemento em causa. Assim considerou-se  $l_p = 0.30\text{m}$  para os pilares nos dois pórticos e  $l_p = 0.40\text{m}$  ou  $l_p = 0.50\text{m}$  para as vigas dos pórticos na direcção X e Y respectivamente.

Apresentam-se nos Quadros 7.12 e 7.13 a identificação dos tipos diferentes de vigas, nas duas estruturas, associados às secções tipo de betão armado consideradas (A a G) e que se representaram na Figura 7.21. No Quadro 7.14 apresentam-se os valores adoptados para os parâmetros do modelo hysterético associados às secções extremas das vigas. A identificação dos tipos de pilares e os valores para o modelo hysterético que caracterizam as secções extremas correspondentes apresentam-se nos Quadros 7.15 e 7.16 para os pórticos na direcção Y e X respectivamente. Em relação aos restantes parâmetros do modelo hysterético desprezou-se para ambos os pórticos, como se referiu atrás, os efeitos da degradação de rigidez, da degradação de resistência e o efeito de “slipping”.

Quadro 7.12 - Identificação dos tipos de vigas - direcção Y.

Tipo	10		11		12		13		14	
Extremo	Esq.	Dir.	Esq.	Dir.	Esq.	Dir.	Esq.	Dir.	Esq.	Dir.
Secção	A	A	A	B	B	B	B	A	C	C

Quadro 7.13 - Identificação dos tipos de vigas - direcção X.

Tipo	9		10		11		12		13		14		15	
Extremo	Esq.	Dir.	Esq.	Dir.	Esq.	Dir.	Esq.	Dir.	Esq.	Dir.	Esq.	Dir.	Esq.	Dir.
Secção	F	G	G	G	G	F	D	E	E	G	G	E	E	D

Quadro 7.14 - Caracterização das secções das vigas.

Secção	$K_0^+ = K_0^-$ [kN×m <sup>2</sup> ]	$K_1^+$ [kN×m <sup>2</sup> ]	$K_2^+$ [kN×m <sup>2</sup> ]	$\rho_f^+$ [×10 <sup>-3</sup> /m]	$\rho_c^+$ [×10 <sup>-3</sup> /m]	$K_1^-$ [kN×m <sup>2</sup> ]	$K_2^-$ [kN×m <sup>2</sup> ]	$\rho_f^-$ [×10 <sup>-3</sup> /m]	$\rho_c^-$ [×10 <sup>-3</sup> /m]
A	59824.6	59824.6	221.4	1.9	5.7	35957.3	48.3	1.5	4.6
B	61250.0	61250.0	214.4	1.9	5.6	51548.9	82.2	1.5	4.6
C	37500.0	37500.0	67.5	1.7	5.2	16022.7	11.6	1.5	4.4
D	55892.9	55892.9	178.9	1.9	5.6	37923.1	48.3	1.5	4.6
E	49347.8	44382.7	96.7	1.8	5.3	49347.8	64.2	1.5	4.6
F	57090.9	57090.9	177.0	1.8	5.5	45476.3	64.2	1.5	4.6
G	52727.3	52727.3	147.6	1.8	5.5	47658.1	64.2	1.5	4.6

Quadro 7.15 - Caracterização dos tipos de pilares - Direcção Y.

Tipos	Secção	$N$ [kN]	$K_0 = K_1$ [kN×m <sup>2</sup> ]	$K_2$ [kN×m <sup>2</sup> ]	$\rho_f$ [×10 <sup>-3</sup> /m]	$\rho_c$ [×10 <sup>-3</sup> /m]
1	I	940	115254.2	3745.8	2.0	5.9
2	II	1476	109838.7	2702.0	2.1	6.2
3	II	827	97894.7	2222.2	1.9	5.7
4	II	1103	95000.0	2118.5	1.9	5.6
5	II	711	103728.8	2458.4	2.0	5.9
6	II	736	87454.5	1871.5	1.8	5.5
7	II	477	94386.0	2114.2	1.9	5.7
8	II	372	81132.1	1622.6	1.8	5.3
9	II	239	85185.2	1763.3	1.8	5.4



Quadro 7.16 - Caracterização dos tipos de pilares - Direcção X.

Tipos	Secção	$N$ [kN]	$K_0 = K_1$ [kN×m <sup>2</sup> ]	$K_2$ [kN×m <sup>2</sup> ]	$\rho_f$ [×10 <sup>-3</sup> /m]	$\rho_c$ [×10 <sup>-3</sup> /m]
1	III	975	101206.9	2307.5	1.9	5.8
2	II	1499	111935.5	2764.8	2.1	6.2
3	III	741	94386.0	2085.9	1.9	5.7
4	II	1125	105084.7	2490.5	2.0	5.9
5	III	498	88909.1	1884.9	1.8	5.5
6	II	752	94912.3	2126.0	1.9	5.7
7	III	249	81698.1	1634.0	1.8	5.3
8	II	380	85555.6	1779.6	1.8	5.4

### 7.3.3 - Apresentação dos resultados

No que se segue apresentam-se alguns dos resultados obtidos nas diferentes análises efectuadas para os dois pórticos planos, nomeadamente em termos da análise da resposta global e ao nível dos pisos das estruturas, da evolução do comportamento não-linear e da formação das zonas inelásticas nos extremos dos elementos ao longo do processo de carregamento, e da análise da resposta local de alguns elementos.

#### 7.3.3.1 - Deslocamentos das estruturas

Nas Figuras 7.22, 7.23, 7.24 e 7.25 representam-se as histórias de deslocamentos ao nível dos pisos 2, 4 e 8 obtidas com os cálculos efectuados. Recordar-se que cada pórtico foi analisado para os dois tipos de acção sísmica referidos no RSA [52] e para acções obtidas a partir destas por multiplicação pelos factores 2, 3 e 4.

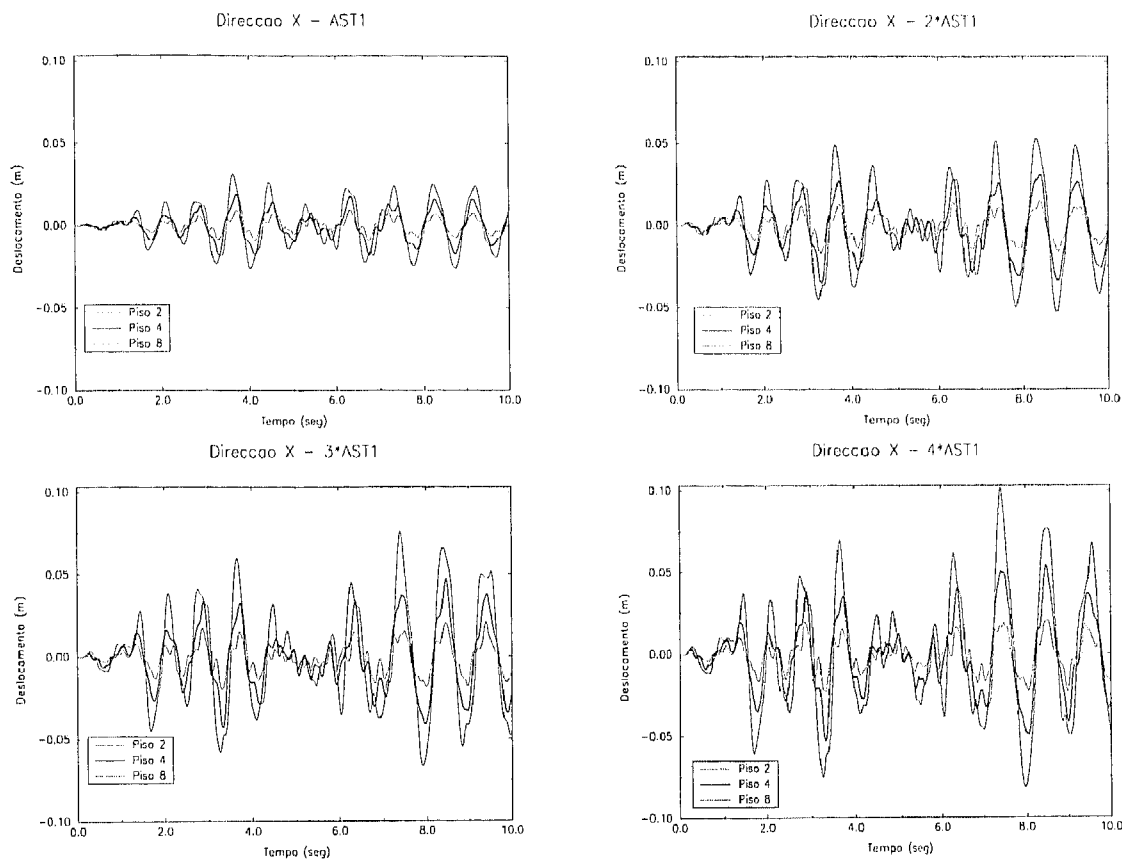


Figura 7.22 - Histórias de deslocamentos (Direcção X, Acção sísmica tipo I).

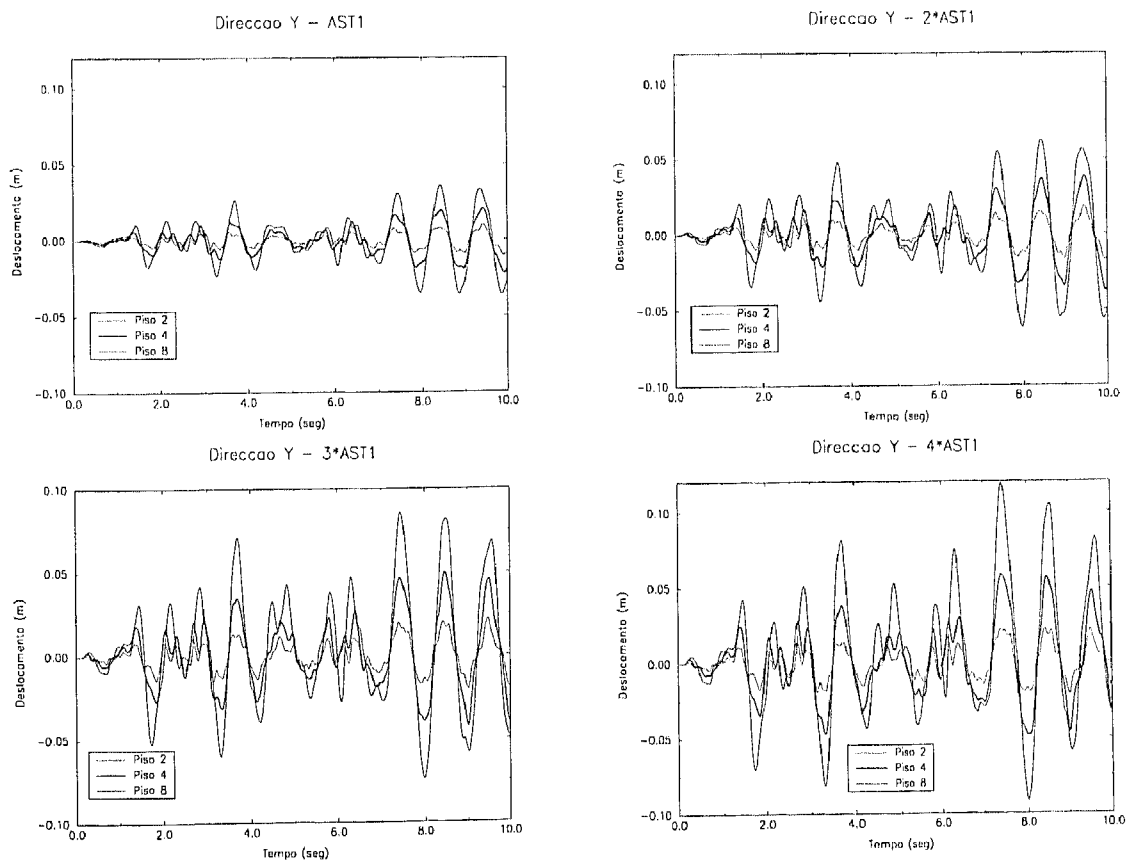


Figura 7.23 - Histórias de deslocamentos (Direcção Y, Acção sísmica tipo I).

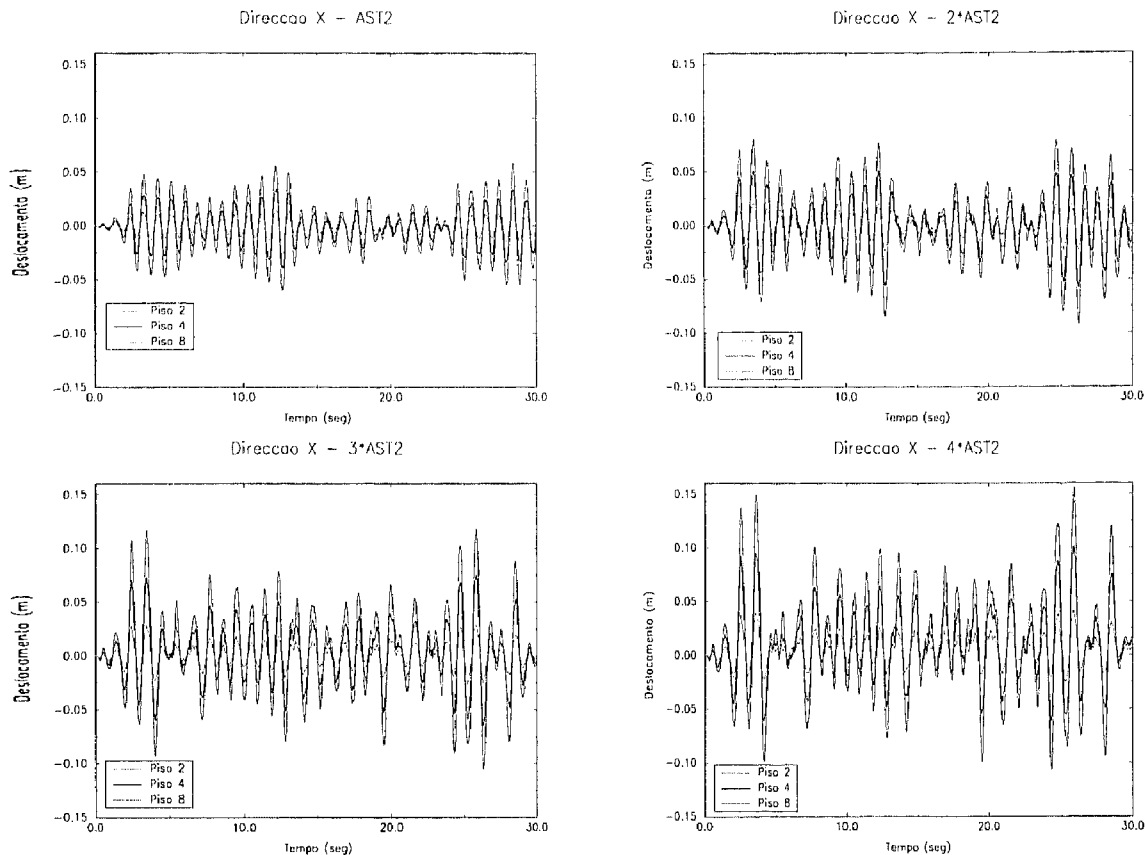


Figura 7.24 - Histórias de deslocamentos (Direção X, Ação sísmica tipo 2).

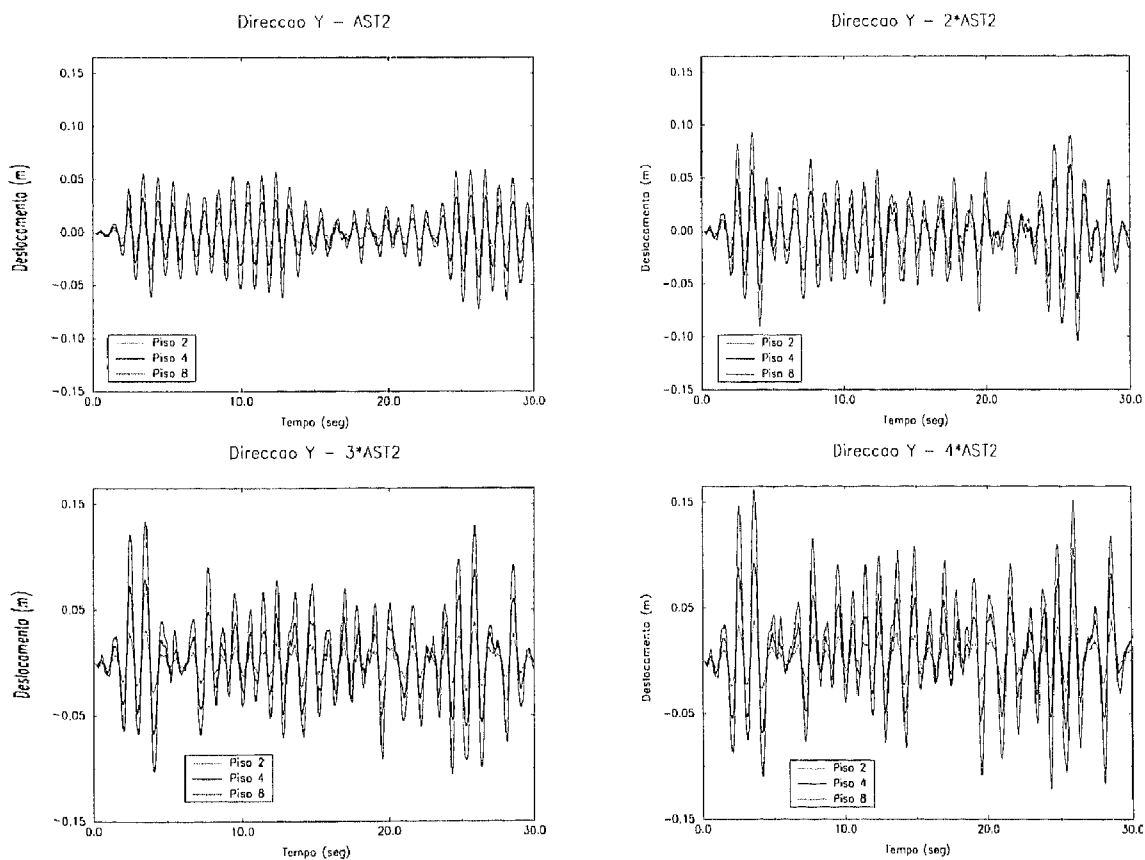


Figura 7.25 - Histórias de deslocamentos (Direção Y, Ação sísmica tipo 2).

Na Figura 7.26 representa-se a evolução em altura dos deslocamentos máximos dos pisos obtidos para todos os cálculos não-lineares efectuados.

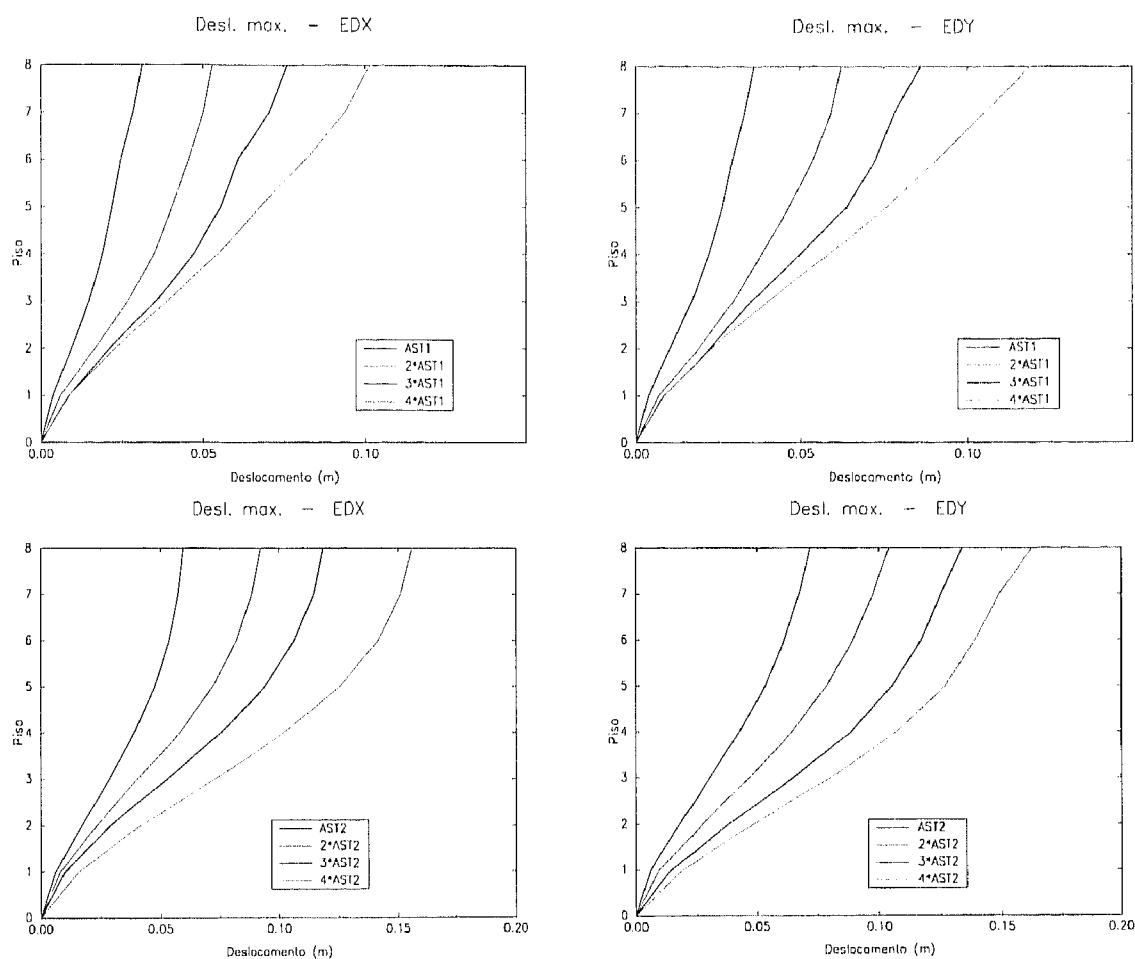
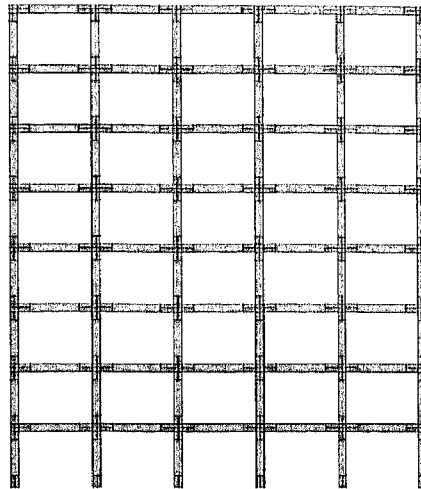


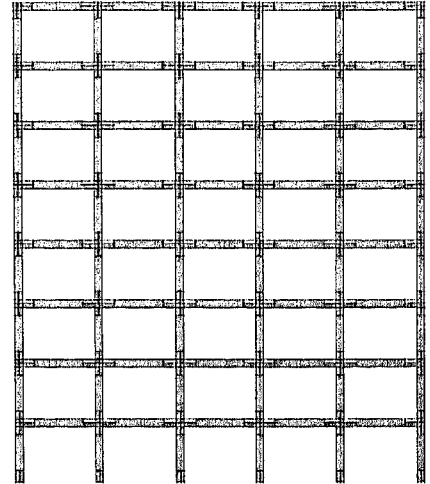
Figura 7.26 - Deslocamentos máximos dos pisos.

### 7.3.3.2 - Evolução do comportamento inelástico

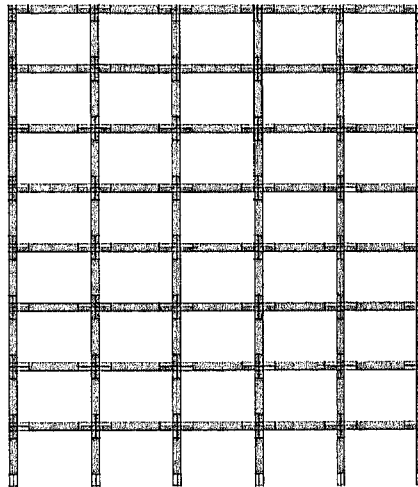
Nas Figuras 7.27 a 7.42 representa-se a distribuição das zonas inelásticas nos dois pórticos planos estudados e a sua evolução no tempo para todos os acelerogramas considerados.



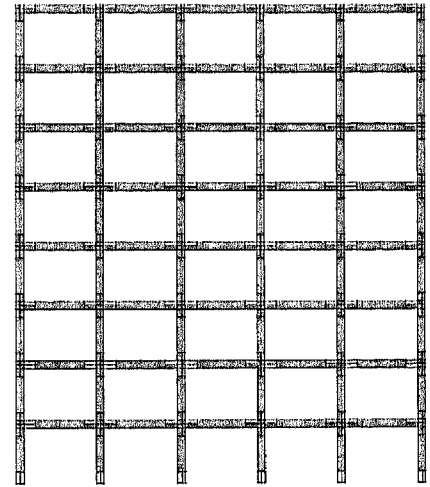
$t = 1,0 \text{ seg}$



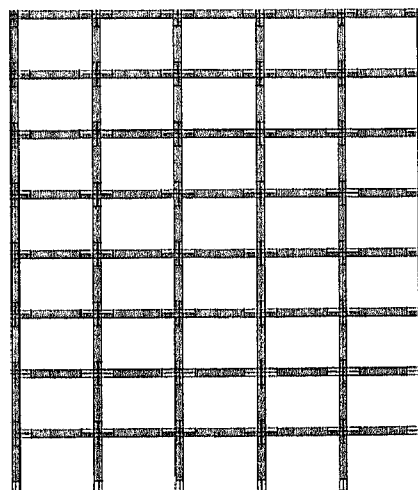
$t = 2,0 \text{ seg}$



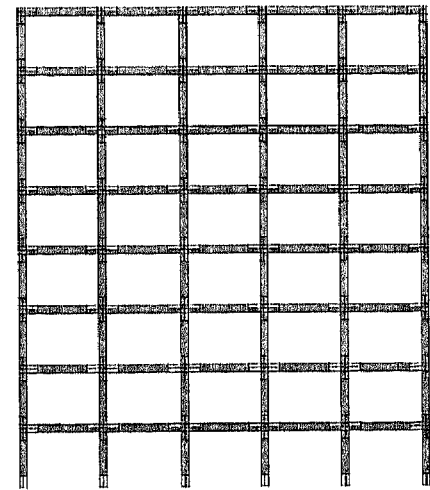
$t = 4,0 \text{ seg}$



$t = 6,0 \text{ seg}$



$t = 8,0 \text{ seg}$



$t = 10,0 \text{ seg}$

regime elástico

nível de ductilidade 2

nível de ductilidade 5

regime fendilhado

nível de ductilidade 3

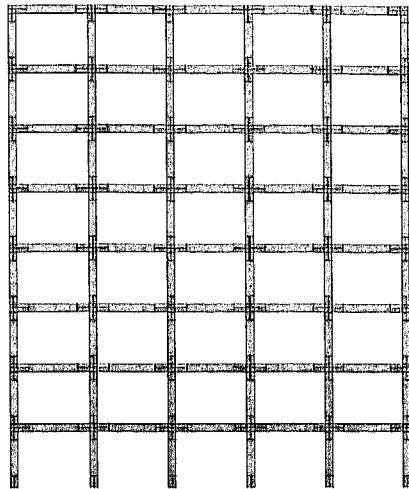
nível de ductilidade 6

nível de ductilidade 1

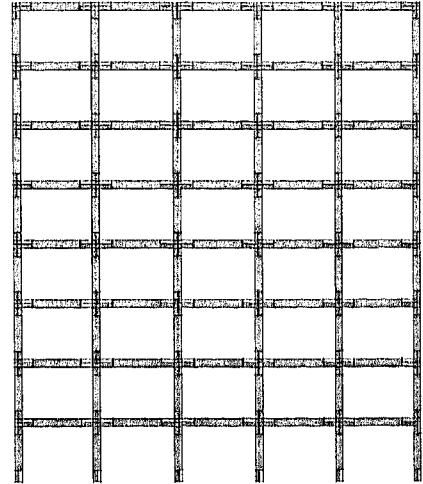
nível de ductilidade 4

nível de ductilidade 7

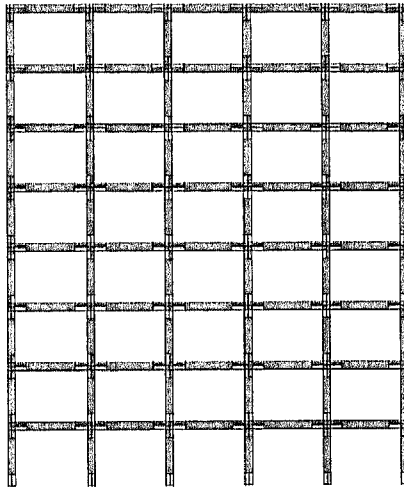
Figura 7.27 - Evolução das plastificações (AST1, EDX).



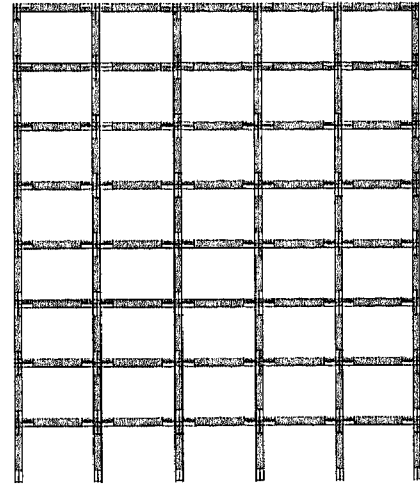
$t = 1,0$  seg



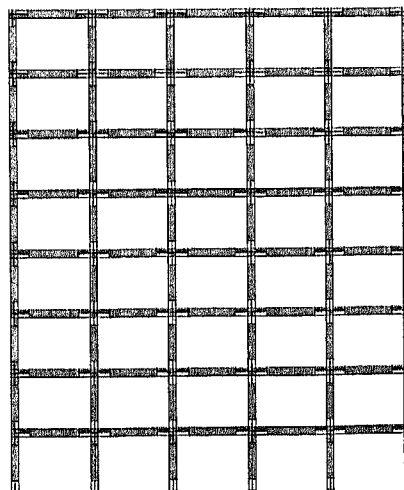
$t = 2,0$  seg



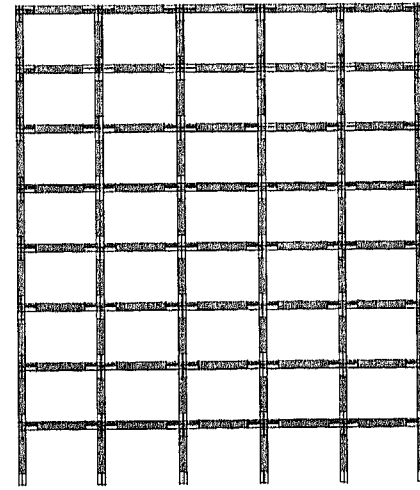
$t = 4,0$  seg



$t = 6,0$  seg



$t = 8,0$  seg



$t = 10,0$  seg

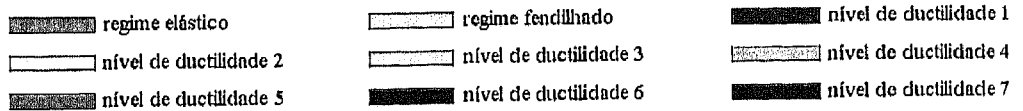
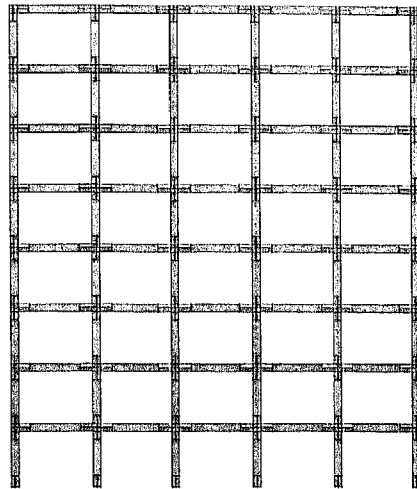
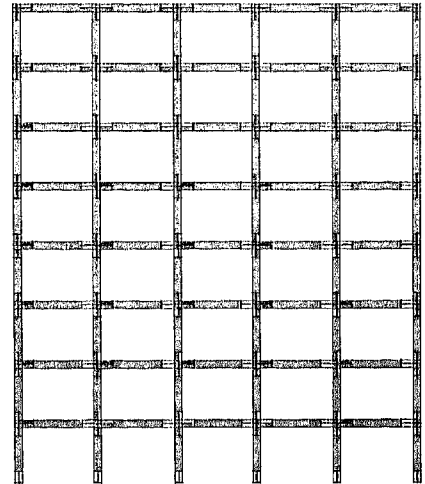


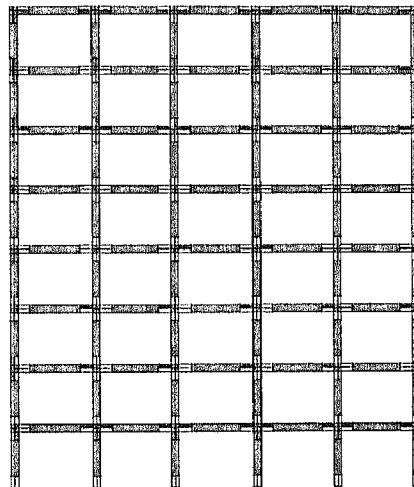
Figura 7.28 - Evolução das plastificações (2xAST1, EDX).



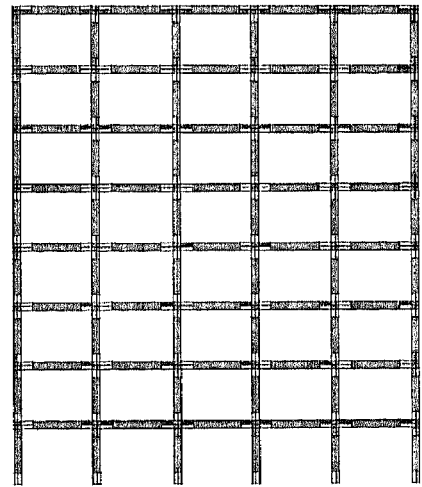
$t = 1,0 \text{ seg}$



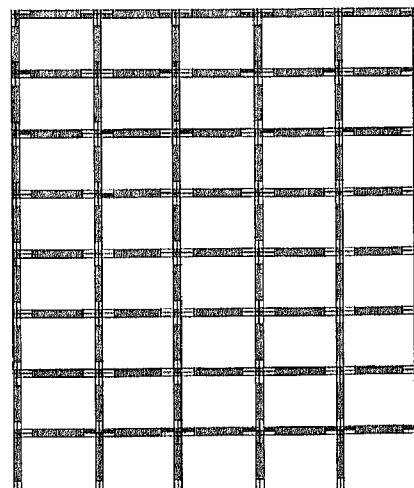
$t = 2,0 \text{ seg}$



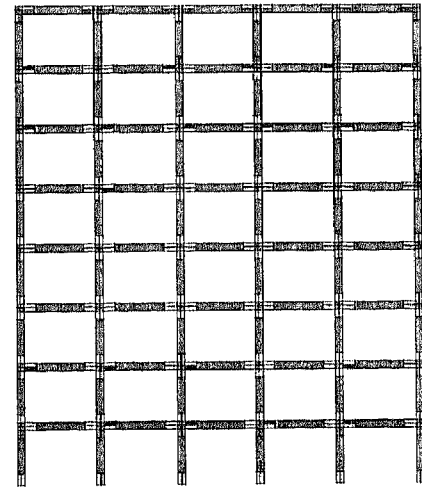
$t = 4,0 \text{ seg}$



$t = 6,0 \text{ seg}$



$t = 8,0 \text{ seg}$



$t = 10,0 \text{ seg}$

regime elástico

regime fendilhado

nível de ductilidade 1

nível de ductilidade 2

nível de ductilidade 3

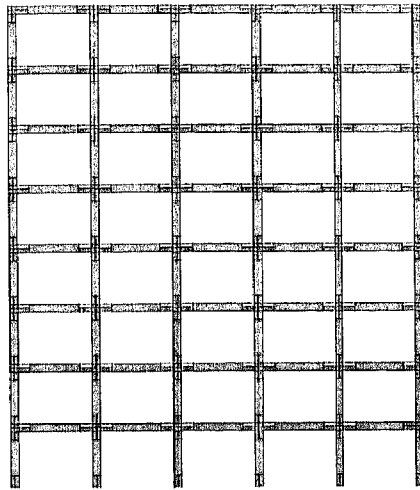
nível de ductilidade 4

nível de ductilidade 5

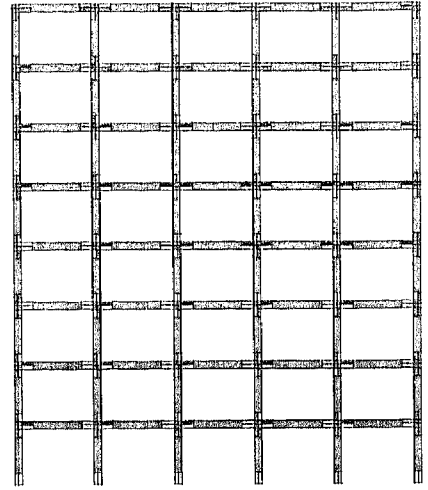
nível de ductilidade 6

nível de ductilidade 7

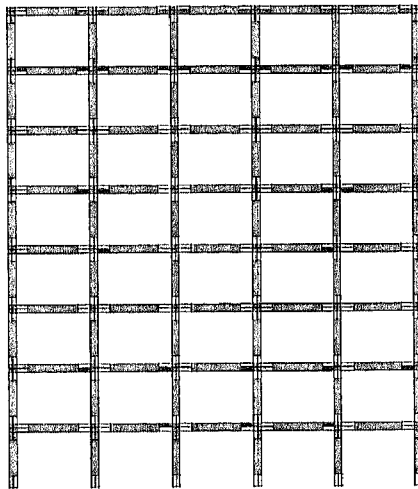
Figura 7.29 - Evolução das plastificações (3xAST1, EDX).



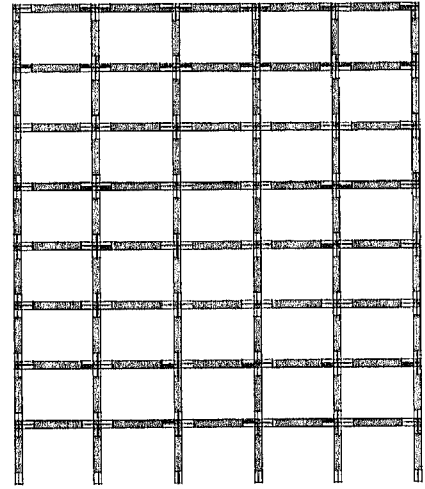
$t = 1,0$  seg



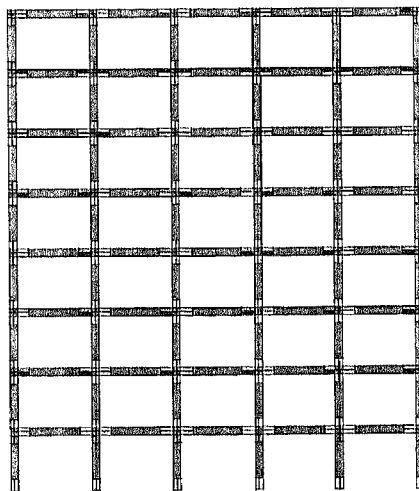
$t = 2,0$  seg



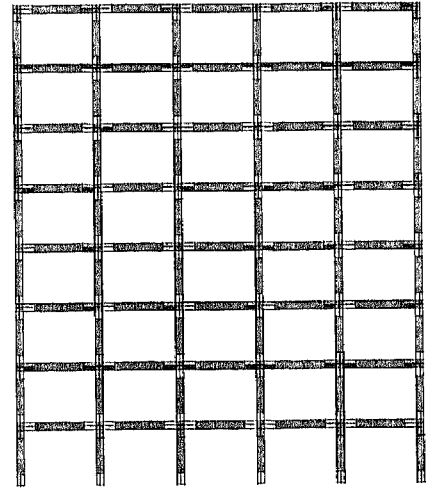
$t = 4,0$  seg






$t = 6,0$  seg






$t = 8,0$  seg



$t = 10,0$  seg

 regime elástico  
 nível de ductilidade 2  
 nível de ductilidade 5

 regime fendilhado  
 nível de ductilidade 3  
 nível de ductilidade 6




 nível de ductilidade 1  
 nível de ductilidade 4  
 nível de ductilidade 7

Figura 7.30 - Evolução das plastificações (4xAST1, EDX).



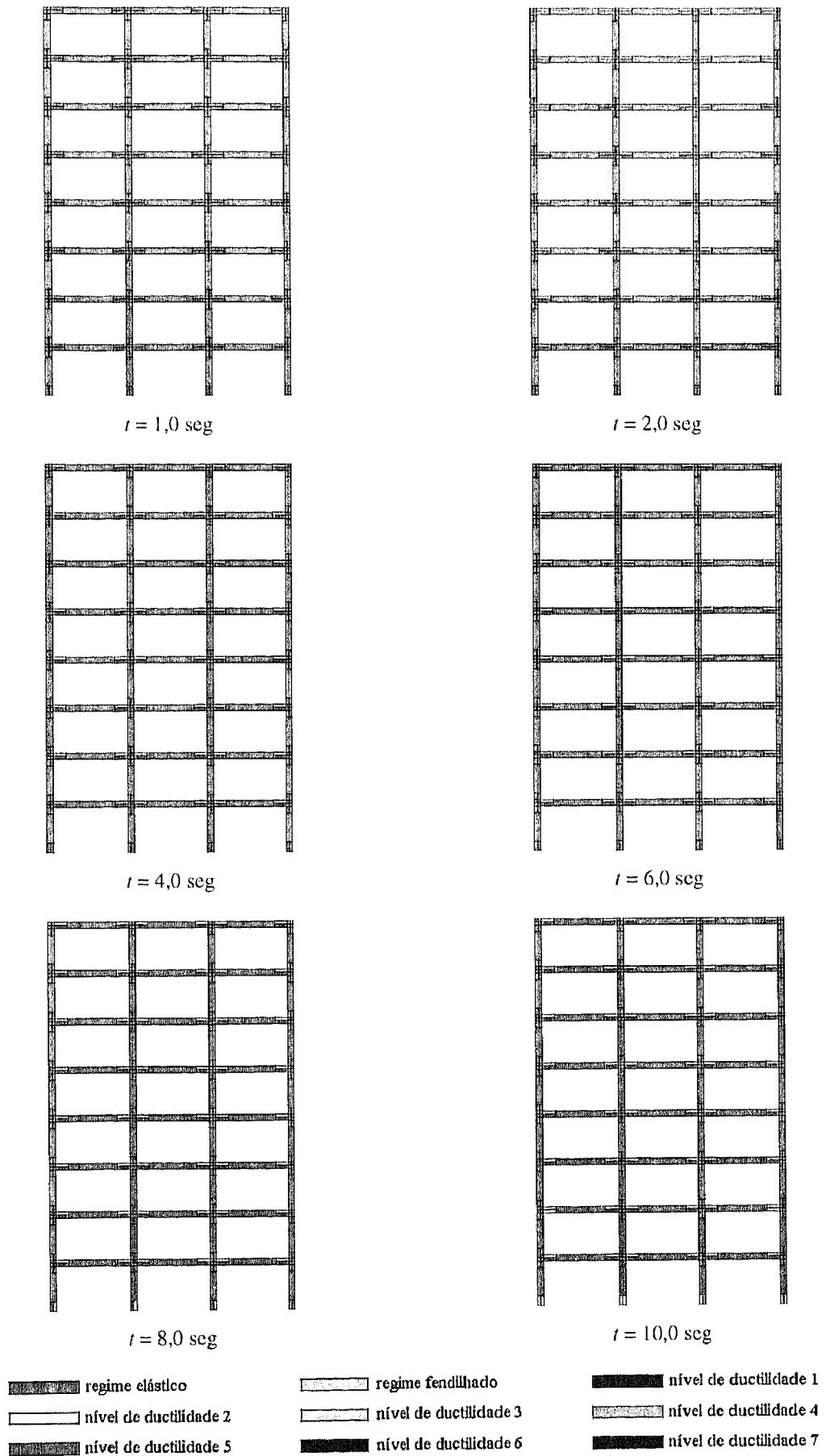
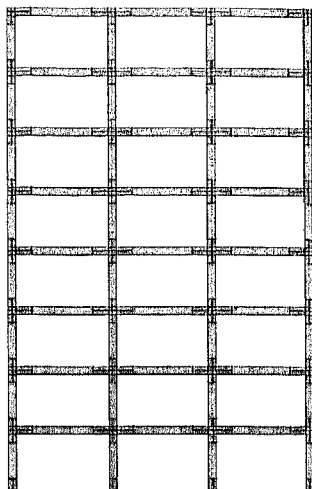
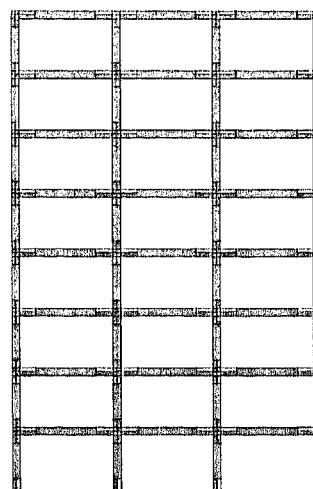


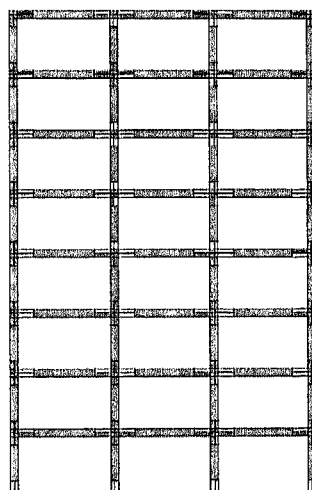
Figura 7.31 - Evolução das plastificações (AST1, EDY).



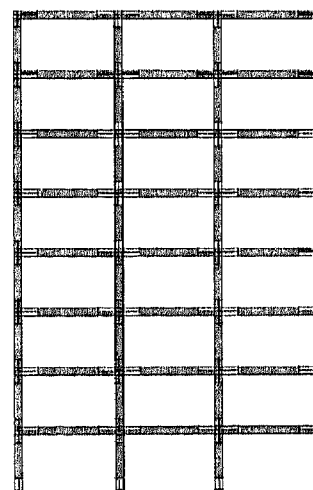
$t = 1,0 \text{ seg}$



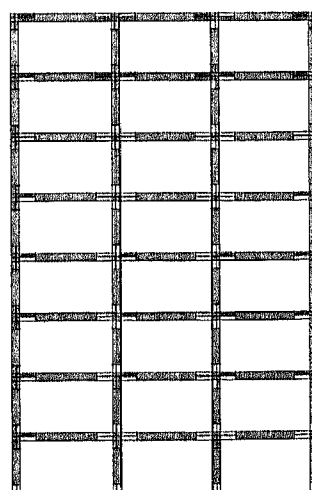
$t = 2,0 \text{ seg}$



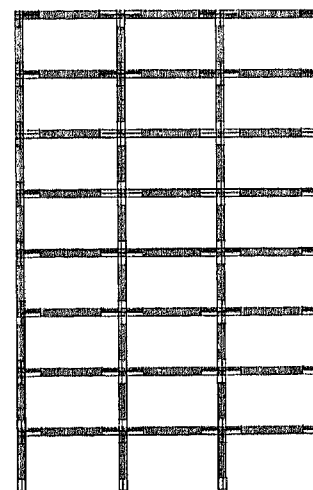
$t = 4,0 \text{ seg}$



$t = 6,0 \text{ seg}$



$t = 8,0 \text{ seg}$



$t = 10,0 \text{ seg}$

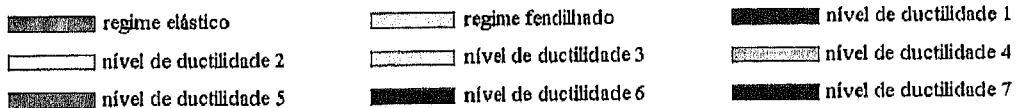


Figura 7.32 - Evolução das plastificações (2xAST1, EDY).

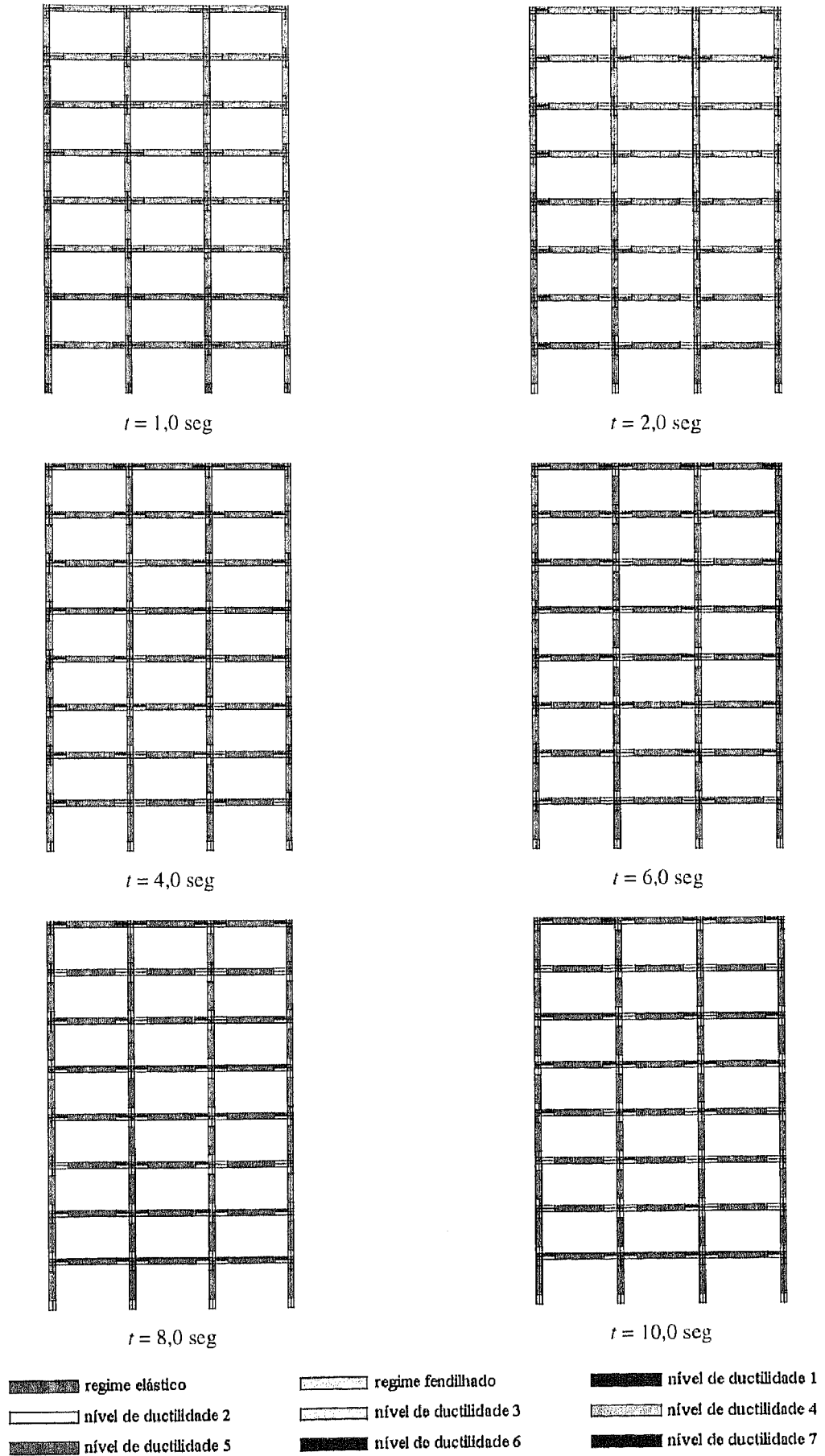
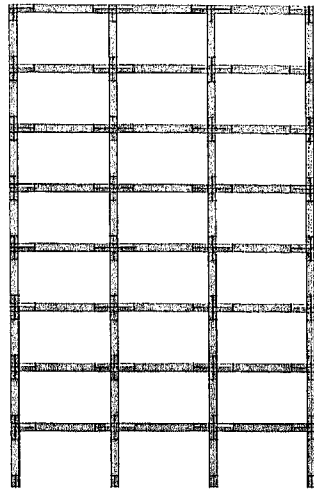
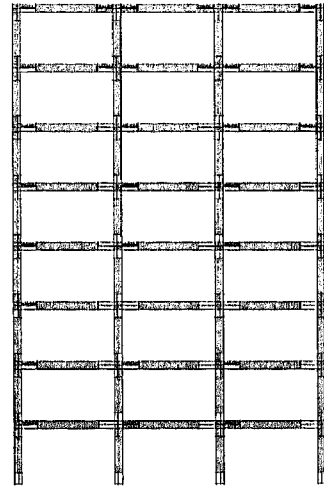


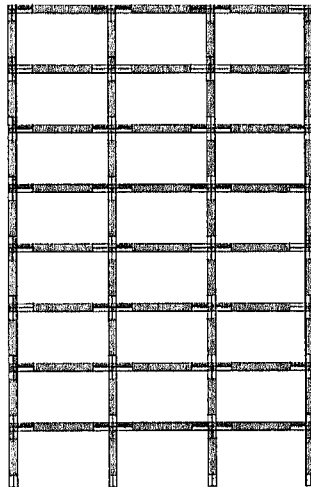
Figura 7.33 - Evolução das plastificações (3xAST1, EDY).



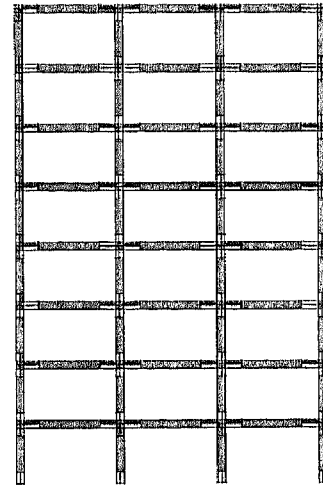
$t = 1,0 \text{ seg}$



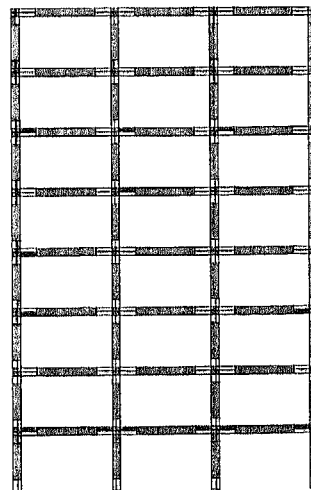
$t = 2,0 \text{ seg}$



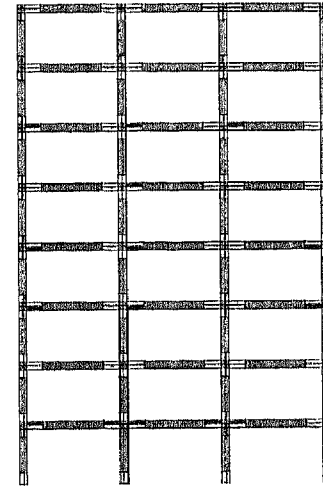
$t = 4,0 \text{ seg}$



$t = 6,0 \text{ seg}$



$t = 8,0 \text{ seg}$



$t = 10,0 \text{ seg}$

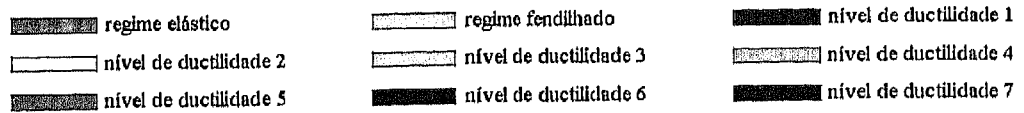
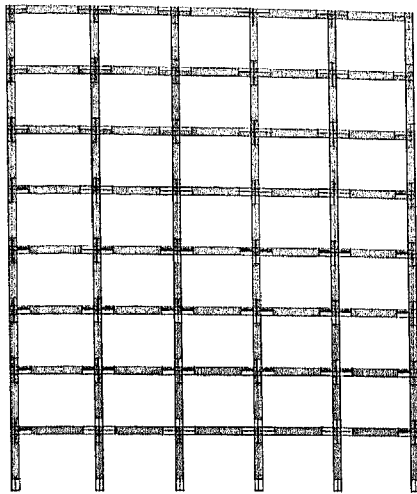
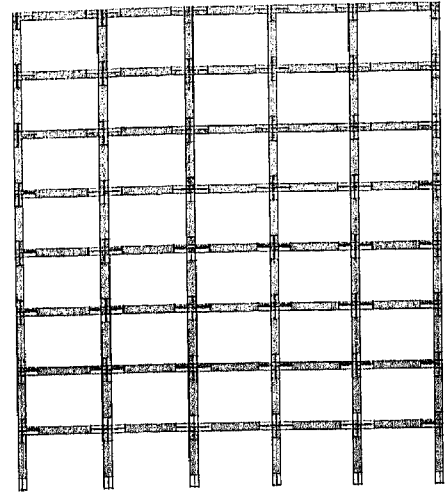


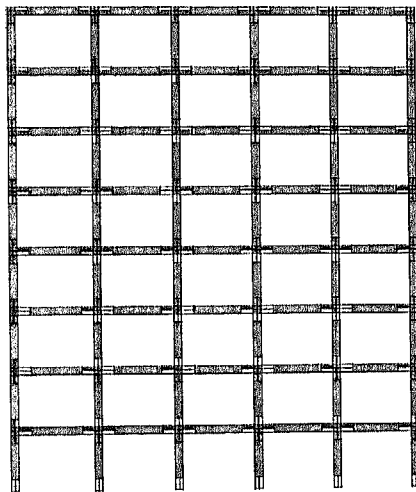
Figura 7.34 - Evolução das plastificações (4xAST1, EDY).



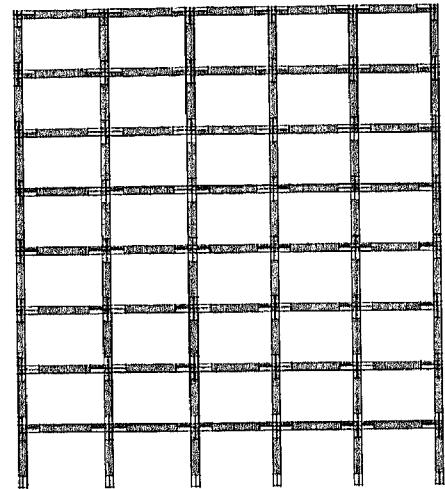
$t = 5,0$  seg



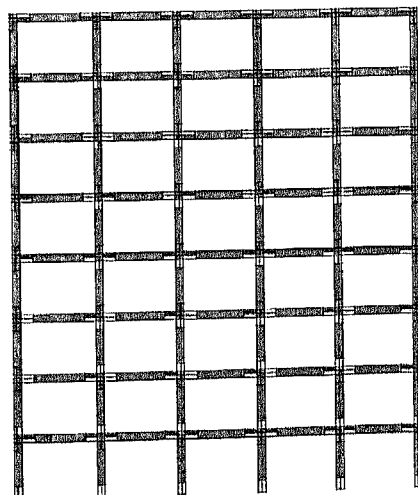
$t = 10,0$  seg



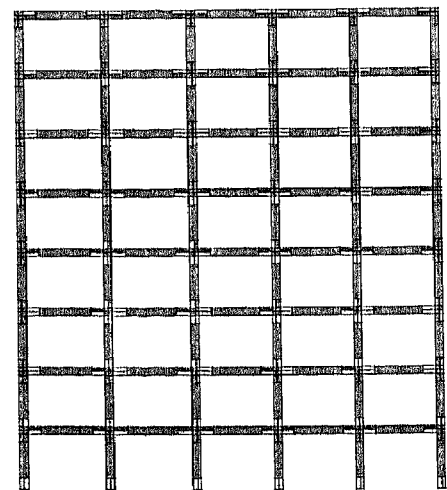
$t = 15,0$  seg



$t = 20,0$  seg



$t = 25,0$  seg



$t = 30,0$  seg

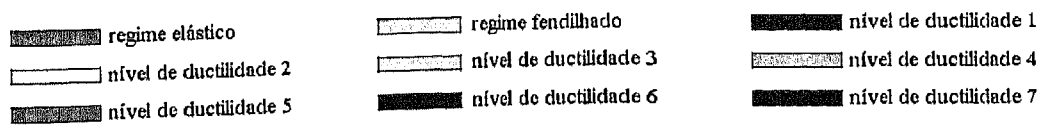


Figura 7.35 - Evolução das plastificações (AST2, EDX).

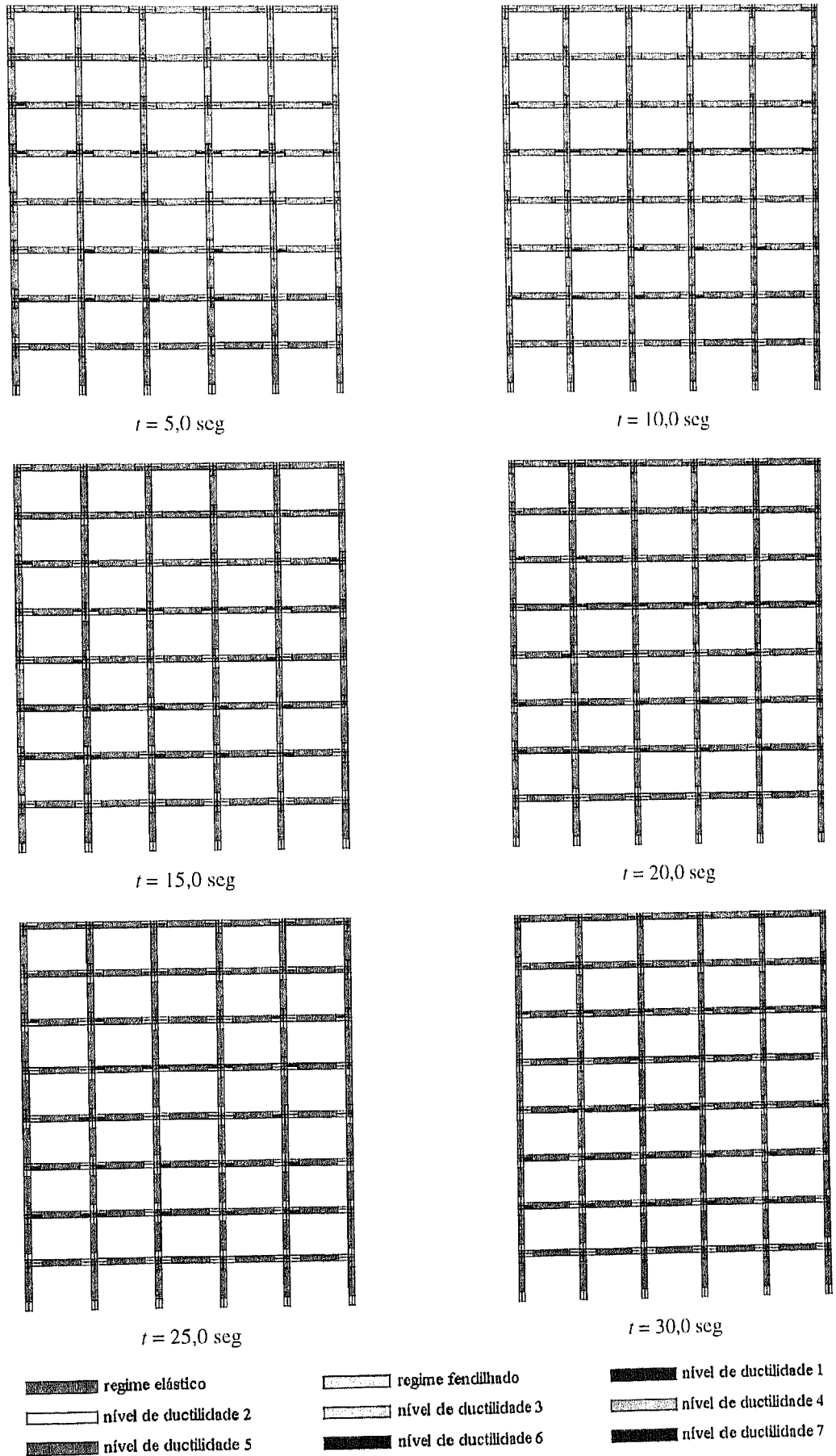
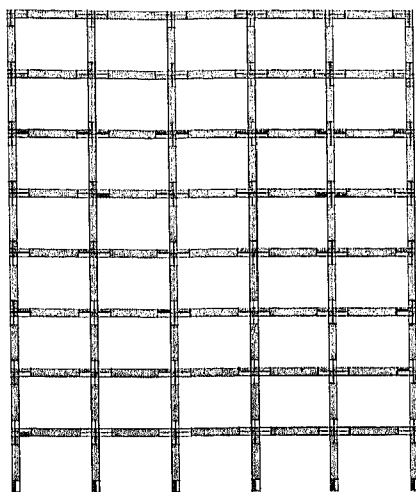
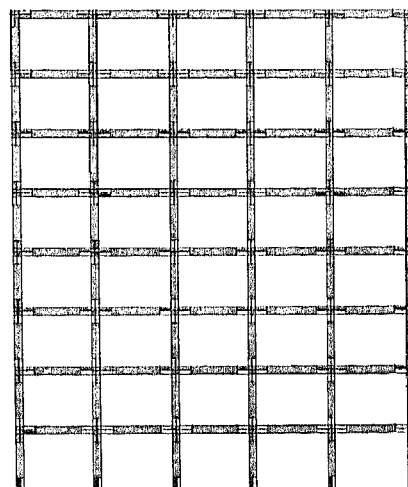


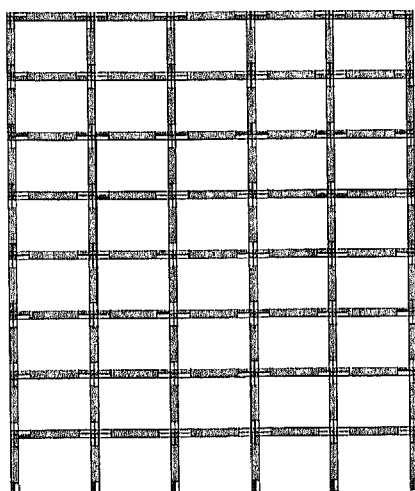
Figura 7.36 - Evolução das plastificações (2xAST2, EDX).



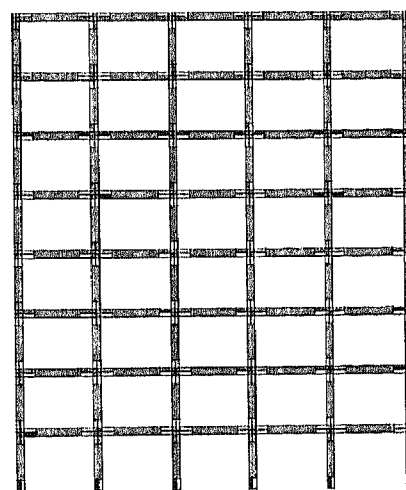
$t = 5,0 \text{ seg}$



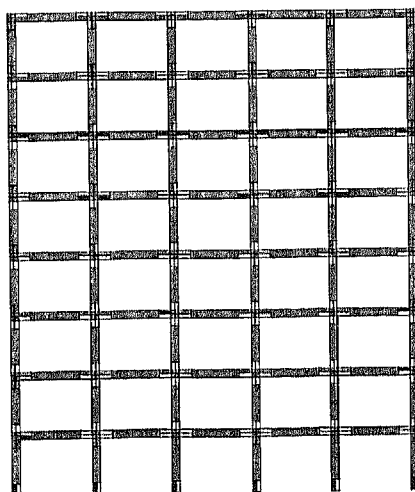
$t = 10,0 \text{ seg}$



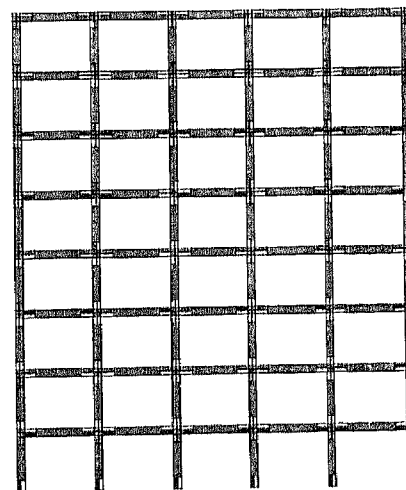
$t = 15,0 \text{ seg}$



$t = 20,0 \text{ seg}$



$t = 25,0 \text{ seg}$



$t = 30,0 \text{ seg}$

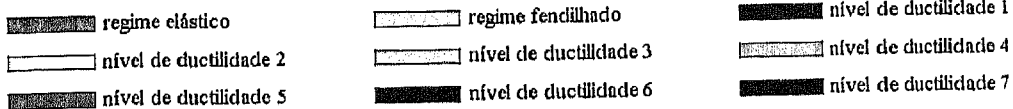


Figura 7.37 - Evolução das plastificações (3xAST2, EDX).

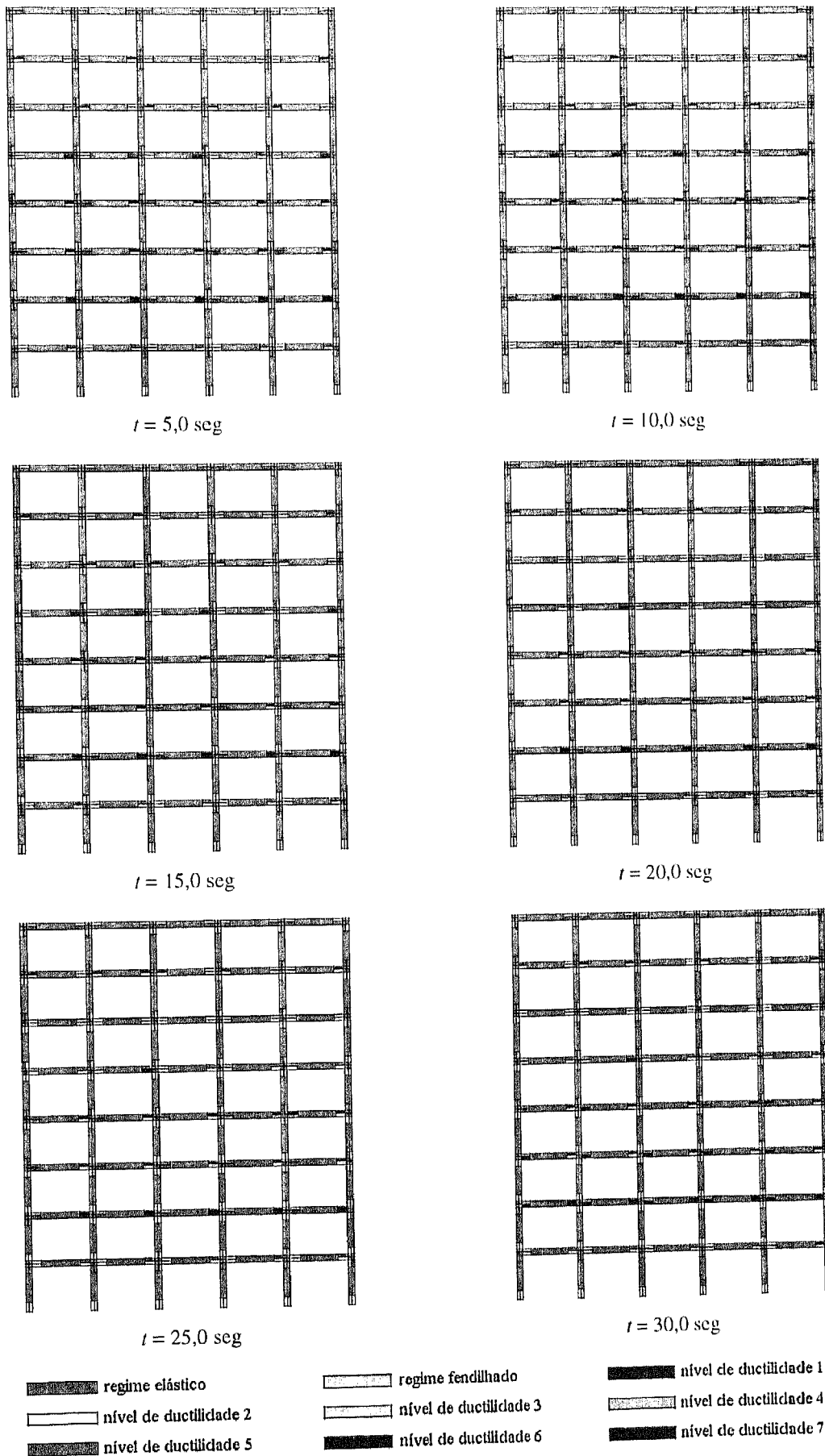
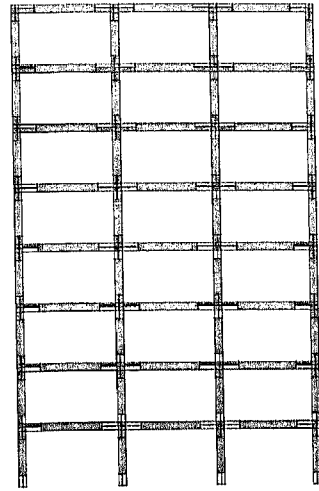
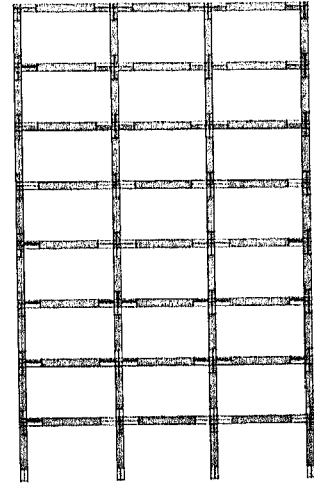


Figura 7.38 - Evolução das plastificações (4xAST2, EDX).

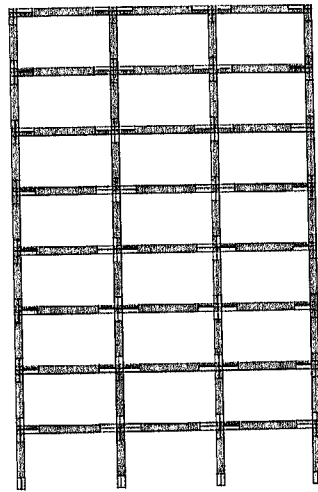




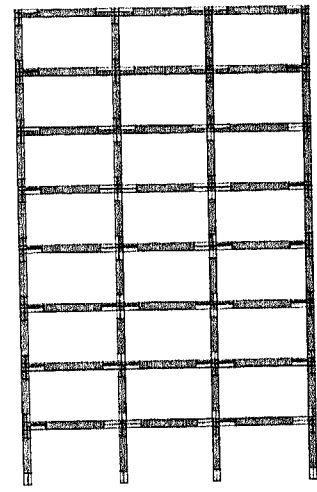
$t = 5,0$  seg



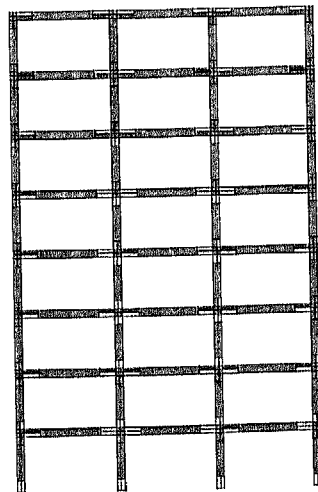
$t = 10,0$  seg



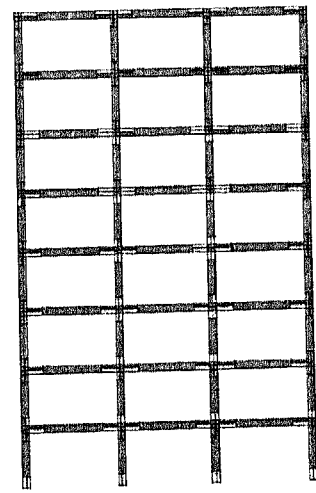
$t = 15,0$  seg






$t = 20,0$  seg






$t = 25,0$  seg



$t = 30,0$  seg

 regime elástico  
 nível de ductilidade 2  
 nível de ductilidade 5

 regime fendilhado  
 nível de ductilidade 3  
 nível de ductilidade 6




 nível de ductilidade 1  
 nível de ductilidade 4  
 nível de ductilidade 7

Figura 7.39 - Evolução das plastificações (AST2, EDY).

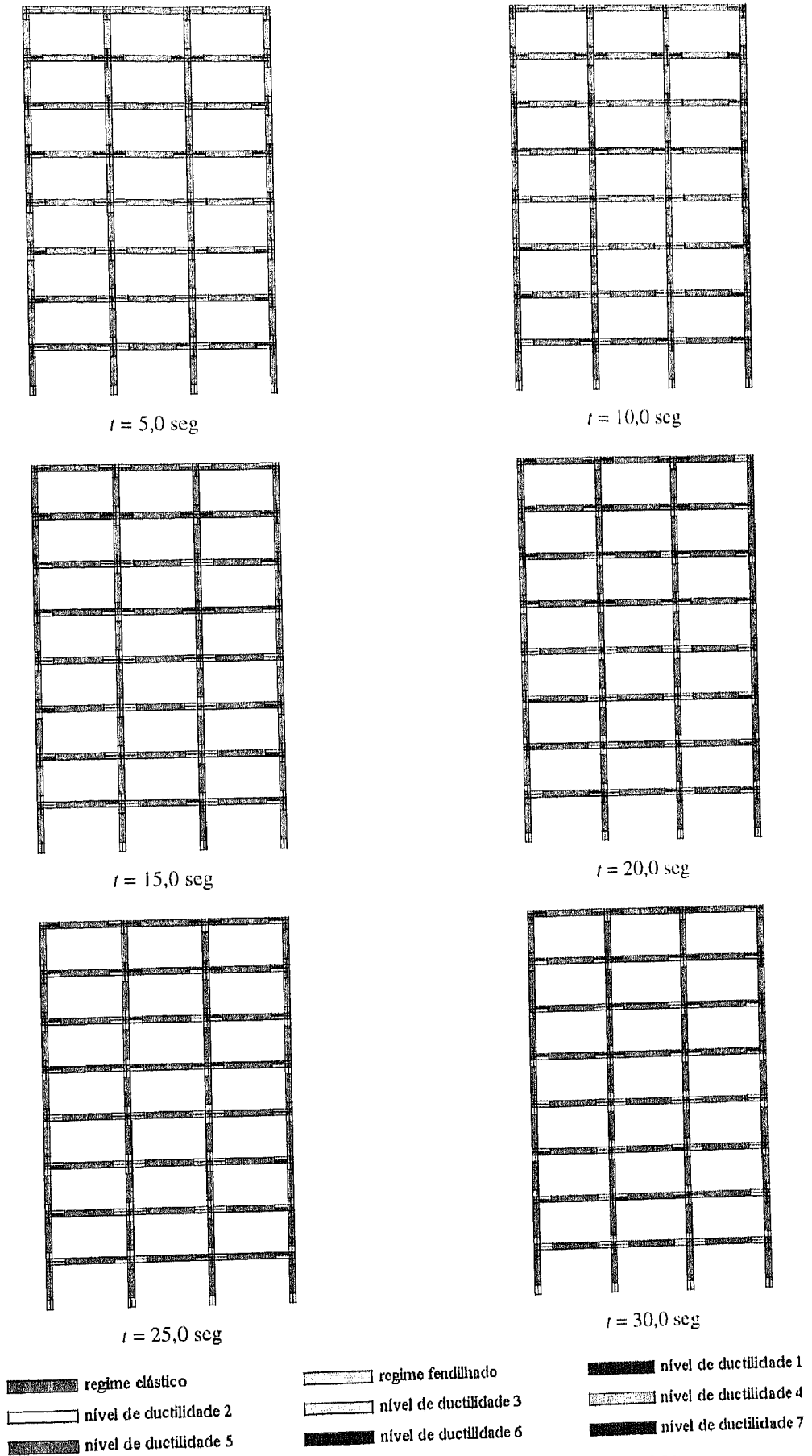


Figura 7.40 - Evolução das plastificações (2xAST2, EDY).

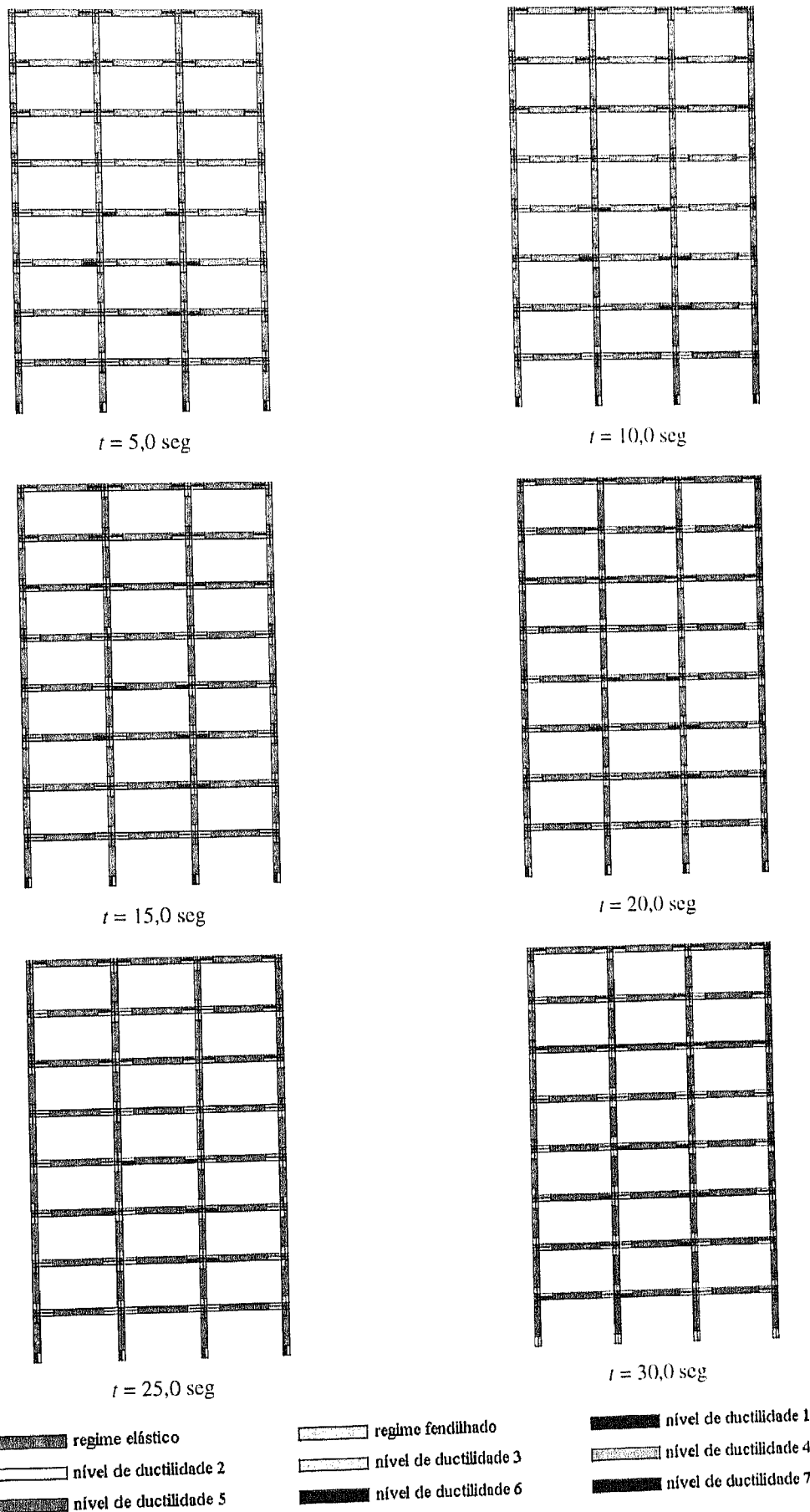
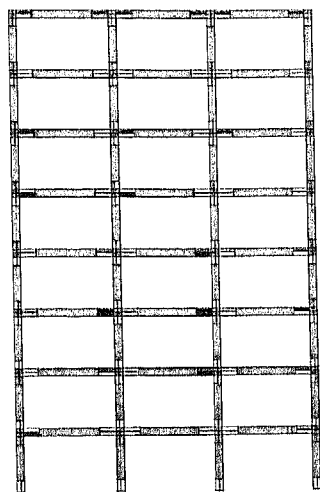
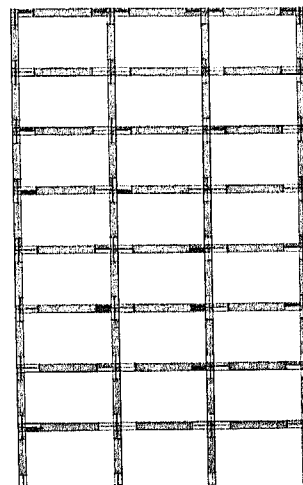


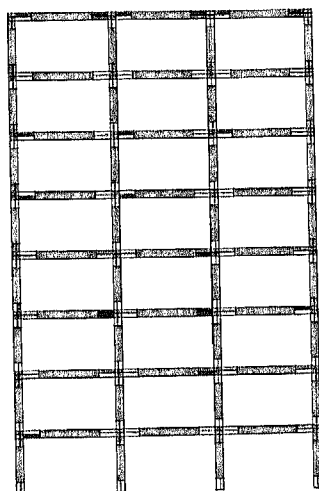
Figura 7.41 - Evolução das plastificações (3xAST2, EDY).



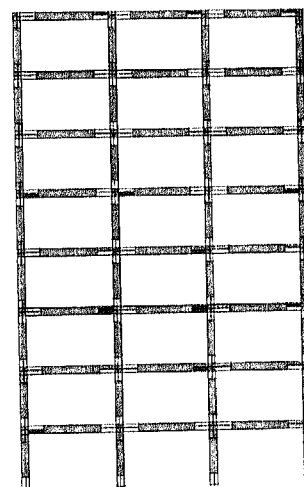
$t = 5,0$  seg



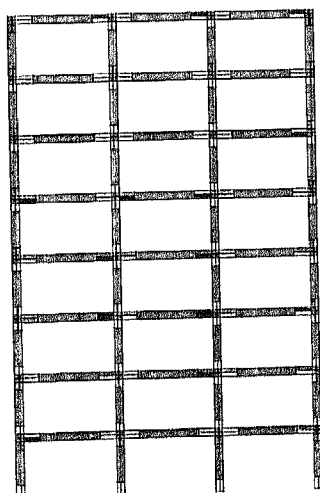
$t = 10,0$  seg



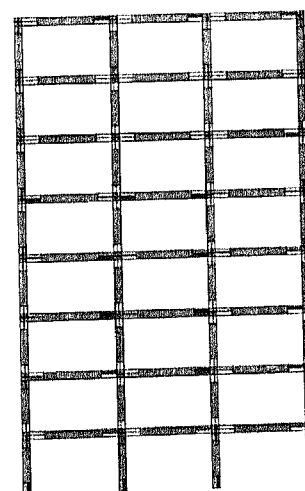
$t = 15,0$  seg



$t = 20,0$  seg



$t = 25,0$  seg



$t = 30,0$  seg

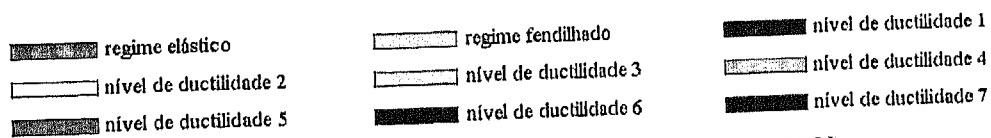


Figura 7.42 - Evolução das plastificações (4xAST2, EDY).

### 7.3.3.3 - Resposta dos elementos estruturais

Nos cálculos não-lineares efectuados foram determinados os esforços nos elementos estruturais e a sua evolução no tempo, assim como a evolução das curvaturas nas secções extremas desses elementos. Para ilustrar a resposta local ao nível dos elementos representam-se apenas os resultados para quatro secções. Com a finalidade de comparar os resultados obtidos no modelo numérico desenvolvido com os resultados com outro modelo, optou-se por ilustrar os resultados referentes às mesmas secções escolhidas por Ema Coelho [3]. Assim representa-se a resposta local das duas extremidades de uma viga extrema do segundo piso do pórtico na direcção  $Y$  e da base de dois pilares (um externo e outro interno) do pórtico na direcção  $X$ , considerando para todos os casos a série obtida pela multiplicação por 2 do acelerograma gerado para a acção sísmica tipo 1, para além das acções estáticas.

Mostra-se nas Figuras 7.43 a 7.46 os resultados nas secções atrás mencionadas no que diz respeito à história dos momentos e das curvaturas, e da evolução do diagrama momento-curvatura. Salienta-se que para a solicitação em causa as secções dos pilares entram em regime não-linear, como se pode ver nas Figuras 7.45 e 7.46.

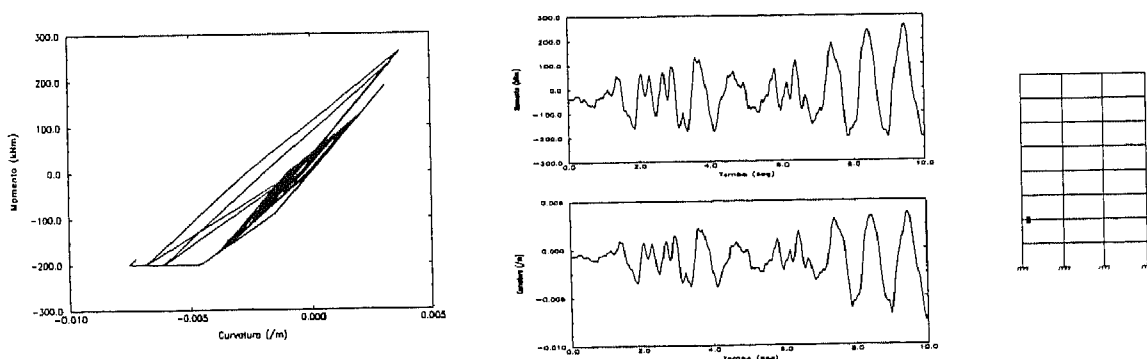


Figura 7.43 - Resposta em flexão - Direcção  $Y$  - viga (extremidade esquerda).

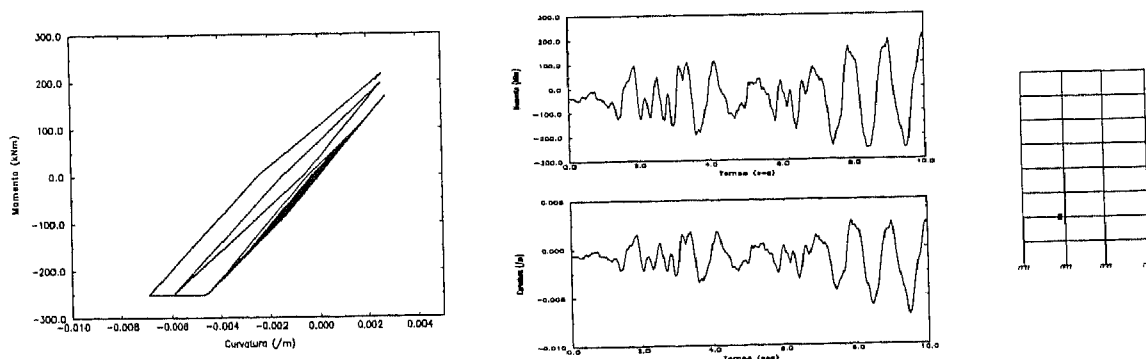


Figura 7.44 - Resposta em flexão - Direcção  $Y$  - viga (extremidade direita).

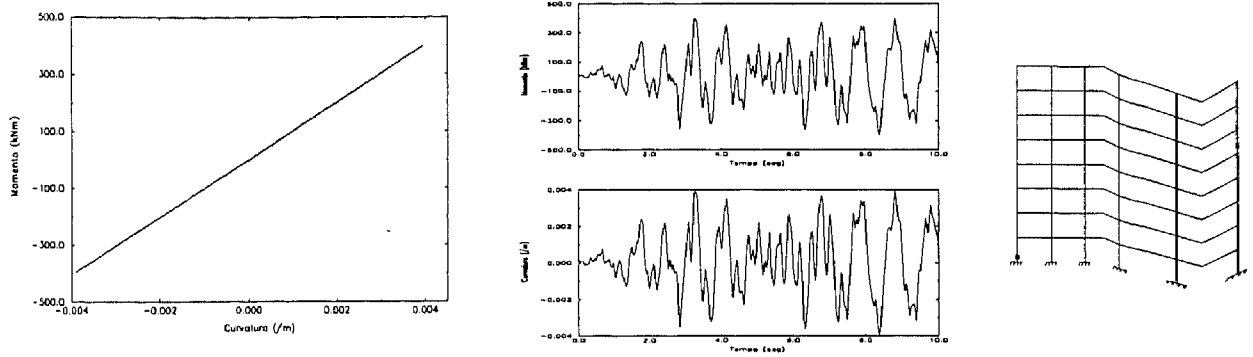


Figura 7.45 - Resposta em flexão - Direcção X - pilar extremo (extremidade inferior).

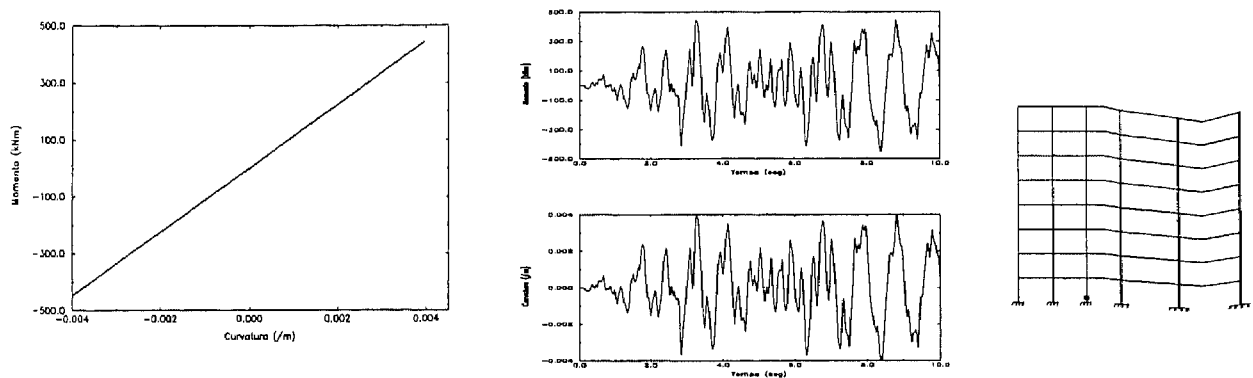


Figura 7.46 - Resposta em flexão - Direcção X - pilar intermédio (extremidade inferior).

### 7.3.4 - Análise de resultados

Nesta secção é feita a análise dos resultados obtidos nos cálculos não-lineares efectuados, e que foram apresentados na secção 7.3.3, elaborando alguns comentários a esses resultados. São feitas comparações, sempre que possível, com os resultados obtidos com o modelo desenvolvido por Ema Coelho [3].

Como tinha sido referido atrás, as estruturas foram dimensionadas de acordo com as prescrições dos Eurocódigos 2 e 8 para o nível de ductilidade mais elevado.

Em relação aos deslocamentos nos diferentes pisos verifica-se uma proporcionalidade (ver Figuras 7.22 a 7.25). E, essa característica da resposta verificou-se para os dois pórticos para todos os acelerogramas usados, sendo consistente com o que seria de esperar do comportamento de estruturas muito regulares como as estudadas [3].

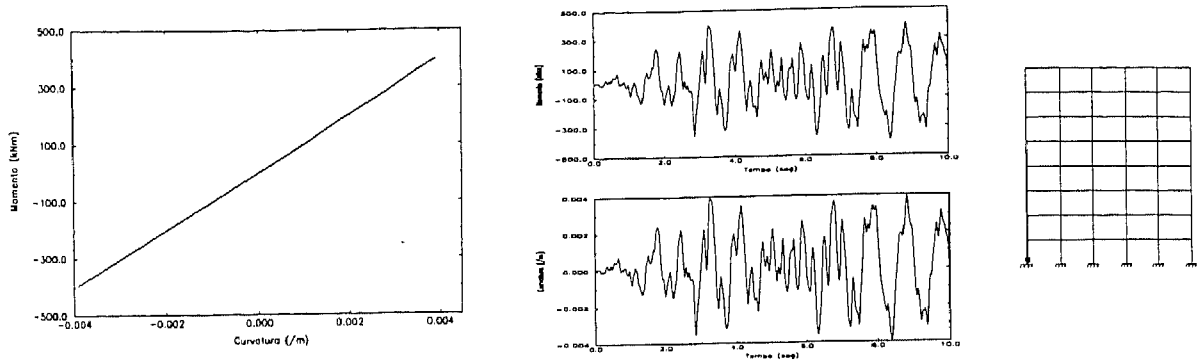


Figura 7.45 - Resposta em flexão - Direcção X - pilar extremo (extremidade inferior).

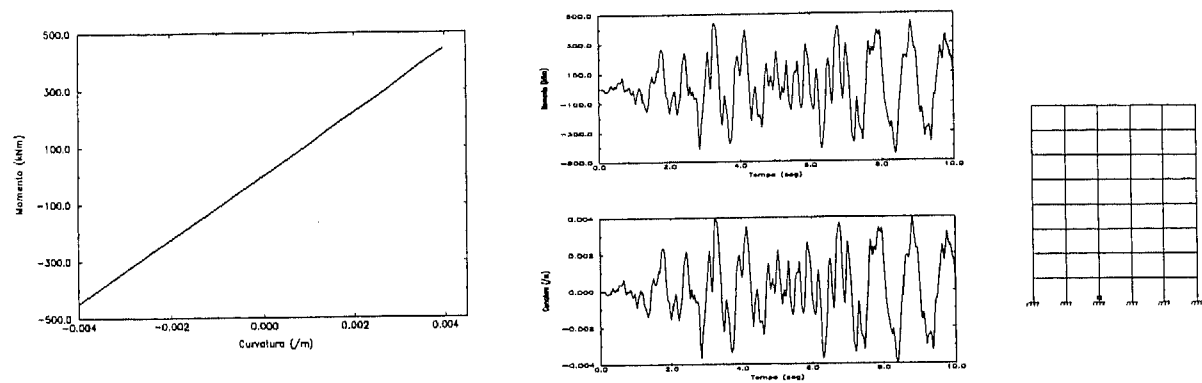


Figura 7.46 - Resposta em flexão - Direcção X - pilar intermédio (extremidade inferior).

### 7.3.4 - Análise de resultados

Nesta secção é feita a análise dos resultados obtidos nos cálculos não-linear efectuados, e que foram apresentados na secção 7.3.3, elaborando alguns comentários a esses resultados. São feitas comparações, sempre que possível, com os resultados obtidos com modelo desenvolvido por Ema Coelho [3].

Como tinha sido referido atrás, as estruturas foram dimensionadas de acordo com prescrições dos Eurocódigos 2 e 8 para o nível de ductilidade mais elevado.

Em relação aos deslocamentos nos diferentes pisos verifica-se uma proporcionalidade (ver Figuras 7.22 a 7.25). E, essa característica da resposta verificou-se para os dois pórtico para todos os acelerogramas usados, sendo consistente com o que seria de esperar comportamento de estruturas muito regulares como as estudadas [3].

Pode observar-se também, em todas as análises realizadas, que as respostas das estruturas apresentam um conteúdo em frequências mais elevadas nos pisos inferiores. E, para os pisos superiores existe uma contribuição menos importante para a resposta, em termos relativos, dos modos de vibração associados às maiores frequências.

Refere-se que os aspectos da resposta acima referidos foram também obtidos nas análises realizadas por Ema Coelho.

Nas Figuras 7.27 a 7.42 apresentou-se a distribuição e a evolução no tempo das zonas inelásticas para as duas estruturas e para todos os acelerogramas considerados. A partir da observação dos resultados podem-se retirar as seguintes conclusões:

- O comportamento não-linear concentra-se principalmente nos extremos das vigas. Embora ocorra fendilhação em alguns pilares, recorda-se que a rigidez pós-fendilhação (e até a plastificação) é sensivelmente igual à rigidez pré-fendilhação considerada, de onde decorre que praticamente não surge comportamento não linear nos pilares (como se pode ver nas Figuras 7.45 e 7.46). Este comportamento era o esperado, pois as estruturas foram dimensionadas segundo um critério que visava a exploração de ductilidade à custa apenas do comportamento não-linear das vigas [3].
- À medida que se vão majorando as séries de acelerações, como é evidente, aumentam as não-linearidades nos diferentes elementos. Fazendo uma análise global, pode dizer-se que a acção sísmica tipo 2 é mais desfavorável para os dois pórticos considerados. Pois, embora para o mesmo factor de multiplicação do acelerograma a aceleração de pico seja maior na acção sísmica tipo 1, a acção sísmica tipo 2 é caracterizada por um maior tempo de actuação.
- Para as duas estruturas analisadas verifica-se que quando sujeitas à acção sísmica tipo 1 não surgem, em qualquer elemento, não-linearidades. E, por aplicação da acção sísmica tipo 2 já surgem plastificações nalgumas vigas, mas pouco severas.
- Apenas surgem não-linearidades nos pilares, para ambos os pórticos, para a acção sísmica tipo 2 e a partir do factor de ampliação igual a três.
- Nas vigas e, em quase a totalidade dos casos, as não-linearidades surgem em primeiro lugar para os momentos negativos. E, isto deve-se ao facto de existirem momentos iniciais negativos provocados pelas cargas estáticas.
- A evolução da resposta das estruturas, em termos globais, determinada pelo modelo desenvolvido e pelo modelo de Ema Coelho, apresenta grandes semelhanças. Por exemplo, comparem-se para a estrutura na direcção *Y*, os resultados obtidos por Ema



Coelho para o acelerograma S1 (do EC8 [53]) com os obtidos para a acção sísmica tipo 1 (do RSA [52]) majorados com o factor dois. Esta opção tem como fundamento a proximidade dos valores de pico dos acelerogramas em questão, embora no caso da série S1 o tempo de actuação seja 5.0 segundos e no caso de  $2 \times \text{AST1}$  de 10.0 segundos. Por observação dos resultados obtidos com ambos os modelos pode dizer-se que, existem fortes semelhanças a nível da resposta global da estrutura e para os acelerogramas em causa, nomeadamente no que diz respeito à evolução do comportamento inelástico.

Da análise da evolução dos esforços e das curvaturas nas extremidades dos elementos estruturais podem-se salientar os seguintes aspectos:

- A ocorrência de plastificações nos elementos é visível nas histórias dos momentos flectores, como se pode ver nas Figuras 7.43 e 7.44, nas quais as excursões não-lineares estão representadas por pequenos patamares nas curvas respectivas. Assim, existem intervalos de tempo nos quais o valor do momento praticamente não varia.
- A análise dos diagramas momento-curvatura permite observar uma evolução não-simétrica do comportamento local dos elementos, e um nível relativamente baixo de deformação em relação aos valores atingidos em condições de carregamento monotónico. Apesar de se verificar reduzido desenvolvimento do comportamento não-linear dos elementos estruturais (ilustrado pelas excursões inelásticas relativamente baixas), a sua evolução é suficiente para originar uma razoável dissipação de energia por histerese. Tais resultados foram também observados por Ema Coelho [3].

### 7.3.5 - Observações finais

Salienta-se que, embora tenham sido analisadas duas estruturas e determinada a sua resposta em regime não-linear com base num número reduzido de acelerogramas (oito para cada estrutura), os resultados obtidos evidenciam características importantes do comportamento sísmico das estruturas em pórtico regulares e a sua interpretação fornece indicações para situações diferentes das consideradas, em particular na perspectiva de análise dos critérios de dimensionamento daquele tipo de estruturas. Deve no entanto referir-se que a validade de uma generalização deste tipo está limitada a aspectos essencialmente qualitativos uma vez que os resultados obtidos, em número relativamente reduzido, apenas permitem identificar determinadas características da resposta sísmica e evidenciar aspectos relativos às estratégias de dimensionamento. A abordagem quantitativa completa do problema, nomeadamente o estabelecimento de valores para os coeficientes de comportamento

regulamentares, só deverá ser efectuada recorrendo a explorações paramétricas adequadas forma a ter em conta os efeitos das variabilidades envolvidas na avaliação da resposta sísmica das estruturas e da sua fiabilidade [3].

## **Capítulo 8**

### **OBSERVAÇÕES FINAIS E ACÇÕES FUTURAS**

## *Capítulo 8*

### **OBSERVAÇÕES FINAIS E ACÇÕES FUTURAS**

O objectivo principal deste trabalho foi o desenvolvimento de um modelo numérico capaz de reproduzir o comportamento de estruturas planas em pórtico de betão armado quando sujeitas a cargas estáticas e/ou dinâmicas, considerando a não linearidade material para o comportamento em flexão dos elementos. O modelo desenvolvido é considerado de grande utilidade para o desenvolvimento de trabalhos futuros, uma vez que permite determinar a resposta estrutural de pórticos quando sujeitos a acções sísmicas. Assim, é desde já evidente que com base em estudos paramétricos adequados, que tenham em conta as variabilidades envolvidas na avaliação da resposta sísmica de estruturas, é possível ter-se um melhor conhecimento do comportamento sísmico das estruturas de betão armado. Estes estudos podem permitir o cálculo de coeficientes de comportamento a partir da teoria de segurança estrutural [1] ou usando o conceito de índice de danos [3].

Neste capítulo é feita uma síntese do trabalho elaborado, realçando-se os aspectos de maior interesse. Fazem-se ainda alguns comentários relativos aos exemplos de aplicação realizados neste trabalho. Finalmente, referem-se alguns trabalhos que poderão ser elaborados a partir do modelo desenvolvido com o objectivo de compreender melhor o comportamento de estruturas em pórtico de betão armado sujeitas a acções sísmicas.

No que se segue serão apresentados, de uma forma sucinta, os aspectos mais relevantes do trabalho desenvolvido.

O modelo hysterético implementado para reproduzir o comportamento de elementos de betão armado sujeitos a um carregamento repetido e alternado é capaz de traduzir a degradação de rigidez com a deformação, a degradação de rigidez após inversão do carregamento, a degradação de resistência e o efeito de aperto. Uma característica muito importante do modelo hysterético implementado é a capacidade de reprodução do comportamento distinto para os dois sentidos de flexão.

No modelo analítico que foi desenvolvido e implementado para a avaliação resposta sísmica de elementos de betão armado sujeitos predominantemente a flexão admite-se que as deformações inelásticas estão concentradas junto das extremidades do elemento numa determinada extensão ao longo da qual ocorrem os fenómenos de comportamento não-linear. De facto, como foi salientado, em presença de acções sísmicas intensas, o comportamento de elementos estruturais de pórticos é geralmente controlado pela sua capacidade de dissipação de energia nas rótulas plásticas e verifica-se que as zonas críticas, nas quais são excedidos os limites elásticos quando a resposta estrutural se processa em regime não-linear, se localizam normalmente nas extremidades dos elementos. Tendo em conta estes aspectos, considera-se então que em cada elemento estrutural as zonas inelásticas estão localizadas junto às extremidades e que, na porção compreendida entre essas zonas o elemento tem um comportamento elástico e linear. O modelo permite ainda considerar zonas inelásticas com comprimentos distintos nas duas extremidades do elemento. A idealização do modelo estrutural foi realizada considerando um macro-elemento de barra constituído pela associação em série de três sub-elementos. Tendo o sub-elemento central um comportamento elástico linear e estando ligado em cada uma das extremidades a um sub-elemento com comportamento não-linear. Os sub-elementos extremos servem para representar as zonas inelásticas do elemento, sendo as leis de restituição definidas pelo modelo hysterético aplicadas aos diagramas momento-curvatura das secções médias dos sub-elementos extremos, com o objectivo de reproduzir os fenómenos hysteréticos que eventualmente ocorram naquelas zonas.

O programa de cálculo automático desenvolvido é capaz de reproduzir o comportamento não linear e hysterético associado à flexão de elementos de betão armado. Salienta-se que o programa desenvolvido inclui a possibilidade de realizar análises estáticas (forças aplicadas ou deslocamentos impostos em regime repetido e alternado) e/ou dinâmicas no mesmo modelo. A análise não-linear é realizada recorrendo a um procedimento incremental, trabalhando com a rigidez actual. Para resolver as equações diferenciais de equilíbrio dinâmico implementou-se o método implícito de Newmark numa formulação incremental. Refere-se que no caso de análise de estruturas sujeitas a cargas estáticas e dinâmicas, realiza-se em primeiro lugar a análise não-linear incremental para as cargas estáticas apenas, e só após a instalação das cargas estáticas com o seu valor final é que se desenvolve a análise dinâmica.

Além do programa de análise estrutural desenvolvido, foi criado um programa de processamento, para determinação de alguns parâmetros e geração de ficheiros de dados, e outro programa de pós-processamento para tratamento de resultados e preparação de saídas gráficas.

Da aplicação do modelo desenvolvido para a reprodução de um ensaio experimental obtiveram-se resultados bastante satisfatórios, o que demonstra que o modelo analítico desenvolvido permite simular com algum rigor o comportamento de elementos de betão armado sujeitos a um carregamento cíclico e alternado. Da comparação dos resultados analíticos obtidos com os resultados experimentais [60], e com os resultados obtidos com o modelo numérico desenvolvido por Ema Coelho [3], pode dizer-se que:

- Em termos das curvas globais existe uma boa aproximação dos resultados experimentais e analíticos, nomeadamente em termos da envolvente do diagrama força-deslocamento, da evolução global da mesma, da evolução da energia total e da evolução do diagrama força horizontal-deslocamento total.
- É de salientar, que a evolução da fendilhação e plastificação ao longo do tempo numérico aproxima-se também de forma satisfatória dos resultados observados experimentalmente.

O modelo de análise estrutural foi também aplicado na determinação da resposta sísmica de duas estruturas regulares em pórtico planas de betão armado. Os pórticos estudados foram, como foi referido, dimensionados para o nível de ductilidade mais elevado de acordo com o EC2 [66] e o EC8 [53]. Apesar das estruturas terem sido dimensionadas segundo o EC8, a acção sísmica foi idealizada com base na regulamentação portuguesa [52] a partir de espectros de potência, com o objectivo de comparar os resultados obtidos com os regulamentos em causa. Foram considerados os dois tipos de acção sísmica preconizados pelo RSA e, para cada acção sísmica tipo, foram também consideradas as séries que resultam da multiplicação por 2, 3 e 4 dos acelerogramas gerados. Dos estudos realizados indicam-se seguidamente, os aspectos mais relevantes da análise dos resultados:

- O comportamento não-linear concentra-se principalmente nos extremos das vigas. Apenas surgem não-linearidades nos pilares, para ambos os pórticos, para a acção sísmica tipo 2 e a partir do factor de ampliação igual a três. Este comportamento é o esperado, pois as estruturas foram dimensionadas segundo um critério que visa a exploração de ductilidade à custa apenas do comportamento não-linear das vigas.
- O efeito de majoração das séries de acelerações traduziu-se num desenvolvimento mais marcado das não-linearidades nos diferentes elementos. Concluiu-se que a acção sísmica tipo 2 é mais desfavorável para os dois pórticos considerados. Embora para o mesmo factor de multiplicação do acelerograma a aceleração de referência seja maior na acção sísmica tipo 1, a acção sísmica tipo 2 é caracterizada por um maior tempo de actuação.

- Nas vigas e, em quase a totalidade dos casos, as não-linearidades surgem em primeiro lugar para os momentos negativos. E, isto deve-se ao facto de existirem momentos iniciais negativos provocados pelas cargas estáticas.
- A evolução da resposta das estruturas, em termos globais, determinada pelo modelo desenvolvido e pelo modelo de Ema Coelho, apresenta grandes semelhanças. Foram comparados resultados para uma estrutura e para acelerogramas com aceleração de pico próxima, concluindo-se que existem fortes semelhanças a nível da resposta global da estrutura, nomeadamente no que diz respeito à evolução do comportamento inelástico.
- Da análise dos diagramas momento-curvatura observou-se uma evolução não simétrica do comportamento local dos elementos, e um nível relativamente baixo de deformação em relação aos valores atingidos em condições de carregamento monotónico. Apesar de se verificar reduzido desenvolvimento do comportamento não-linear dos elementos estruturais (ilustrado pelas excursões inelásticas relativamente baixas), a sua evolução é suficiente para originar uma razoável dissipação de energia por histerese. Tais resultados foram também observados por Ema Coelho [3].

De acordo com o objectivo principal deste trabalho foi desenvolvido e implementado num programa de cálculo automático um modelo capaz de reproduzir a resposta sísmica em regime não-linear de estruturas em pórtico plano de betão armado. O modelo desenvolvido utiliza uma modelação da estrutura relativamente detalhada, nomeadamente no que diz respeito à discretização em elementos estruturais e definição do comportamento histerético ao nível da secção. Da análise dos resultados obtidos para os exemplos de aplicação estudados pode-se concluir que o modelo desenvolvido reproduz razoavelmente a resposta estrutural a acções sísmicas.

De entre os inúmeros trabalhos que se podem desenvolver na sequência deste destacam-se, de seguida, os de maior interesse.

Uma primeira linha de estudo poderá ser a integração do modelo num programa espacial, com a finalidade de definir de uma forma mais realista o comportamento das estruturas, por exemplo, um modelo com três graus de liberdade por piso para se poder ter em conta o efeito de torção. Num modelo deste tipo pode ser ainda contemplada a introdução de painéis de enchimento de alvenaria, uma vez que estes contribuem para a rigidez da estrutura, e a sua resistência é muito provavelmente mobilizada em presença da acção sísmica. Deste

modo, a resposta estrutural pode ser significativamente influenciada pelo comportamento das alvenarias associadas às estruturas tradicionais de betão armado [3].

Pode-se pretender simular de uma forma mais exacta as condições de apoio das estruturas, para tal, pensa-se ser de extrema utilidade a introdução no modelo desenvolvido das opções:

- Aplicação de apoios elásticos e sua influência;
- Aplicação de isoladores de base.

Referem-se ainda outras opções que podem ser implementadas:

- Influência da variação do esforço axial;
- Determinação da resposta de estruturas com irregularidades em altura. Sabendo-se ser importante para a evolução da resposta não-linear das estruturas a existência ou não de descontinuidades estruturais;
- Introdução de paredes de betão armado.

Finalmente é possível realizar aplicações sistemáticas do modelo desenvolvido para estudos paramétricos (fazendo variar o número de pisos, o número de tramos, a altura dos pisos, etc.) que permitam determinar coeficientes de comportamento e prever o estado de danificação (introdução dos índices de dano) de estruturas porticadas quando sujeitas a acções sísmicas.



## **Referências**

## REFERÊNCIAS

- 1) “Análise Sísmica de Estruturas Irregulares” - Aníbal Guimarães da Costa - Tese de Doutoramento; FEUP - [Junho de 1989]
- 2) “O Sismo de Northridge, Los Angeles, de 17 de Janeiro de 1994” - C. Oliveira; J. Azevedo; R. Delgado; A. G. Costa; A. C. Costa - Livro editado pelo Instituto da Construção do IST e da FEUP - [em elaboração]
- 3) “Comportamento Sísmico de Estruturas em Pórtico de Betão Armado - Avaliação da Resposta Não-linear Histerética” - Ema Paula de Montenegro Ferreira Coelho - Tese submetida para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil pela Universidade Técnica de Lisboa no âmbito do protocolo de cooperação entre o IST e o LNEC - Lisboa - [1992]
- 4) “Ultimate Load Analysis of Anisotropic and Reinforced Concrete Plates and Shells” - J. Figueiras - Thesis; Swansea - [1983]
- 5) “Reinforced Concrete Response to Simulated Earthquakes” - T. Takeda; M. A. Sozen; N. N. Nielsen - Journal Structural Division; ASCE; Vol. 36; nº ST12 - [1970]
- 6) “Modelo Histerético das Relações Forças-Deslocamentos adequado à Análise Sísmica de Estruturas” - Aníbal G. Costa; A. Campos Costa - Departamento de Estruturas; Núcleo de Dinâmica Aplicada - Relatório integrado nos estudos do domínio do Plano de Investimentos e Despesas de Desenvolvimento da Administração Central (PIDDAC) - Lisboa - [Maio de 1987]
- 7) “Earthquake Resistant Design” - D. J. Dowrick - John Wiley & Sons - [1987]
- 8) “Concrete in Compression” - V. Ciampi; P. E. Pinto; G. Via - CEB; Bulletin d'Information nº 210; Vienne - [1991]

- 9) “Plasticity in Reinforced Concrete” - W. F. Chen - McGraw-Hill Book Company; New York - [1982]
- 10) “Effects of Bond Deterioration on Hysteretic Behavior of Reinforced Concrete Joints” - F. C. Filippou; E. P. Popov; V. V. Bertero - Earthquake Engineering Research Center; Report n° EERC 83-19; University of California; Berkeley - [1983]
- 11) “Comportamento de Elementos de Betão Armado sujeitos a Acções Repetidas e Alternadas” - V. Monteiro; E. C. Carvalho - Curso sobre Estruturas de Betão Armado sujeitas à Acção dos Sismos; LNEC; Lisboa - [1985]
- 12) “Seismic Behavior of Ductile Moment-Resisting Reinforced Concrete Frames” - V. V. Bertero; E. P. Popov - Reinforced Concrete Structures in Seismic Zones; ACI Publication; SP53; Detroit - [1977]
- 13) “Dynamics of Structures” - R. W. Clough; J. Penzien - Mc Graw-Hill - [1982]
- 14) “Acção dos Sismos” - Raimundo Delgado; Aníbal Costa - Curso Sobre a Nova Regulamentação de Estruturas; Capítulo VII do RSA - [1986] - FEUP
- 15) “Métodos de Análise” - R. T. Duarte; A. V. Azevedo - Curso sobre Estruturas de Betão Armado Sujeitas à Acção dos Sismos; LNEC; Lisboa - [1985]
- 16) “Modelos Estruturais” - R. T. Duarte; E. C. Carvalho - Curso sobre Estruturas de Betão Armado Sujeitas à Acção dos Sismos; LNEC; Lisboa - [1985]
- 17) “Methodology for the Dynamic Analysis of Building Structures” - A. Ravara; R. T. Duarte; E. C. Carvalho - 8<sup>th</sup> WCEE; San Francisco - [1984]
- 18) “The Finite Element Method in Engineering Science” - O. C. Zienkiewicz - McGraw-Hill; London - [1971]
- 19) “Betão Armado - Armaduras: Caracterização, Fabrico, Colocação e Pormenorização” - J. Arga e Lima - Vol. 1; LNEC; Lisboa - [1988]
- 20) “Principles of Earthquake Resistant Design” - J. Ferry Borges - Proceedings 6<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering; New Delhi - [1976]
- 21) “Recent Advances in Earthquake-Resistant Design - Course Notes on Reinforced Concrete Buildings” - J. P. Moehle - Course on Recent Advances in Earthquake-Resistant Design; University of California; Berkeley - [1987]

- 22) “Implications of Recent Earthquakes and Research on Earthquake-Resistant Design and Construction of Buildings” - V. V. Bertero - Report n° UCB/EERC-86/03; University of California; Berkeley - [1986]
- 23) “Lessons Learned from Recent Earthquakes and Research Implications for Earthquake-Resistant Design of Building Structures in United States” - V. V. Bertero - Earthquake Spectra; Vol. 2; n° 4; EERI; Berkeley - [1986]
- 24) “Observations from Recent Earthquakes Regarding the Design of Buildings” - S. A. Mahin - Course on Recent Advances in Earthquake-Resistant Design; University of California; Berkeley - [1987]
- 25) “Reinforced Concrete Hysteresis Model Based on the Damage Concept” - M. L. Wang; S. P. Shah - Earthquake Engineering and Structural Dynamics; Vol. 15 - [1987]
- 26) “Inelastic Earthquake Response of Tall Buildings” - R. W. Clough; K. L. Benuska; E. L. Wilson - Proceedings 3<sup>rd</sup> World Conference on Earthquake Engineering; New Zealand; Vol. 11 - [1965]
- 27) “A General Purpose Computer Program for Dynamic Analysis of Inelastic Plane Structures” - A. E. Kannan; G. H. Powell - EERC Reports N° 73/06; 73/22; University of California; Berkeley - [1975]
- 28) “Seismic Behavior of Multistory Frames by Different Philosophies” - J. C. Anderson; V. V. Bertero - EERC Report n° 69/11; University of California; Berkeley - [1969]
- 29) “Infilled Frames in Earthquake-Resistant Construction” - R. E. Klingner; V. V. Bertero - EERC Report N° 76/32; University of California; Berkeley - [1976]
- 30) “Influence of Analysis and Design Assumptions on Computed Inelastic Response of Moderately Tall Frames” - G. H. Powell; D. G. Row - EERC Report n° 76/11; University of California; Berkeley - [1976]
- 31) “Simple Nonlinear Models for the Seismic Response of Reinforced Concrete Buildings” - H. Aoyama - Proceedings of the Review Meeting of the US-Japan Cooperative Research Program in Earthquake Engineering; Honolulu; Hawaii - [1975]
- 32) “Two Nonlinear Beams with Definition of Ductility” - M. F. Giberson - ASCE Journal of the Structural Division; Vol. 95; n° ST2 - [1967]
- 33) “Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Frames” - F. C. Filippou; A. Issa - Report n° UCB/EERC-88/12; University of California; Berkeley - [1988]

- 34) “Inelastic Beams for Seismic Analysis of Structures” - S. A. Anagnostopoulos - ASCE Journal of the Structural Division; Vol. 107; ST7 - [1981]
- 35) “Dynamic Collapse Tests of Reinforced Concrete Frame Structures with a Column Subjected to High Compression Stress” - H. Eto; T. Takeda - Proceedings of the 7<sup>th</sup> WCEE; Istanbul - [1980]
- 36) “Analytical Modeling of Hysteretic of R/C Frames” - Magdy S. L. Roufaiel; Christian Meyer (ASCE members) - Journal of Structural Engineering; Vol. 113; n° 3 - [1987]
- 37) “Reinforced Concrete Hysteresis Model Based on the Damage Concept” - M. L. Wang; S. P. Shah - Earthquake Engineering and Structural Dynamics; Vol. 15 - [1987]
- 38) “Comportamento Sísmico de Pontes com Pilares de Betão Armado - Verificação da Segurança” - Carlos Trancoso Vaz - Lisboa - [1993]
- 39) “A Predictive Model for Hysteretic Failure Parameters” - William C. Stone; Andrew W. Taylor - National Institute of Standards and Technology; Gaithersburg; Maryland; Md.; USA - Earthquake Engineering; Tenth World Conference; Madrid - [July 1992]
- 40) “Reinforced Concrete Structures” - R. Park; T. Paulay - John Willey & Sons - [1975]
- 41) “Reinforced Concrete Members with Cyclic Loading” - R. Park; D. C. Kent; R. A. Sampson - Journal of the Structural Division; ASCE; Vol. 98; n° ST7 - [July 1972]
- 42) “Strength and Ductility of Bridge Substructures” - M. J. N. Priestley; R. Park - Research Report n° 84-20; University of Canterbury; Christchurch; New Zealand - [1984]
- 43) “Reinforced Concrete Bridge Piers under Seismic Loading” - B. E. Davey; R. Park - Research Report n° 75-3; University of Canterbury; Christchurch; New Zealand - [1975]
- 44) “Seismic Behavior of Circular Reinforced Concrete Bridge Piers” - K. H. NG; M. J. N. Priestley; R. Park - Research Report N° 78-14; University of Canterbury; Christchurch; New Zealand - [1978]
- 45) “Ductility of Rectangular Reinforced Concrete Columns with Axial Load” - W. D. Gill; R. Park; M. J. N. Priestley - Research Report n° 79-1; University of Canterbury; Christchurch; New Zealand - [1979]
- 46) “Ductility of Spirally Reinforced Concrete Columns under Seismic Loading” - R. T. Potangaroa; M. J. N. Priestley; R. Park - Research Report n° 79-8; University of Canterbury; Christchurch; New Zealand - [1979]

- 47) “Ductibilidade de Elementos de Betão Armado sujeitos a Acções Cíclicas. Influência das Características Mecânicas das Armaduras” - Manuel José de Andrade Loureiro Pipa - Tese de doutoramento - Lisboa - [1993]
- 48) “Analytical Prediction of the Collapse Earthquake for R/C Buildings: Suggested Methodology” - Andreas J. Kappos - Department of Civil Engineering; Aristotle University of Thessaloniki; Greece - Earthquake Engineering and Structural Dynamics; Vol. 20
- 49) “Pordin - Programa de Análise Dinâmica” - Trabalho desenvolvido no âmbito do Seminário de Estruturas do Curso de Engenharia Civil - Humberto S. A. Varum e Marco A. C. L. Baptista - FEUP - [1992]
- 50) “Finite Element Procedures in Engineering Analysis” - K. J. Bathé - Prentice-Hall; Englewood Cliffs; New Jersey - [1982]
- 51) “Avaliação do Comportamento Sísmico de Barragens de Betão através de um Modelo de Dano Contínuo” - Rui Manuel Carvalho Marques de Faria - Dissertação apresentada à FEUP para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil - [Outubro 1994]
- 52) Regulamento de Segurança e Acções para Estruturas de Edifícios e Pontes - Aprovado pelo Dec.-Lei nº 235/83, de 31 de Maio (rectificado no suplemento ao DR, 1ª Série, de 31 de Agosto de 1983)
- 53) Eurocódigo nº 8 - Structures in Seismic Regions - Design - Part1: General and Building - [Redraft March 1993]
- 54) “O Método dos Elementos Finitos na Análise Dinâmica de Barragens incluindo a interacção Sólido-Líquido” - Raimundo Moreno Delgado - Dissertação para Doutoramento em Engenharia Civil; FEUP - [Outubro 1984]
- 55) “Structural Dynamics - Theory and Computation” - Mário Paz - Van Nostrand Reinhold; New York - 3<sup>rd</sup> Edition
- 56) “Numerical Methods in Finite Element Analysis” - K. J. Bathe; E. L. Wilson - Prentice-Hall, Inc.; New Jersey - [1976]
- 57) “Manual de Utilização dos Programas GRAPH2D 2.6 e DRAWMESH 2.6” - Álvaro F. M. Azevedo - FEUP; Departamento de Engenharia Civil; Estruturas - [Setembro 1992]
- 58) “An Introduction to Finite Element Computations” - E. Hinton; D. R. J. Owen - Pineridge Press; Swansea - [1979]

- 59) “Comportamento sob Acções Horizontais de Pórticos de Betão Armado preenchidos com Paredes de Alvenaria de Tijolos Cerâmicos” - Felicita Pires; E. Cansado Carvalho - 2<sup>as</sup> Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas; Tema B (Tecnologias e Realizações); Lisboa; LNEC - [20-23 Novembro 1990]
- 60) “Influência das Paredes de Alvenaria no Comportamento de Estruturas Reticuladas de Betão Armado Sujeitas a Acções Horizontais” - Felicita Maria Guerreiro Pires - Dissertação apresentada a concurso para obtenção do grau de Especialista e acesso à categoria de Investigador Auxiliar do LNEC; Lisboa - [Julho de 1990]
- 61) Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado - Aprovado pelo Dec. Lei n° 349-C/83, de 30 de Julho (rectificado no suplemento ao DR, 1<sup>a</sup> Série, de 29 de Setembro de 1984)
- 62) “Comportamento Histerético de Pórticos de Betão Armado Preenchidos com Paredes de Alvenaria de Tijolo” - Felicita Pires; Alfredo Campos Costa; Sónia Raposo - 2<sup>o</sup> Encontro sobre Sismologia e Engenharia Sísmica; Tema 3 (Análise e Dimensionamento Sísmico); FEUP - [21-23 Junho 1994]
- 63) “Análise Não Linear de Estruturas sujeitas a Acções Dinâmicas” - Apontamentos do Curso de Mestrado [1987/88] - Aníbal Costa
- 64) “Damage Prediction in Reinforced Concrete Frames under Seismic Actions” - I. F. Meyer; W. B. Krätzig; F. Stangenberg; K. Meskouris.
- 65) “Cooperative Research Program on the Seismic Response of Reinforced Concrete Structures” - E. C. Carvalho - Contract 3919-90-02, JRC; ISPRA - [1991]
- 66) Eurocódigo n° 2 - Projecto de Estruturas de Betão - Parte 1 - [Dezembro 1991]
- 67) “Geração de Séries Estacionárias e Não Estacionárias” - R. T. Duarte; A. Campos Costa - Relatório LNEC - [1987]
- 68) “Apontamentos da Disciplina de Cálculo Automático em Estruturas” - Licenciatura em Engenharia Civil; FEUP - Manuel de Azeredo - [Novembro 1986]

## **Anexos**



## Anexo I

### DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ E DO VECTOR DAS FORÇAS DO MACRO-ELEMENTO

Admita-se um macro-elemento estrutural de barra definido pela associação de três elementos com características mecânicas diferentes como se representa na Figura AI.1:

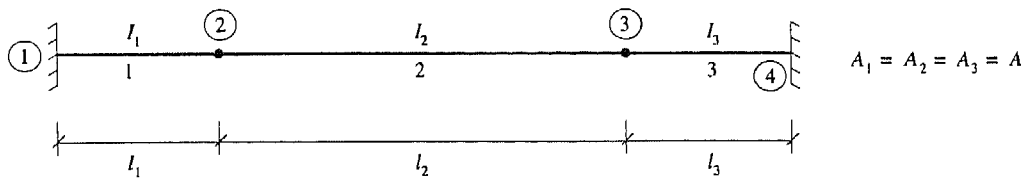


Figura AI.1 - Macro-elemento definido pela associação de três subelementos.

A matriz de rigidez de um subelemento  $i$  (no referencial local) é definida como se segue:

$$[K]_i = \begin{bmatrix} \frac{4EI_i}{l_i} & -\frac{6EI_i}{l_i^2} & 0 & \frac{2EI_i}{l_i} & \frac{6EI_i}{l_i^2} & 0 \\ & \frac{12EI_i}{l_i^3} & 0 & -\frac{6EI_i}{l_i^2} & -\frac{12EI_i}{l_i^3} & 0 \\ & & \frac{EA_i}{l_i} & 0 & 0 & -\frac{EA_i}{l_i} \\ & & & \frac{4EI_i}{l_i} & \frac{6EI_i}{l_i^2} & 0 \\ & & & & \frac{12EI_i}{l_i^3} & 0 \\ & & & & & \frac{EA_i}{l_i} \end{bmatrix} \quad (\text{AI.1})$$

[simétrica]

ou simplesmente:

$$[K]_i = \begin{bmatrix} K_i^{ee} & K_i^{ed} \\ K_i^{de} & K_i^{dd} \end{bmatrix} \quad (\text{AI.2})$$

A matriz de rigidez completa da barra obtém-se por espalhamento da contribuição de cada subelemento  $i$  como se expressa de seguida:

$$[K] = \begin{array}{cccc} \text{nó 1} & \text{nó 2} & \text{nó 3} & \text{nó 4} \\ \left[ \begin{array}{cccc} K_1^{ee} & K_1^{ed} & & \\ K_1^{de} & K_1^{dd} + K_2^{ee} & K_2^{ed} & \\ & K_2^{de} & K_2^{dd} + K_3^{ee} & K_3^{ed} \\ & & K_3^{de} & K_3^{dd} \end{array} \right] & \begin{array}{l} \text{nó 1} \\ \text{nó 2} \\ \text{nó 3} \\ \text{nó 4} \end{array} \end{array} \quad (\text{AI.3})$$

Pretende-se efectuar a condensação aos graus de liberdade dos nós extremos do macro-elemento (nós 1 e 4 - Figura AI.1), isto é, pretende-se exprimir a matriz de rigidez e o vector de solicitação apenas aos referidos nós de extremidade [68].

Comece-se por arranjar a matriz de rigidez e o vector de solicitação (por troca de linhas e colunas) de forma a separar as direcções a explicitar (de ligação do macro-elemento ao exterior) das restantes direcções (nós intermédios - nós 2 e 3 - Figura AI.1). Por razões de simplificação da exposição, chamemos direcção genérica  $a$  às direcções a explicitar e direcção  $b$  às restantes direcções, conforme se apresenta na Figura AI.2 para o nosso caso:



Figura AI.2 - Direcções a explicitar.

Assim obtém-se a matriz de rigidez ordenada:

$$[K] = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{nó1} & \text{nó4} & \text{nó2} & \text{nó3} \end{matrix} \\ \begin{matrix} K_1^{ee} \\ \\ K_1^{de} \\ \\ \end{matrix} & & & & \begin{matrix} \text{nó1} \\ \text{nó4} \\ \text{nó2} \\ \text{nó3} \end{matrix} \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{matrix} \quad (A1.4)$$

e o vector das forças:

$$\{f\} = \begin{matrix} \left. \begin{matrix} f_1 \\ f_4 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{nó1} \\ \text{nó4} \\ \text{nó2} \\ \text{nó3} \end{matrix} \end{matrix} \quad (A1.5)$$

ou, simplificadamente:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \quad (A1.6)$$

e:

$$\{f\} = \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \end{bmatrix} \quad (A1.7)$$

Das equações de equilíbrio, tem-se:

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \end{bmatrix} \quad (A1.8)$$

ou:

$$\begin{cases} K_{aa} \cdot \delta_a + K_{ab} \cdot \delta_b = f_a \\ K_{ba} \cdot \delta_a + K_{bb} \cdot \delta_b = f_b \end{cases} \quad (\text{AI.9})$$

da segunda equação da expressão AI.9, tira-se que:

$$\delta_b = K_{bb}^{-1} \times (f_b - K_{ba} \cdot \delta_a) \quad (\text{AI.10})$$

que substituindo na primeira equação do mesmo sistema virá:

$$(K_{aa} - K_{ab} \cdot K_{bb}^{-1} \cdot K_{ba}) \cdot \delta_a = f_a - K_{ab} \cdot K_{bb}^{-1} \cdot f_b \quad (\text{AI.11})$$

ou sinteticamente:

$$K'_{aa} \cdot \delta_a = f'_a \quad (\text{AI.12})$$

A matriz de rigidez do macro-elemento foi assim "condensada" para os nós de extremidade (nós  $a$ ) e traduz completamente o seu funcionamento e o mesmo para o vector de solicitação [68].

Assim, com simples operações matriciais é determinada no modelo numérico a matriz de rigidez e o vector das forças do macro-elemento condensada aos graus de liberdade de extremidade.

## Anexo II

### DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DEFINIDORES DA MATRIZ DE AMORTECIMENTO DE RAYLEIGH

Rayleigh estabelece que a matriz de amortecimento material pode ser definida a partir das matrizes de rigidez e de massa como se apresenta na expressão AII.1:

$$[C] = \alpha \cdot [M] + \beta \cdot [K] \quad (\text{AII.1})$$

em que os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  podem ser estabelecidos de forma a garantir coeficientes de amortecimento  $\xi_1$  e  $\xi_2$  em dois modos de vibração distintos, caracterizados por frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$ .

Da aplicação dos conceitos da análise modal a dois modos de vibração distintos decorre o sistema de equações:

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1} & \omega_1 \\ \frac{1}{\omega_2} & \omega_2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \quad (\text{AII.2})$$

com o qual se podem determinar os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , como se demonstra a seguir:

$$2 \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_2 & \omega_1^2 \cdot \omega_2 \\ \omega_1 & \omega_1 \cdot \omega_2^2 \end{bmatrix}}_{\text{matriz [A]}} \times \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \quad (\text{AII.3})$$

Inversão da matriz [A]:

$$[[A] \mid [I]]$$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} \omega_2 & \omega_1^2 \cdot \omega_2 & 1 & 0 \\ \omega_1 & \omega_1 \cdot \omega_2^2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} \omega_2 & \omega_1^2 \cdot \omega_2 & 1 & 0 \\ 0 & \omega_1 \cdot (\omega_2^2 - \omega_1^2) & -\frac{\omega_1}{\omega_2} & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} \omega_2 & \omega_1^2 \cdot \omega_2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\omega_2 \cdot (\omega_2^2 - \omega_1^2)} & \frac{1}{\omega_1 \cdot (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} \omega_2 & 0 & 1 + \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} & -\frac{\omega_1 \cdot \omega_2}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\omega_2 \cdot (\omega_2^2 - \omega_1^2)} & \frac{1}{\omega_1 \cdot (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{\omega_2} \left( 1 + \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \right) & -\frac{\omega_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\omega_2 \cdot (\omega_2^2 - \omega_1^2)} & \frac{1}{\omega_1 \cdot (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \end{array} \right]$$

$$[[I] \mid [A]^{-1}]$$

$$\therefore [A]^{-1} = \frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \times \begin{bmatrix} \omega_2 & -\omega_1 \\ -\frac{1}{\omega_2} & \frac{1}{\omega_1} \end{bmatrix}$$

(AII.4)

Virá então para o valor do parâmetro  $\alpha$  e  $\beta$ :

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = 2 \cdot \frac{\omega_1 \cdot \omega_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \times \begin{bmatrix} \omega_2 & -\omega_1 \\ -\frac{1}{\omega_2} & \frac{1}{\omega_1} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{AII.5})$$

como é apresentado por R. W. Clough [13].

Estas expressões foram implementadas num módulo do programa de pré-processamento (*PREANL*), como foi visto no Capítulo 6, ilustrando-se seguidamente a sua aplicação a um exemplo apresentado por Rui Faria [51].

Assim, com o objectivo de assegurar coeficientes de amortecimento  $\xi_1 = \xi_2 = 5\%$  nas frequências  $f_1 = 1$  Hz e  $f_2 = 5$  Hz, obtiveram-se os valores de  $\alpha$  e  $\beta$ :

$$\begin{cases} \alpha = 0,52360 \\ \beta = 0,00265 \end{cases} \quad (\text{AII.6})$$

## *Anexo III*

### **BIBLIOGRAFIA**

“Assessment of Concrete Structures and Design Procedures for Upgrading, (Redesign)”  
Bulletin d'Information n° 162; CEB - [August 1983]

“Physical and Mathematical Models for Re-design of Damaged Structures” - T. P. Tassios  
IABSE - [1983]

“Relatório do Estágio realizado no Politécnico de Atenas (NTUA - LRC) no âmbito do Programa de Mobilidade de Recursos Humanos” - Daniel Vitorino; Humberto Varum - FEUP - [Dezembro 1994]

“Utilização de Técnicas de Análise Modal em Dinâmica Não-linear” - Madalena S. Marques Elsa Caetano; Álvaro A. M. F. Cunha - 2º Encontro sobre Sismologia e Engenharia Sísmica Tema 3 (Análise e Dimensionamento Sísmico); FEUP - [21-23 Junho 1994]

“Análise Dinâmica de Estruturas com Comportamento Geometricamente Não Linear”  
Carlos Rente; Raimundo Delgado - 2º Encontro sobre Sismologia e Engenharia Sísmica Tema 3 (Análise e Dimensionamento Sísmico); FEUP - [21-23 Junho 1994]

“Influência de Irregularidades em Altura na Resposta Sísmica de Edifícios” - David Pinto Aníbal Costa - 2º Encontro sobre Sismologia e Engenharia Sísmica; Tema 3 (Análise e Dimensionamento Sísmico); FEUP - [21-23 Junho 1994]

“Quantificação de Coeficientes de Comportamento” - David Pinto; Aníbal Costa - 2º Encontro sobre Sismologia e Engenharia Sísmica; Tema 3 (Análise e Dimensionamento Sísmico); FEUP - [21-23 Junho 1994]



“Comportamento de Pórticos de Betão Armado preenchidos com Paredes de Alvenaria” - Daniel V. C. Oliveira - Tese de Mestrado em Estruturas; FEUP - [em desenvolvimento]

“Influência da Configuração de Estruturas de Edifícios nos Valores dos Coeficientes de Comportamento” - Rita Bento; Luís Guerreiro - 2º Encontro sobre Sismologia e Engenharia Sísmica; Tema 3 (Análise e Dimensionamento Sísmico); FEUP - [21-23 Junho 1994]

“O Amortecimento em Problemas com Comportamento Materialmente Não-Linear” - Rui Faria; Raimundo Delgado - 2º Encontro sobre Sismologia e Engenharia Sísmica; FEUP - [21-23 Junho 1994]

“Modelo de Comportamento Sísmico Não-Linear de Estruturas de Pontes de Betão Armado e Pré-esforçado” - Carlos Trancoso Vaz - 2<sup>as</sup> Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas; Tema A (Análise e Dimensionamento de Estruturas); Lisboa; LNEC - [20-23 Novembro 1990]

“Avaliação da Segurança em Relação à Acção dos Sismos” - Ricardo Teixeira Duarte - 2<sup>as</sup> Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas; Tema A (Análise e Dimensionamento de Estruturas); Lisboa; LNEC - [20-23 Novembro 1990]

“Simulação Analítica do Comportamento de Pórticos de Betão Armado, preenchidos com Paredes de Alvenaria, sob a Acção de Cargas Horizontais Repetidas e Alternadas” - A. Campos Costa; Felicita Pires; E. Cansado Carvalho; João P. Ribeiro - 2<sup>as</sup> Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas; Tema A (Análise e Dimensionamento de Estruturas); Lisboa; LNEC - [20-23 Novembro 1990]

“Análise Sísmica Não Linear de Pórticos de Betão Armado” - Ema Coelho; E. Cansado Carvalho - 2<sup>as</sup> Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas; Tema A (Análise e Dimensionamento de Estruturas); Lisboa; LNEC - [20-23 Novembro 1990]

“Análise Não-Linear de Estruturas Porticadas de Betão” - Paulo Jorge de Sousa Cruz; Joaquim Azevedo Figueiras - 2<sup>as</sup> Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas; Tema A (Análise e Dimensionamento de Estruturas); Lisboa; LNEC - [20-23 Novembro 1990]

“Portin - Programa de Pórticos Planos” - Trabalho desenvolvido no âmbito do Seminário de Estruturas do Curso de Engenharia Civil - António M. C. Monteiro - FEUP - [1992]

“Experimental Study of Seismic Response of R. C. Setback Buildings” - Bahram M. Shahrooz; Jack P. Moehle - College of Engineering - University of California; Berkeley - [October 1987]

- “Earthquake-Simulation Tests of a Ten-Story Reinforced Concrete Frame with a discontinued First-Level Beam” - Jack P. Moehle; Mete A. Sozen - University of Illinois; Urbana; Champaign - [August 1978]
- “Inelastic Response of Reinforced Concrete Columns subjected to Two-dimensional Earthquake Motions” - M. I. H. Suharwardy; D. A. Pecknold - Department of Civil Engineering; University of Illinois; Urbana; Champaign - [October 1978]
- “A SDOF Model to Study Nonlinear Dynamic Response of Large- and Small-scale R. C. Test Structures” - Detlef H. Rothe; Mete A. Sozen - University of Illinois; Urbana; Champaign - [November 1983]
- “Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures” - Yeong-Bin Yang; Shyh-Rong Kuo - Prentice Hall - [1994]
- “Acção dos Sismos” - Raimundo Delgado - Curso Sobre a Nova Regulamentação de Estruturas; Capítulo VII do RSA - [1986] - FEUP
- “Metodologia para Verificação da Segurança em Análises Não-lineares” - J. Câmara; J. Vinagre; A. Pinto - Encontro Nacional “Betão Estrutural 1994”
- “Eurocódigo 8 - Aspectos Relativos a Edifícios de Betão Armado” - E. C. Carvalho - Encontro Nacional “Betão Estrutural 1994”
- CEB-FIP - Model Code 1990 - Comité Euro-International du Béton
- “Ensaio de Modelos de Edifícios dimensionados para dois Níveis de Ductilidade” - E. C. Carvalho; M. Pipa; Ema Coelho - Jornadas sobre a aplicação da Nova Regulamentação de Estruturas; FEUP - [1988]
- “Alcune Osservazioni sulla Ridistribuzione delle Sollecitazioni e sulla Valutazione delle Rotazioni Anelastiche nelle Travi Continue in C. A.” - Dott. Ing. Edoardo Cosenza, Prof. Ing. Carlo Greco, Dott. Ing. Marisa Pecce - L'Industria Italiana del Cemento; Anno LIX; n. 2 - [Febbraio 1989]
- “Earthquake Behavior of Reinforced Concrete Frame Structures Infilled with Masonry Panels” - R. T. Duarte; A. C. Costa - LNEC; Lisbon - [June 1988]
- “Comparative Research on the Seismic Response of Reinforced Concrete Structures” - Commission contractual research activities in the area of the response of civil engineering structures to severe earthquake loading; Vol. II; LNEC; Lisboa - [February 1991]

“Damage Prediction in Reinforced Concrete Frames under Seismic Actions” - I. F. Meyer; W. B. Krätzig; F. Stangenberg; K. Meskouris - European Earthquake Engineering - [1988]

“Análise Sísmica de Estruturas de Edifícios segundo a Nova Regulamentação - Dimensionamento dos elementos Estruturais de quatro Edifícios” - Eduardo Cansado Carvalho; Ema Coelho - Vol. III; Lisboa - [1984]

“Design Guidelines for Ductility and Drift Limits - Review of State-of-the-Practice and State-of-the-Art in Ductility and Drift-Based Earthquake-Resistant Design of Buildings” - Vitelmo V. Bertero; James C. Anderson; Helmut Krawinkler; Eduardo Miranda - University of California; Berkeley - [July 1991]

“Ductility in Seismic Design” - Thomas Paulay - University of Canterbury; Christchurch; New Zealand

“The Non-Linear Response of Unreinforced Masonry Buildings to Earthquake Excitations” - A. Kamil Tanrikulu; Yalcin Mengi; Hugh D. McNiven

“Inelastic Analysis of R/C Frame Structures” - Shunsuke Otani - Journal of the Structural Division

“Influence of Axial Force Variations on Flexural Behavior of Reinforced Concrete Columns” - ACI Structural Journal (Technical Paper) - Daniel P. Abrams

“Vibration Analysis of Frames with Semi-Rigid Connections” - Sukeo Kawashima and T. Fujimoto - computers & Structures - USA

“Análise Não Linear de Pilares de Betão Armado sob Cargas Cíclicas” - Carlos Trancoso Vaz - Lisboa - LNEC

“A Shear Design Equation for Ductile R/C Members” - T. Ichinose; Department of Architecture; Nagoya Institute of Technology; Japan - Earthquake Engineering and Structural Dynamics; Vol. 21

“Comparative Experimental Studies of Models of Self-Controlled and Ordinary Frames on the Shaking Table” - Shuting Liang; Dajun Ding - Earthquake Engineering and Structural Dynamics; Vol. 24

“Analysis of the Full-Scale Seven-story Reinforced Concrete Test Structure” - Toshimi Kabeyasawa; Hitoshi Shiohara; Shunsuke Otani and Hiroyuki Aoyama - Journal of the Faculty of Engineering; Faculty of Tokyo

“Earthquake Behavior of Reinforced Concrete Frame Structures Infilled with Masonry Frames” - R. T. Duarte; A. C. Costa - Lisbon - LNEC - [June 1988]

“Reinforced Concrete Response to Simulated Earthquakes” - T. Takeda; M. A. Sozen; M. N. Nielsen - ASCE; Journal of the Structural Division; Vol. 96; n° ST12 - [1970]

“On the Automatic Solution of Nonlinear Finite Element Equations” - K. J. Bathe; E. N. Dvorkin - Computers & Structures; Vol. 17 - [1983]

“An Arc-length Method Including Line Searches and Accelerations” - M. A. Crisfield - International Journal of Numerical Methods in Engineering; Vol. 19 - [1983]

“The Solution of Nonlinear Finite Element Equations” - H. Matthies; G. Strang - International Journal of Numerical Methods in Engineering; Vol. 14 - [1979]

“Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problems” - J. L. Batoz; G. S. Dhatt - International Journal of Numerical Methods in Engineering; Vol. 14 - [1979]

“Solution Strategies for Nonlinear Structural Equations” - V. Ciampi - Bulletin d'Information n° 210; Comité Euro-International du Béton; Vienne - [1991]

“Improved Numerical Dissipation for Time Integration Algorithms in Structural Dynamics” - H. M. Hilber; T. J. R. Hughes; R. L. Taylor - Earthquake Engineering and Structural Dynamics; Vol. 5 - [1977]

“Structural Response Computations in Earthquake Engineering” - A. H. Barbat; J. M. Canet - Pineridge Press Limited; Swansea - [1989]

“A Precis of Development in Computational Methods for Transient Analysis” - T. J. R. Hughes; T. Belytschko - Journal of Applied Mechanics; Vol. 50 - [1983]

“A Method of Computation for Structural Dynamics” - N. M. Newmark - ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division; Vol. 85; n° EM3 - [1959]

“Comportamento Não-Linear de Edifícios Sujeitos a Acções Sísmicas Irregulares em Planta” - A. Campos Costa - Tese de Doutoramento; LNEC; Lisboa - [1992]

“Nonlinear Dynamic. Case 1, Direction Y” - E. Coelho; E. C. Carvalho - Cooperative Research Program on the Seismic Response of Reinforced Concrete Structures; Contract 3919-90-02, JRS; ISPRA; Vol. II - [1991]

“Classes de Ductilidade em Aços para Betão Armado” - M. Pipa; E. C. Carvalho - 2<sup>as</sup> Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas; LNEC; Lisboa - [1990]

“Dinâmica de Estruturas” - Apontamentos da licenciatura em Engenharia Civil - Raimundo Moreno Delgado - FEUP

“A Model of Plasticity Coupled to Damage for Reinforced Concrete Frames” - A. Cipollina; R. Febres Cedillo; J. Flórez López (Universidad de Los Andes; Mérida; Venezuela) - Tenth World Conference of Earthquake Engineering; Balkema; Rotterdam - [1992]

“A Damage Model for the Seismic Analysis of Building Structures” - S. Oller; A. H. Barbat; E. Oñate; A. Hanganu - Technical University of Catalonia; Barcelona; Spain

“Isotropic Damage Models and Smeared Crack Analysis of Concrete” - J. Oliver; M. Cervera; S. Oller (ETS - Ingenieros de Caminos; Canales y Puertos; Technical University of Catalonia; Barcelona; Spain) and J. Lubliner (Department of Civil Engineering; University of California; Berkeley; California; USA) - Second International Conference on Computer aided Analysis and Design of Concrete Structures; Austria - [1990]

“Coeficientes de Comportamento em Pórticos de Betão Armado” - D. M. Pinto - Tese de Mestrado; FEUP - [1994]

“O Método Pseudo-Dinâmico e as suas Aplicações no Laboratório ELSA - Características e Aplicações” - Artur Vieira Pinto; A. Arêde; J. Guedes - Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas; nº 38 e 39 - [1995]