ANTÓNIO MANUEL ROSA PEREIRA CAETANO

RELAÇÕES ALGÉBRICO-TOPOLÓGICAS NO CONTEXTO DA TEORIA DOS OPERADORES

trabalho de síntese na área da Análise Funcional com vista à realização das Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica

UNIVERSIDADE DE COIMBRA
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
1987

A meus Pais,
que me ensinaram a perseverança e
a honestidade

À Ana Leonor,
que me deu os momentos que
eram nossos

PREFÁCIO

Por volta de 1980 surgiram, no contexto da teoria dos operadores, vários resultados envolvendo valores próprios com quantidades de natureza mais geométrica, nomeadamente números de aproximação e números de entropia. Tais resultados, designados comummente por *estimativas de valores próprios*, até só por si despertam interesse, já que nos dão conta de relações por vezes não esperadas entre conceitos algébricos e conceitos topológicos. São esses resultados que pretendemos aqui apresentar sob o título de relações algébrico-topológicas, tentando, na medida do possível, enquadrá-los numa linha de evolução que não torne totalmente surpreendente a dado passo a consideração de certas definições ou propriedades.

Com o objectivo de tornar este trabalho o mais autocontido possível, apresentamos de início dois capítulos contendo material preliminar necessário ao adequado desenvolvimento dos restantes dois. Assim, no capítulo I tratamos alguns aspectos relacionados com álgebras de Banach até deduzirmos a *fórmula do raio espectral*, que é também uma relação algébrico-topológica, embora anterior às que referimos em cima. As principais referências utilizadas foram [2], [5], [7], [30] e [32]. No capítulo II apresentamos a teoria espectral de Riesz-Schauder para operadores compactos, essencial ao nosso trabalho. A abordagem feita é inspirada nas aulas do Prof. Hari Bercovici, que frequentámos num curso de Verão em Perugia, Itália, em 1986.

O capítulo III contém um dos nossos principais objectivos — relacionar os valores próprios com os números-s. Dividimo-lo em três secções : a primeira incide sobre os antepassados dos números-s, isto é, sobre os valores ou números singulares; a segunda sobre os próprios números-s, conceito sob o qual se encontram os números de aproximação referidos acima; e, finalmente, a terceira apresenta *estimativas de valores próprios* através do conceito que dá o nome ao capítulo, estabelecendo-se aí o primeiro grande resultado no teorema III.3.5, que é devido a König. As principais referências usadas foram [7], [12], [20] e [29] para a primeira secção, [26] para a segunda e [20] para a terceira.

No capítulo IV começamos por apresentar na primeira secção algumas propriedades dos números de entropia e também *estimativas de valores próprios* através desse conceito, sendo os resultados mais importantes os teoremas IV.1.5 e IV.1.6, o primeiro dos quais obtido por Carl e Triebel. As referências usadas foram, essencialmente, [4], [20] e [27]. A segunda secção ocupa-se quase exclusivamente da apresentação de generalizações da desigualdade clássica de Weyl no contexto de espaços de Banach e para alguns números-s, constituindo os números de entropia um importante meio de trabalho. O resultado principal é, obviamente, o teorema IV.2.7, devido a Johnson, König, Maurey e Retherford. As principais referências utilizadas foram [3], [27] e [33].

Apresentamos ainda, numa *nota final*, alguns complementos e generalizações efectuadas num quadro mais geral, tomando como referência-base [8], [20], [33] e [35].

Para fácil consulta do leitor, colocámos num primeiro apêndice alguns dos resultados importantes necessários ao longo do texto, estando ali listados segundo a ordem em que aparecem neste. Um segundo apêndice destina-se a complementar a nota III.1.9, demonstrando-se um resultado mais fraco que o apresentado (sem demonstração) no lema III.1.9 e que pode substituir este na dedução de vários outros resultados. O porquê da consideração desta versão mais fraca é que ela pode ser provada com o material apresentado no nosso trabalho e anterior ao referido lema.

Embora sem carácter exaustivo, fazemos uma certa distinção entre proposições e teoremas, sendo esta última designação destinada aos resultados mais importantes quer no sentido dos objectivos visados quer no sentido de fortemente necessários para a sequência do trabalho. A numeração de definições, notas, lemas, corolários, proposições, teoremas e demonstrações é feita sem distinguir estas várias denominações, mantendo-se por vezes o mesmo número em algumas delas: por exemplo, as demonstrações têm o mesmo número que os enunciados a que se referem (lemas, corolários, proposições ou teoremas), e em geral uma nota terá o mesmo número que uma certa definição ou outra das denominações indicadas, evidenciando assim a sua dependência. As referências cruzadas seguem convenções normalmente utilizadas hoje em dia, sendo uma delas a omissão do capítulo e/ou da secção quando a referência é feita, respectivamente, no próprio capítulo e/ou na própria secção.

É talvez conveniente dedicar algumas palavras à notação usada, já que o processo utilizado na dactilografia não permitiu uma total liberdade de movimentos. Assim, houve sempre dificuldade em escrever coisas em cima de outras e em escrever certas sequências de índices ou expoentes. Consequentemente, nos símbolos representando limites, limites superiores ou inferiores, séries ou somatórios finitos, uniões ou intersecções, e noutros em que habitualmente as suas várias componentes se dispõem "em altura", optámos normalmente por escrever em índice ou em expoente o que é costume estar por baixo ou por cima de outra coisa, como por exemplo em $\Sigma_{n=1,\ldots,\infty} a_n$ para representar uma série. Em expoente escrevemos por exemplo o traço que indica o fecho de um conjunto ou o conjugado de um número complexo. Quando se juntam muitos expoentes e índices optámos por vezes por escrever alguns deles na mesma linha que o símbolo anterior, desde que, no nosso entender, não haja perigo de confusão.

A ideia para a abordagem do tema apresentado surgiu na sequência das linhas de estudo sugeridas pelo nosso orientador, Prof. Sampaio Martins, a quem agradecemos todo o apoio dado, nomeadamente na cedência de fotocópias de artigos e de *preprints* que seriam difíceis ou mesmo impossíveis de obter, e na leitura cuidadosa do manuscrito e consequente crítica construtiva, sempre de grande valor. Agradecemos também ao Prof. David Edmunds da Universidade de Sussex, Inglaterra, com quem tivemos oportunidade de contactar em Setembro de 1986, por uma conversa paciente donde surgiram algumas das ideias de como abordar alguns dos assuntos aqui apresentados, e por ter posto à nossa disposição um dos livros mais importantes à elaboração do nosso trabalho — [20].

Queremos também deixar expresso um agradecimento geral a todos os que, mesmo indirectamente, contribuiram para que a dactilografia feita por nós fosse efectuada no mais curto espaço de tempo possível, e também a todos os que, de um modo ou outro, contribuiram para a boa apresentação do trabalho.

Evidentemente, qualquer imprecisão, quer na dactilografia quer no conteúdo em si, é da nossa inteira responsabilidade.

Coimbra, Abril de 1987

António Manuel R. P. Caetano

ÍNDICE

I. ÁLGEBRAS DE BANACH

Em vez de começarmos de imediato com a álgebra de Banach constituída pelos operadores que actuam no mesmo espaço (o significado exacto deste fraseado será precisado mais à frente), preferimos iniciar com álgebras de Banach em geral e dar aí definições e propriedades que depois nos serão necessárias.

Mesmo neste contexto mais geral, é possível pôr em evidência certas relações algébrico-topológicas até conseguirmos demonstrar a *fórmula do raio espectral*, que é o nosso principal objectivo neste capítulo.

1. Definição: Uma *álgebra* **A** é uma estrutura algébrica com as seguintes propriedades:

(i) **A** é anel;

(ii) **A** é espaço vectorial sobre um corpo $\mathbb{K}$;

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x,y \in \mathbf{A},\ \alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

2. Definição: Uma álgebra **A** diz-se *real* ou *complexa* consoante $\mathbb{K}$ seja, respectivamente, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2. Nota: <u>Em todo o nosso trabalho só lidaremos com álgebras reais ou complexas.</u>

3. Definição: Uma *álgebra normada* **A** é uma álgebra munida duma aplicação $\|.\|: \mathbf{A} \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(iv) $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0\ ,\ \forall x \in \mathbf{A}$;

(v) $\|x+y\| \leqq \|x\|+\|y\|\ ,\ \forall x,y \in \mathbf{A}$;

(vi) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|\ ,\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbf{A}$;

(vii) $\|xy\| \leqq \|x\|\,\|y\|\ ,\ \forall x,y \in \mathbf{A}$.

Por outras palavras, **A** é uma álgebra que é um espaço vectorial normado em que a norma $\|.\|$ verifica a propriedade adicional (vii).

3. Nota: Sabemos que um espaço normado **E** é um espaço vectorial topológico e portanto que a adição e a multiplicação por escalar são aplicações contínuas respectivamente de **E**x**E** e **K**x**E** em **E** – cf. [32], pp. 52-53 e 94 . Em particular, o mesmo sucede com uma álgebra normada. E como neste caso temos mais uma operação, surge naturalmente a pergunta cuja resposta é dada pelo resultado seguinte.

4. Proposição: *A multiplicação de elementos da álgebra normada* **A** *é uma aplicação contínua de* **A**x**A** *em* **A**.

4. Demonstração: Como **A** e **A**x**A** são espaços C_1, é suficiente provar que a aplicação referida é sequencialmente contínua. Considere-se então uma qualquer sucessão $((x_n,y_n))$ em **A**x**A** convergente para (x,y), o que significa que $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow y$ em **A**. Ora $0 \leqq \|x_ny_n-xy\|$ $= \|x_ny_n-xy_n+xy_n-xy\| \leqq \|x_ny_n-xy_n\| + \|xy_n-xy\| = \|(x_n-x)y_n\| + \|x(y_n-y)\|$ $\leqq \|x_n-x\|\|y_n\| + \|x\|\|y_n-y\|$, que tende para 0 pois o mesmo sucede a $\|x_n-x\|$ e $\|y_n-y\|$. Então o mesmo acontece com $\|x_ny_n-xy\|$, o que significa que $x_ny_n \longrightarrow xy$. Logo a multiplicação é sequencialmente contínua e portanto contínua.

□

5. Definição: Uma *álgebra de Banach* **A** é uma álgebra normada que é um espaço de Banach (i.e., que é um espaço normado completo). Como no nosso trabalho não precisamos de uma estrutura tão geral, vamos impôr mais algumas condições. Assim, apenas trataremos de *álgebras de Banach* tais que:

(viii) **A** é um anel com identidade **e** ;

(ix) $\|\mathbf{e}\|=1$.

5. Nota: Não impomos a comutatividade da multiplicação no anel **A**, ou seja, consideramos em geral álgebras de Banach não necessariamente comutativas. <u>Durante o resto do capítulo a letra **A** designará sempre uma tal estrutura.</u>

6. Definição: Um elemento x de **A** diz-se *invertível* se tem um inverso (multiplicativo) em **A**, i.e., se $\exists x^{-1} \in \mathbf{A}$: $xx^{-1} = x^{-1}x = \mathbf{e}$.

6. Nota: Como se sabe da teoria dos anéis, o conjunto $\mathbf{I}$ dos elementos invertíveis de $\mathbf{A}$ forma um grupo multiplicativo. Além disso, $x \in \mathbf{I} \Rightarrow \|x\| \|x^{-1}\| \geqq \|xx^{-1}\| = \|\mathbf{e}\| = 1 > 0 \Rightarrow \|x\| > 0$.

7. Teorema: *Seja* $x \in \mathbf{A}$ *tal que* $\|x\| < 1$. *Então, convencionando que* $x^0 = \mathbf{e}$,

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *é convergente* ;

b) $\mathbf{e}-x$ *é invertível e* $(\mathbf{e}-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$;

c) $\|(\mathbf{e}-x)^{-1}\| \leqq 1/(1-\|x\|)$.

7. Demonstração: a) $\|x\| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \|x\|^n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \|x^n\|$ converge.
Sendo $\mathbf{A}$ completo e a série das normas convergente, o mesmo sucede à série dada — cf. [32], p. 67.

b) É suficiente provar que a série do enunciado da alínea anterior — que passaremos a designar abreviadamente por $\Sigma_n x^n$ — é um inverso de $\mathbf{e}-x$, ou seja, que $(\mathbf{e}-x)\Sigma_n x^n = (\Sigma_n x^n)(\mathbf{e}-x) = \mathbf{e}$. Ora $(\mathbf{e}-x)\Sigma_n x^n = \Sigma_n x^n - x\,\Sigma_n x^n = \Sigma_n x^n - \Sigma_n x^{n+1} = \mathbf{e}$, atendendo à proposição 4, e analogamente se prova a outra igualdade.

c) $\|(\mathbf{e}-x)^{-1}\| = \|\Sigma_n x^n\| \leqq \Sigma_n \|x^n\| \leqq \Sigma_n \|x\|^n = \dfrac{1}{1-\|x\|}$

□

8. Corolário: *A bola unitária aberta* $B = \{x \in \mathbf{A}: \|x-\mathbf{e}\| < 1\}$ *só tem elementos invertíveis, e* $x \in B \Rightarrow x^{-1} = \Sigma_n (\mathbf{e}-x)^n$.

8. Demonstração: $x \in B \Leftrightarrow \|\mathbf{e}-x\| < 1 \Rightarrow \mathbf{e}-(\mathbf{e}-x)$ é invertível e $[\mathbf{e}-(\mathbf{e}-x)]^{-1} = \Sigma_n (\mathbf{e}-x)^n$, ou seja, x é invertível e $x^{-1} = \Sigma_n (\mathbf{e}-x)^n$.

□

9. Proposição: *O conjunto* $\mathbf{I}$ *dos elementos invertíveis de* $\mathbf{A}$ *é aberto e a aplicação* $i: \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ *definida por* $i(x) = x^{-1}$ *é contínua.*

9. Demonstração: Seja $x \in \mathbf{I}$. Pretendemos provar que existe uma bola aberta centrada em x que está contida em $\mathbf{I}$. Como $y=x+(y-x)=x[\mathbf{e}+x^{-1}(y-x)]$, para $y \in \mathbf{A}$, e $\mathbf{I}$ é um grupo multiplicativo, tem-se $y \in \mathbf{I}$ se $\mathbf{e}+x^{-1}(y-x) \in \mathbf{I}$, ou ainda, se $\|x^{-1}(y-x)\|=\|\mathbf{e}+x^{-1}(y-x)-\mathbf{e}\| < 1$, atendendo ao corolário anterior. Como $\|y-x\|<1/\|x^{-1}\| \Rightarrow \|x^{-1}(y-x)\|<1$, a bola aberta centrada em x e com raio $1/\|x^{-1}\|$ está nas condições pretendidas. Provámos assim que $\mathbf{I}$ é aberto.

O corolário 8 diz-nos que $x \in B \Rightarrow x^{-1} = \Sigma_n (\mathbf{e}-x)^n$, logo $x^{-1}-\mathbf{e} = \Sigma_n (\mathbf{e}-x)^{n+1}$

e portanto $\|x^{-1}-\mathbf{e}\| \leq \Sigma_n \|\mathbf{e}-x\|^{n+1} = \|\mathbf{e}-x\|/(1-\|\mathbf{e}-x\|)$. Consequentemente, se considerarmos uma qualquer sucessão (x_n) de elementos de $\mathbf{I}$ convergente para $\mathbf{e}$, temos que $\lim_n \|x_n^{-1}-\mathbf{e}\| = \lim_n [\|\mathbf{e}-x_n\|/(1-\|\mathbf{e}-x_n\|)] = 0$, ou seja, também (x_n^{-1}) converge para $\mathbf{e}$, e portanto i é contínua em $\mathbf{e}$.

Seja agora $x \in \mathbf{I}$, arbitrário, e considere-se $x_n \to x$ em $\mathbf{I}$. Então $x^{-1}x_n \to \mathbf{e}$, atendendo à continuidade da multiplicação, e $x_n^{-1}x = (x^{-1}x_n)^{-1} \to \mathbf{e}$, pois já provámos a continuidade de i em $\mathbf{e}$. Novamente pela continuidade da multiplicação, $x_n^{-1}= x_n^{-1}x\, x^{-1} \to x^{-1}$, o que conclui a demonstração da continuidade de i.

□

9. Nota: É óbvio que i é bijectiva e que $i^{-1}=i$, donde se conclui que i é um homeomorfismo.

<u>A partir de agora e até ao fim do capítulo supomos sempre</u> $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, para podermos usar as propriedades das funções analíticas. Comecemos por estender este conceito a outros tipos de funções.

10. Definição: Seja $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f: \Omega \to E$ uma função com valores num espaço de Banach (complexo) E. Dizemos que f é *analítica* em Ω se existe (em E)

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}, \quad \forall z \in \Omega,$$

e nesse caso diz-se que $f'(z)$ é a *derivada* de f em z.

11. Definição: O *espectro* de $x \in \mathbf{A}$ é o conjunto $\sigma(x)=\{\lambda \in \mathbb{C}: \lambda\mathbf{e}-x$ não é invertível$\}$

O *conjunto resolvente* de $x \in \mathbf{A}$ é o conjunto $\rho(x) = \mathbb{C} \setminus \sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C}: \lambda\mathbf{e}-x$ é invertível$\}$.

12. Teorema: *Seja* $x \in \mathbf{A}$. *Então:*

a) $\rho(x)$ *é aberto e* $R_x: \rho(x) \to \mathbf{A}$ *definida por* $R_x(\lambda) = (\lambda\mathbf{e}-x)^{-1}$ (*a aplicação resolvente de* x) *é analítica em* $\rho(x)$;

b) $\sigma(x)$ *está contido na bola fechada de raio* $\|x\|$ *centrada em* 0, *é compacto e não vazio.*

12. Demonstração: **a)** Como a aplicação $t: \mathbb{C} \to \mathbf{A}$ tal que $t(\lambda)=\lambda\mathbf{e}-x$ é obviamente contínua e $\rho(x)=t^{-1}(\mathrm{I})$, com I como na proposição 9, do resultado aí obtido segue imediatamente que $\rho(x)$ é aberto.

É fácil verificar que $\lambda\mathbf{e}-x$ e $\mu\mathbf{e}-x$ são permutáveis, para $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$, atendendo à comutatividade da multiplicação em $\mathbb{C}$. Supondo agora que $\lambda,\mu \in \rho(x)$, da igualdade $(\lambda\mathbf{e}-x)^{-1}(\mu\mathbf{e}-x)^{-1} = [(\mu\mathbf{e}-x)(\lambda\mathbf{e}-x)]^{-1}$ obtêm-se as duas outras

$$(\mu\mathbf{e}-x)(\lambda\mathbf{e}-x)^{-1}(\mu\mathbf{e}-x)^{-1} = (\lambda\mathbf{e}-x)^{-1}$$

e $$(\lambda\mathbf{e}-x)(\lambda\mathbf{e}-x)^{-1}(\mu\mathbf{e}-x)^{-1} = (\mu\mathbf{e}-x)^{-1},$$

consoante, respectivamente, se use e não se use a permutabilidade anunciada. Subtraindo membro a membro obtemos

$$(\mu\mathbf{e}-x)^{-1} - (\lambda\mathbf{e}-x)^{-1} = (\lambda-\mu)(\lambda\mathbf{e}-x)^{-1}(\mu\mathbf{e}-x)^{-1},$$

ou ainda, $$[R_x(\mu) - R_x(\lambda)]/(\mu-\lambda) = -R_x(\lambda)R_x(\mu), \quad \text{se } \mu \neq \lambda.$$

Como a aplicação resolvente R_x é a composição $i \circ t|_{\rho(x)}$ de funções contínuas, com t definido acima e i como na proposição 9, então é também contínua; portanto

$$\lim_{\mu \to \lambda} [R_x(\mu) - R_x(\lambda)]/(\mu-\lambda) = -R_x(\lambda)^2, \quad \text{para todo } \lambda \in \rho(x),$$

o que prova que R_x é analítica em $\rho(x)$, atendendo também a que o conjunto resolvente não é vazio, como decorre da primeira parte da alínea seguinte.

b) Seja λ tal que $|\lambda| > \|x\|$. Então $\|\lambda^{-1}x\| = |\lambda|^{-1}\|x\| < 1$. Aplicando o teorema 7, podemos afirmar que $\mathbf{e}-\lambda^{-1}x$ é invertível. Como $\lambda\neq 0$, também $\lambda\mathbf{e}$ é invertível. Então $\lambda\mathbf{e}-x = \lambda\mathbf{e}(\mathbf{e}-\lambda^{-1}x)$ é invertível, o que significa que $\lambda\in\rho(x)$.

Conclui-se pois que $\lambda\in\sigma(x) \Rightarrow |\lambda| \leqq \|x\|$, o que prova a primeira parte desta alínea.

Uma consequência deste resultado é que $\sigma(x)$ é limitado. Por outro lado, na alínea anterior provámos que $\rho(x)$ é aberto - portanto $\sigma(x)$ é fechado. Então $\sigma(x)$ é limitado e fechado em $\mathbb{C}$, o que é o mesmo que dizer que é compacto.

Falta apenas provar que o espectro tem pelo menos um elemento.

Suponhamos que não, i.e., que $\sigma(x)=\emptyset$. Então $x\neq 0$ e $\rho(x)=\mathbb{C}$ e, pela alínea anterior, a aplicação resolvente R_x é analítica em $\mathbb{C}$. Seja $x'\in\mathbf{A'}$ (dual de $\mathbf{A}$) arbitrário. Da linearidade e continuidade de x' sai imediatamente que, dado $\lambda\in\mathbb{C}$,

$$\lim_{\mu\to\lambda}\frac{(x'oR_x)(\mu)-(x'oR_x)(\lambda)}{\mu-\lambda} = x'\left[\lim_{\mu\to\lambda}\frac{R_x(\mu)-R_x(\lambda)}{\mu-\lambda}\right],$$

logo $x'oR_x$ é analítica em $\rho(x)=\mathbb{C}$, ou seja, é uma função inteira. Além disso repare-se que, para $|\lambda| > \|x\|$ e usando o teorema 7, $|x'[R_x(\lambda)]| \leqq \|x'\|\,|\lambda|^{-1}\|(\mathbf{e}-\lambda^{-1}x)^{-1}\| \leqq \|x'\|\,|\lambda|^{-1}/(1-\|\lambda^{-1}x\|) \leqq \|x'\|/(|\lambda|-\|x\|)$, pelo que $x'oR_x$ é limitada para $|\lambda| > 2\|x\|$; para $|\lambda| \leqq 2\|x\|$ temos um compacto em $\mathbb{C}$, e sendo $x'oR_x$ função inteira, é contínua nesse compacto e portanto aí limitada. Pelo teorema de Liouville — cf. 1 do apêndice 1 — podemos então concluir que $x'oR_x$ é constante; como $0 \leqq |(x'oR_x)(\lambda)| \leqq \|x'\|/(|\lambda|-\|x\|) \longrightarrow 0$ quando $\lambda\to\infty$, essa constante só pode ser 0. Assim, temos $x'[(\lambda\mathbf{e}-x)^{-1}] = x'[R_x(\lambda)] = 0$, para todos $x'\in\mathbf{A}$, $\lambda\in\mathbb{C}$, o que implica (por um corolário do teorema de Hahn-Banach — cf. 2 do apêndice 1) que $(\lambda\mathbf{e}-x)^{-1}=0$, $\lambda\in\mathbb{C}$. Confrontando agora com a nota 6, deparamos com uma contradição; logo $\sigma(x)\neq\emptyset$.

□

13. Definição: O *raio espectral* de $x \in \mathbf{A}$ é $r(x)=\sup\{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(x) \}$.

13. Nota: Do teorema 12.b) sai que $\lambda \in \sigma(x) \Rightarrow |\lambda| \leqq \|x\|$, logo $r(x) \leqq \|x\|$. Iremos ver que é possível estimar melhor o raio espectral.

14. Lema: *Se* $x_1, \ldots, x_n$ *são elementos de* $\mathbf{A}$ *que permutam dois a dois, então o produto* $x_1 \ldots x_n$ *é invertível se e só se* x_i *é invertível*, $i=1, \ldots, n$.

14. Demonstração: Se supusermos cada x_i invertível, $i=1, \ldots, n$, é imediato verificar que $x_1 \ldots x_n$ é invertível com inverso $x_n^{-1} \ldots x_1^{-1}$.

Suponhamos agora que $x_1 \ldots x_n$ é invertível e fixe-se $i \in \{1, \ldots, n\}$. Atendendo à hipótese de permutabilidade, podemos escrever $x_1 \ldots x_n = x_i\, x_1 \ldots x_{i-1}\, x_{i+1} \ldots x_n = x_1 \ldots x_{i-1}\, x_{i+1} \ldots x_n\, x_i$. Multiplicando por $(x_1 \ldots x_n)^{-1}$ à direita e à esquerda obtemos $\mathbf{e} = x_i\, [\, x_1 \ldots x_{i-1}\, x_{i+1} \ldots x_n\, (x_1 \ldots x_n)^{-1}] = [\,(x_1 \ldots x_n)^{-1}\, x_1 \ldots x_{i-1}\, x_{i+1} \ldots x_n\,]\, x_i$. Para concluir a demonstração é suficiente agora provar que cada x_j, $j=1, \ldots, n$, é permutável com $(x_1 \ldots x_n)^{-1}$. De facto, $x_j = x_j\, \mathbf{e} = x_j\, (x_1 \ldots x_n)\, (x_1 \ldots x_n)^{-1} = (x_1 \ldots x_n)\, x_j\, (x_1 \ldots x_n)^{-1}$; multiplicando à esquerda por $(x_1 \ldots x_n)^{-1}$ vem $(x_1 \ldots x_n)^{-1}\, x_j = x_j\, (x_1 \ldots x_n)^{-1}$, como pretendíamos.

□

Seja $p(\lambda)$ um polinómio em $\mathbb{C}$. Substituindo formalmente λ por $x \in \mathbf{A}$ (e λ^0 por $\mathbf{e}$) e efectuando depois as operações indicadas, obtemos um elemento de $\mathbf{A}$ que designamos por $p(x)$. Tem então sentido falar em espectro de $p(x)$, e é válido o resultado seguinte.

15. Teorema da aplicação espectral: $\sigma[p(x)] = p[\sigma(x)]$.

15. Demonstração: Seja $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n$. Então $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ e $\mu\mathbf{e} - p(x) = (\mu - a_0)\mathbf{e} - a_1 x - \ldots - a_n x^n$, para $\mu \in \mathbb{C}$.

Se $n \geqq 1$, podemos supôr $a_n \neq 0$ e sabemos então que é sempre possível escrever

$(\mu - a_0) - a_1\lambda - \ldots - a_n\lambda^n = -a_n(\lambda - \alpha_1)\ldots(\lambda - \alpha_n)$, onde α_j, $j=1,\ldots,n$, são as n raízes complexas do polinómio $\mu - p(\lambda)$. Então também $\mu\mathbf{e} - p(x) = -a_n(x - \alpha_1\mathbf{e})\ldots(x - \alpha_n\mathbf{e}) = (-1)^{n+1}a_n\mathbf{e}(\alpha_1\mathbf{e} - x)\ldots(\alpha_n\mathbf{e} - x)$. Atendendo ao lema anterior, $\mu\mathbf{e} - p(x)$ é invertível sse $\alpha_j\mathbf{e} - x$ é invertível, $j=1,\ldots,n$ (repare-se que os elementos do tipo $\alpha_j\mathbf{e} - x$, com $\alpha_j \in \mathbb{C}$, são permutáveis entre si, como facilmente se verifica; além disso, de $a_n \neq 0$ sai que $(-1)^{n+1}a_n\mathbf{e}$ é invertível, e é óbvio que permuta com todos os $\alpha_j\mathbf{e} - x$, $j=1,\ldots,n$). Assim,

$$\begin{aligned} \mu \in \sigma[p(x)] &\Leftrightarrow \text{existe } j \in \{1,\ldots,n\} \text{ tal que } \alpha_j \in \sigma(x) \\ &\Leftrightarrow \text{existe zero de } \mu - p(\lambda) \text{ pertencente a } \sigma(x) \\ &\Leftrightarrow \mu \in p[\sigma(x)], \end{aligned}$$

e portanto $\sigma[p(x)] = p[\sigma(x)]$, para $n \geq 1$.

Se $n=0$ vem $p(\lambda) = a_0$ e $p(x) = a_0\mathbf{e}$. Então $\mu\mathbf{e} - p(x) = \mu\mathbf{e} - a_0\mathbf{e} = (\mu - a_0)\mathbf{e}$, que é invertível se e só se $(\mu - a_0) \neq 0$, ou seja, se e só se $\mu \neq a_0$. Assim $\sigma[p(x)] = \{a_0\}$. Por outro lado, se $\mu \in \sigma(x)$ — $\neq \emptyset$, pelo teorema 12.b) —, tem-se $p(\mu) = a_0$, logo $p[\sigma(x)] = \{a_0\}$. Portanto também neste caso $\sigma[p(x)] = p[\sigma(x)]$.

□

16. Corolário: *Se* $x \in \mathbf{A}$, *é válida a seguinte relação:* $r(x^n) = [r(x)]^n$.

16. Demonstração: Usando o teorema anterior, podemos escrever $\sigma(x^n) = \{\lambda^n : \lambda \in \sigma(x)\}$. Assim $r(x^n) = \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(x^n)\} = \sup\{|\lambda|^n : \lambda \in \sigma(x)\} = [\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}]^n = [r(x)]^n$.

□

17. Teorema (fórmula do raio espectral): *Dado* $x \in \mathbf{A}$, *existe* $\lim_n \|x^n\|^{1/n}$ *e tem-se a fórmula*

$$\boxed{r(x) = \lim_n \|x^n\|^{1/n}}$$

17. Demonstração: Observámos na nota 13 que $r(x) \leq \|x\|$, desigualdade válida para todo $x \in \mathbf{A}$. Como $x^n \in \mathbf{A}$, para n natural, então também $r(x^n) \leq \|x^n\|$. Usando o corolário anterior, vem $[r(x)]^n \leq \|x^n\|$ e portanto $r(x) \leq \|x^n\|^{1/n}$, para n natural, ou ainda

(17.1) $$r(x) \leq \liminf_n \|x^n\|^{1/n}$$

Por outro lado, a partir da demonstração 12.b) podemos afirmar que $|\lambda| > \|x\| \Rightarrow \lambda\mathbf{e}-x$ é invertível com inverso $\lambda^{-1}(\mathbf{e}-\lambda^{-1}x)$, e usando o teorema 7 podemos então escrever $R_x(\lambda) = (\lambda\mathbf{e}-x)^{-1} = \lambda^{-1}\Sigma_n (\lambda^{-1}x)^n = \Sigma_n \lambda^{-n-1}x^n$ e obviamente também

(17.2) $$(x' \circ R_x)(\lambda) = \Sigma_n x'(x^n)\, \lambda^{-n-1}, \quad x' \in \mathbf{A}',$$

fórmula válida portanto para $|\lambda| > \|x\|$. Além disso, sai ainda da demonstração 12.b) que $x' \circ R_x$ é analítica em $\rho(x) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r(x)\}$, logo pode exprimir-se de modo único como série de Laurent em $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r(x)\} \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|x\|\}$ e assim, por (17.2), essa série terá que ser $\Sigma_n x'(x^n)\, \lambda^{-n-1}$, que é então convergente se $|\lambda| > r(x)$, sendo este resultado válido para todo $x' \in \mathbf{A}'$.

Consideremos agora s arbitrário no conjunto definido por $s > r(x)$. Das considerações anteriores sai que, para todo $x' \in \mathbf{A}'$, $\lim_n x'(x^n)\, s^{-n-1} = 0$, logo $\sup_{n \in \mathbb{N}} |x'(s^{-n-1}x^n)| < \infty$. Aplicando então o teorema de Banach-Steinhaus (da limitação uniforme) — cf. 3 do apêndice 1 — podemos afirmar que existe $M > 0$ tal que $\|s^{-n-1}x^n\| \leq M$, ou ainda tal que $\|x^n\|^{1/n} \leq s^{(n+1)/n} M^{1/n}$, para todo n natural, donde segue $\limsup_n \|x^n\|^{1/n} \leq s$. Sendo este resultado válido para qualquer $s > r(x)$, então também

$$\limsup_n \|x^n\|^{1/n} \leq r(x) \quad .$$

Conjugando com (17.1) obtemos $\limsup_n \|x^n\|^{1/n} \leq \liminf_n \|x^n\|^{1/n}$ e portanto existe $\lim_n \|x^n\|^{1/n}$ com valor igual ao valor comum dos limites anteriores. Assim

$r(x) \leq \lim_n \| x^n \|^{1/n} \leq r(x)$, o que prova finalmente que $r(x) = \lim_n \| x^n \|^{1/n}$.

□

Uma consequência interessante da fórmula do raio espectral é a seguinte:

Se estivermos a considerar um elemento x duma subálgebra **B** duma álgebra **A**, ele pode ser invertível em **A** e não o ser em **B**. No entanto, se é invertível em **B** também o é em **A**. Assim, em geral teremos $\sigma_{\mathbf{A}}(x)$ estritamente contido em $\sigma_{\mathbf{B}}(x)$. Apesar disso, o raio espectral em ambos os casos é dado por $\lim_n \| x^n \|^{1/n}$, qualquer que seja a álgebra que estejamos a considerar, e portanto os dois espectros têm o mesmo raio espectral.

II. OPERADORES COMPACTOS

Concretizemos agora o caso da designada *álgebra de Banach constituída pelos operadores que actuam no mesmo espaço*, que vamos definir a seguir.

Seja **E** um espaço de Banach, com $\mathbf{E}\neq\{0\}$, e considere-se o conjunto $\mathbf{L}(\mathbf{E})$ de todas as aplicações lineares contínuas (ou limitadas) de **E** em **E**. Considerando as operações usuais, sabemos que $\mathbf{L}(\mathbf{E})$ é um espaço de Banach com a norma dada por

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_{\mathbf{E}} : \|x\|_{\mathbf{E}}=1\} = \sup\{\|Tx\|_{\mathbf{E}} : \|x\|_{\mathbf{E}}<1\} = \sup\{\|Tx\|_{\mathbf{E}} : x\in U_{\mathbf{E}}\},$$

onde $T\in\mathbf{L}(\mathbf{E})$, $\|.\|_{\mathbf{E}}$ é a norma em **E** e $U_{\mathbf{E}}=\{x\in\mathbf{E} : \|x\|_{\mathbf{E}}\leq 1\}$ — cf. [1], pp. 248 e 252.

Para provarmos que $\mathbf{L}(\mathbf{E})$ é uma *álgebra de Banach*, é suficiente agora provar que:

(i) podemos definir uma multiplicação que, juntamente coma adição de espaço vectorial, transforma $\mathbf{L}(\mathbf{E})$ num anel que verifica I.1.(iii) ;

(ii) esse anel tem identidade ;

(iii) essa identidade tem norma 1 ;

(iv) a norma do produto não excede o produto das normas.

Ora a multiplicação que definimos é a usual entre aplicações, ou seja, é a composição, e é um exercício de rotina provar que as propriedades acima mencionadas se verificam.

Aos elementos de $\mathbf{L}(\mathbf{E})$ damos o nome de *operadores* (*em* **E**).

Se o corpo associado a **E** for $\mathbb{C}$, das considerações anteriores segue que são válidas para a álgebra $\mathbf{L}(\mathbf{E})$ todas as definições e propriedades estabelecidas no capítulo I, e em particular a *fórmula do raio espectral* — cf. teorema I.17 .

Na sequência do destaque que demos a essa fórmula, as relações algébrico-topológicas que pretendemos apresentar envolvem os elementos do espectro $\sigma(T)$ dum operador T. Para as apresentar é necessário que o espectro tenha um aspecto especial, simplificado, como no caso de um *operador compacto* (conceito que se aplica no estudo das equações integrais de Volterra e, mais geralmente, de Fredholm), e o objectivo principal deste capítulo é precisamente mostrar como é o espectro de um tal operador.

Não vamos restringir-nos a $\mathbf{L}(E)$ quando os resultados podem ser estabelecidos com igual esforço para operadores de **E** em **F** (com **F** também espaço de Banach diferente de $\{0\}$), isto é, para aplicações lineares contínuas (ou limitadas) de **E** em **F**. Designamos este conjunto de operadores por $\mathbf{L}(E,F)$, e considerações perfeitamente análogas às que fizemos para $\mathbf{L}(E)$ permitem-nos obter em $\mathbf{L}(E,F)$ uma estrutura de *espaço de Banach*.

Comecemos por recordar uma definição e um resultado.

1. Definição: $T \in \mathbf{L}(E,F)$ é dito *compacto* se $T(U_E)$ é relativamente compacto em **F** (ou é totalmente limitado em **F**, dado que os dois conceitos são equivalentes em espaços métricos completos – cf. [6], p. 22).

Designamos por $\mathbf{K}(E,F)$ o conjunto desses operadores em $\mathbf{L}(E,F)$, ou simplesmente por $\mathbf{K}(E)$ quando $F=E$.

1. Nota: Há mais duas definições de operador compacto, equivalentes à que demos, que por vezes são úteis em demonstrações; por isso as enunciamos em seguida:

a) T é compacto sse T(S) é relativamente compacto, para qualquer S limitado em **E** ;

b) T é compacto sse , para qualquer sucessão limitada (x_n) em **E**, a sucessão (Tx_n) tem uma subsucessão convergente em **F** .

2. Lema (cf. [32], pp. 294 e 298): *$\mathbf{K}(E,F)$ é um subespaço fechado de $\mathbf{L}(E,F)$ e, além disso, qualquer composição entre um operador compacto e um operador é um operador compacto. Em particular, $\mathbf{K}(E)$ é um ideal fechado da álgebra $\mathbf{L}(E)$.*

3. Lema de Riesz : *Seja* E *um espaço normado,* F *um subespaço fechado estritamente contido em* E , *e* $\varepsilon>0$. *Então existe* $x\in E$ *tal que* $\|x\|_E=1$ *e* $\operatorname{dist}(x,F)=\inf\{\|x+t\|_E : t\in F\}>1-\varepsilon$.

3. Demonstração: Seja $y\in E\setminus F$ e considere-se $z\in F$ tal que

(3.1) $$0<\|y+z\|_E<(1+\delta)\inf\{\|y+t\|_E : t\in F\}=(1+\delta)\operatorname{dist}(y,F) ,$$

com $\delta>0$ a fixar posteriormente. Definindo então $x=(y+z)/\|y+z\|_E$, temos de facto $\|x\|_E=1$; além disso, $\operatorname{dist}(x,F)=\operatorname{dist}(y/\|y+z\|_E+z/\|y+z\|_E , F)=\|y+z\|_E^{-1}\operatorname{dist}(y,F)$ $>(1+\delta)^{-1}$, atendendo a (3.1).

Se $0<\varepsilon<1$, basta então escolher $0<\delta<\varepsilon/(1-\varepsilon)$ para se obter $\operatorname{dist}(x,F)>1-\varepsilon$; se $\varepsilon\geq1$, o lema é trivial.

□

4. Corolário: a) *Seja* E *um espaço normado com dimensão infinita. Então existe uma sucessão* (x_n) *em* E *tal que* $\|x_n\|_E=1$ *e* $\|x_n-x_m\|_E>1/2$ *se* $n\neq m$.

b) *Um espaço normado* E *tem dimensão finita sse* U_E *é compacto*.

4. Demonstração: a) Começamos com $F=\langle x_1\rangle$, onde $\|x_1\|_E=1$, no lema de Riesz, e encontramos x_2 tal que $\|x_2\|_E=1$ e $\|x_2-x_1\|_E\geq\inf\{\|x+t\|_E : t\in F\}>1-\varepsilon$. No caso de se ter escolhido $\varepsilon=1/2$, vem $\|x_2-x_1\|_E>1/2$.

Voltamos a aplicar o lema, agora com $F=\langle x_1,x_2\rangle$, e prosseguimos indutivamente, escolhendo assim uma sucessão (x_n) nas condições pretendidas.

b) Se **E** tem dimensão finita, todo o conjunto limitado e fechado é compacto. Logo U_E é compacto.

Reciprocamente, suponhamos que U_E é compacto (logo sequencialmente compacto) e que **E** tem dimensão infinita. Usando a alínea anterior, podemos afirmar que existe (x_n) em **E** tal que

$\|x_n\|_E = 1$ e $\|x_n - x_m\|_E > 1/2$ se $n \neq m$. Então a sucessão (x_n) está em U_E e portanto tem que admitir uma subsucessão convergente, logo de Cauchy, o que entra em contradição com o facto de se ter $\|x_n - x_m\|_E > 1/2$ para $n \neq m$.

□

5. Proposição: *Se* $T \in \mathcal{K}(E)$ *e* $\lambda \neq 0$, *então* $Ker(\lambda I - T)$ *tem dimensão finita, onde* I *é a aplicação identidade em* E.

5. Demonstração: Ora $x \in Ker(\lambda I - T) \Leftrightarrow \lambda x = Tx \Leftrightarrow x = T(\lambda^{-1} x)$, atendendo a que $\lambda \neq 0$. Então, se $x \in U_E$ e $x \in Ker(\lambda I - T)$, tem-se $x \in \{Ty : \|y\|_E \leq |\lambda|^{-1}\}$, e portanto $\{x \in Ker(\lambda I - T) : \|x\|_E \leq 1\}$ está contido na imagem por T de um conjunto limitado em E. Utilizando a nota 1.a) e a hipótese $T \in \mathcal{K}(E)$, obtemos que $U_{Ker(\lambda I - T)}$ é compacto (atendendo a que se trata da intersecção de dois fechados contida num compacto). Finalmente, o corolário anterior permite tirar a conclusão.

□

6. Corolário: *Se* $T \in \mathcal{K}(E)$, $\lambda \neq 0$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *então* $\mathcal{K}_n = Ker(\lambda I - T)^n$ *tem dimensão finita.*

6. Demonstração: Como $(\lambda I - T)^n = \lambda^n I - n\lambda^{n-1} T + [n(n-1)/2]\, \lambda^{n-2} T^2 - \ldots + (-1)^n T^n$, e $S = n\lambda^{n-1} T - [n(n-1)/2]\, \lambda^{n-2} T^2 + \ldots - (-1)^n T^n$ é compacto (atendendo ao lema 2), então $(\lambda I - T)^n = \lambda^n I - S$, com $\lambda^n \neq 0$ e $S \in \mathcal{K}(E)$, e portanto a conclusão segue da proposição anterior.

□

7. Proposição: *Se* $T \in \mathcal{K}(E)$ *e* $\lambda \neq 0$, *então* $(\lambda I - T)E$ *é fechado.*

7. Demonstração: Como E é espaço C_1, é suficiente provar que $(\lambda I - T)E$ é sequencialmente fechado.

Assim, considere-se (x_n) em E tal que $(\lambda I-T)x_n \to z \in E$.

1ºcaso: Se (x_n) é limitada, usamos a compacidade de T para afirmarmos que existe $(x_{s(n)})$ subsucessão da anterior tal que $T x_{s(n)} \to y \in E$. Então $x_{s(n)} = \lambda^{-1}(\lambda\, x_{s(n)})$ $= \lambda^{-1}[(\lambda I-T)\, x_{s(n)} + T\, x_{s(n)}] \longrightarrow \lambda^{-1}(y+z)$, e portanto $z = \lim\, (\lambda I-T)\, x_{s(n)} =$ $(\lambda I-T)\,[\lambda^{-1}(y+z)] \in (\lambda I-T)E$.

2ºcaso: Se (x_n) não é limitada, podemos sem perda de generalidade supor que $(\lambda I-T)x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Para $n \in \mathbb{N}$ considere-se então $y_n \in Ker(\lambda I-T)$ tal que

(7.1) $\|x_n+y_n\|_E < 2\, dist\,[x_n, Ker(\lambda I-T)]$, e defina-se $z_n = x_n+y_n$.

Temos que $(\lambda I-T)z_n = (\lambda I-T)x_n \to z$, e vamos ver que (z_n) é limitada, o que permitirá concluir a demonstração, aplicando o 1ºcaso.

Assim, suponhamos que (z_n) não é limitada. Então é possível extrair uma subsucessão $(z_{s(n)})$ tal que $\|z_{s(n)}\| \to \infty$ e $T(\|z_{s(n)}\|^{-1} z_{s(n)}) \longrightarrow y \in E$, usando novamente o facto de T ser compacto. Logo $\lambda\|z_{s(n)}\|^{-1}z_{s(n)} - T(\|z_{s(n)}\|^{-1}z_{s(n)}) = \|z_{s(n)}\|^{-1}(\lambda I-T)z_{s(n)} \longrightarrow 0$, donde $\lambda\|z_{s(n)}\|^{-1}z_{s(n)} \longrightarrow y$ e portanto $\|z_{s(n)}\|^{-1}z_{s(n)} \longrightarrow \lambda^{-1}y$. Então $y = \lim T(\|z_{s(n)}\|^{-1}z_{s(n)}) = \lambda^{-1}Ty$, ou seja, $(\lambda I-T)y = 0$, ou ainda,

(7.2) $$y \in Ker(\lambda I-T).$$

Por outro lado, (7.1) implica que $dist\,[\|z_{s(n)}\|^{-1}z_{s(n)}, Ker(\lambda I-T)] =$ $dist\,[\|z_{s(n)}\|^{-1}x_{s(n)} + \|z_{s(n)}\|^{-1}y_{s(n)}, Ker(\lambda I-T)] = \|z_{s(n)}\|^{-1} dist\,[x_{s(n)}, Ker(\lambda I-T)]$ $> 1/2$, logo $dist\,[\lambda^{-1}y, Ker(\lambda I-T)] \geq 1/2$, ou seja, $dist\,[y, Ker(\lambda I-T)] \geq |\lambda|/2 > 0$, e portanto $y \in E \setminus Ker(\lambda I-T)$, o que contradiz (7.2).

□

8. Corolário: *Se* $T \in \mathcal{K}(E)$, $\lambda \neq 0$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *então* $\mathcal{R}_n = (\lambda I-T)^n E$ *é fechado.*

8. Demonstração: Na demonstração 6 vimos que $(\lambda I-T)^n = \lambda^n I - S$, onde

$S \in \mathcal{K}(E)$ e $\lambda^n \neq 0$. Assim o resultado sai imediatamente da proposição anterior.

□

A partir daqui e até ao fim do capítulo suporemos sempre que $T \in \mathcal{K}(E)$ e que $\lambda \neq 0$ (salvo indicação em contrário), e se considerarmos os espaços $\mathcal{K}_n$ e $\mathcal{R}_n$, $n \in \mathbb{N}$, suporemos que foram dados previamente T e λ nas condições mencionadas.

Decorre imediatamente das definições que as duas sucessões $(\mathcal{K}_n)$ e $(\mathcal{R}_n)$ são monótonas, respectivamente crescente e decrescente, isto é,

$$\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2 \subset \mathcal{K}_3 \subset \ldots$$

e

$$\mathcal{R}_1 \supset \mathcal{R}_2 \supset \mathcal{R}_3 \supset \ldots \quad .$$

Os dois próximos resultados estudam o caso das inclusões em sentido contrário.

9. Proposição: *A sucessão* $(\mathcal{K}_n)$ *é estacionária, i. e., existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\mathcal{K}_p = \mathcal{K}_n$ *para* $p > n$.

9. Demonstração: Provemos primeiro que $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_{n+1} \Rightarrow \mathcal{K}_{n+1} = \mathcal{K}_{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Suponhamos pois $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_{n+1}$. Então $x \in \mathcal{K}_{n+2} \Rightarrow (\lambda I - T)^{n+2} x = 0 \Rightarrow (\lambda I - T)^{n+1}(\lambda I - T)x = 0 \Rightarrow (\lambda I - T)x \in \mathcal{K}_{n+1} = \mathcal{K}_n$, logo $(\lambda I - T)^n (\lambda I - T)x = 0$, ou seja, $x \in \mathcal{K}_{n+1}$.

Portanto precisamos apenas provar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_{n+1}$.

Raciocinemos por absurdo, supondo que $\mathcal{K}_n \neq \mathcal{K}_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, ou seja, que $\mathcal{K}_n$ está estritamente contido em $\mathcal{K}_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Aplicamos então o lema de Riesz , escolhendo $x_{n+1} \in \mathcal{K}_{n+1}$ tal que

(9.1) $$\|x_{n+1}\|_E = 1 \quad \text{e} \quad \operatorname{dist}(x_{n+1}, \mathcal{K}_n) > 1/2 \ , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Considerando agora $m, n \in \mathbb{N}$ com $m > n > 1$, tem-se $Tx_n - Tx_m = Tx_n - \lambda x_n - (Tx_m - \lambda x_m) + \lambda x_n - \lambda x_m = -(\lambda I - T)x_n + (\lambda I - T)x_m + \lambda x_n - \lambda x_m = y_m - \lambda x_m$, com $y_m = -(\lambda I - T)x_n + (\lambda I - T)x_m + \lambda x_n \in \mathcal{K}_{m-1}$, pois $m-1 \geq n > n-1$. Assim , $\|Tx_n - Tx_m\|_E = \|y_m - \lambda x_m\|_E = |\lambda| \, \|\lambda^{-1} y_m - x_m\|_E > |\lambda|/2$, atendendo a (9.1) . Então de (Tx_n) não podemos extrair nenhuma subsucessão convergente, o que contradiz o facto de T ser compacto .

□

10. Proposição: *A sucessão* $(\mathcal{R}_n)$ *é estacionária.*

10. Nota: Omitimos a demonstração, pois é perfeitamente análoga à da proposição anterior .

11. Teorema: *Seja* $n \in \mathbb{N}$ *para o qual se tenha simultaneamente* $\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_{n+1}$ *e* $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_{n+1}$. *Então:*

a) $\mathcal{R}_n$ *e* $\mathcal{K}_n$ *são subespaços de* E *invariantes por* T ;

b) $(\lambda I - T)|_{\mathcal{R}_n}$ *é bijectivo e* $(\lambda I - T)|_{\mathcal{K}_n}$ *é nilpotente ;*

c) $E = \mathcal{R}_n \oplus \mathcal{K}_n$.

11. Demonstração: a) Queremos provar que $T\mathcal{R}_n \subset \mathcal{R}_n$ e que $T\mathcal{K}_n \subset \mathcal{K}_n$.

Ora

(11.1) $T\mathcal{R}_n = T(\lambda I-T)^n E$ e $(\lambda I-T)^n T E \subset (\lambda I-T)^n E = \mathcal{R}_n$.

Se desenvolvermos $(\lambda I-T)^n$ como na demonstração 6 , vemos facilmente que T e $(\lambda I-T)^n$ são permutáveis. Este facto juntamente com (11.1) permite concluir que $T\mathcal{R}_n \subset \mathcal{R}_n$.

Relativamente à outra inclusão , temos que $x \in \mathcal{K}_n \Rightarrow (\lambda I-T)^n x = 0 \Rightarrow T(\lambda I-T)^n x = 0$. Usando novamente a permutabilidade de T e $(\lambda I-T)^n$, obtemos $(\lambda I-T)^n T x = 0$ e portanto $Tx \in \mathcal{K}_n$.

b) A alínea anterior implica obviamente que $\mathcal{R}_n$ e $\mathcal{K}_n$ são subespaços de **E** invariantes por $\lambda I-T$, e portanto <u>subentende-se que os conjuntos de chegada das restrições</u> $(\lambda I-T)_{|\mathcal{R}_n}$ <u>e</u> $(\lambda I-T)_{|\mathcal{K}_n}$ <u>sejam respectivamente</u> $\mathcal{R}_n$ <u>e</u> $\mathcal{K}_n$.

Como , para $x \in \mathcal{K}_n$, $[(\lambda I-T)_{|\mathcal{K}_n}]^n x = (\lambda I-T)^n x = 0$, então $(\lambda I-T)_{|\mathcal{K}_n}$ é nilpotente .

Por seu lado, $(\lambda I-T)\mathcal{R}_n = (\lambda I-T)(\lambda I-T)^n E = \mathcal{R}_{n+1} = \mathcal{R}_n$, logo $(\lambda I-T)_{|\mathcal{R}_n}$ é sobrejectivo . É também injectivo , pois se $x \in \mathcal{R}_n$ e $(\lambda I-T)x = 0$, então $x = (\lambda I-T)^n y$, para $y \in E$, e $(\lambda I-T)^{n+1} y = (\lambda I-T)x = 0$, donde $y \in \mathcal{K}_{n+1} = \mathcal{K}_n$ e portanto $x = (\lambda I-T)^n y = 0$.

c) Precisamos provar que $E = \mathcal{R}_n + \mathcal{K}_n$ e que $\mathcal{R}_n \cap \mathcal{K}_n = \{0\}$.

Dado que , obviamente , $\mathcal{R}_n + \mathcal{K}_n \subset E$, provemos então a inclusão contrária . Ora $x \in E \Rightarrow (\lambda I-T)^n x \in \mathcal{R}_n = \mathcal{R}_{2n}$, logo $(\lambda I-T)^n x = (\lambda I-T)^{2n} y$, para $y \in E$, ou seja , $(\lambda I-T)^n [\, x-(\lambda I-T)^n y \,] = 0$ e portanto $k = x-(\lambda I-T)^n y \in \mathcal{K}_n$. Assim

$x = k + (\lambda I - T)^n y$, com $k \in \mathcal{K}_n$ e $(\lambda I - T)^n y \in \mathcal{R}_n$, o que prova que $E \subset \mathcal{R}_n + \mathcal{K}_n$.

Relativamente à intersecção, é claro que $\{0\} \subset \mathcal{R}_n \cap \mathcal{K}_n$. Por outro lado, $x \in \mathcal{R}_n \cap \mathcal{K}_n \Rightarrow (\lambda I - T)^n x = 0$ e $x = (\lambda I - T)^n y$, para algum $y \in E$, donde $(\lambda I - T)^{2n} y = 0$ e portanto $y \in \mathcal{K}_{2n} = \mathcal{K}_n$. Então $x = (\lambda I - T)^n y = 0$.

□

11. Nota: As demonstrações da alínea a) e do facto de $(\lambda I - T)_{|\mathcal{K}_n}$ ser nilpotente não precisaram das hipóteses $\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_{n+1}$ e $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_{n+1}$. Além disso, uma observação atenta da demonstração mostra que o teorema é válido mesmo considerando $\lambda \in \mathbb{C}$ e $T \in \mathbf{L}(E)$ em vez de $\lambda \neq 0$ e $T \in \mathbf{K}(E)$.

12. Corolário: *As sucessões* $(\mathcal{K}_n)$ *e* $(\mathcal{R}_n)$ *tornam-se estacionárias para o mesmo valor de* $n \in \mathbb{N}$.

12. Demonstração: Sendo $n(k) = \min\{n \in \mathbb{N}: \mathcal{K}_n = \mathcal{K}_{n+1}\}$ e $n(r) = \min\{n \in \mathbb{N}: \mathcal{R}_n = \mathcal{R}_{n+1}\}$, pretendemos provar que $n(k) = n(r)$.

Repare-se que definindo $p = \max\{n(k), n(r)\}$ verifica-se que $\mathcal{K}_p = \mathcal{K}_{p+1}$ e $\mathcal{R}_p = \mathcal{R}_{p+1}$, logo o teorema anterior permite-nos afirmar que

(12.1) $$(\lambda I - T)_{|\mathcal{R}_p} \text{ é bijectiva} .$$

Supondo então $x \in \mathcal{K}_{n(r)+1}$ temos que $(\lambda I - T)^{n(r)+1} x = 0$, ou seja, $(\lambda I - T)(\lambda I - T)^{n(r)} x = 0$; como $\mathcal{R}_{n(r)} = \mathcal{R}_p$, vem $(\lambda I - T)^{n(r)} x \in \mathcal{R}_p$, e portanto $(\lambda I - T)_{|\mathcal{R}_p} (\lambda I - T)^{n(r)} x = 0$, o que implica que $(\lambda I - T)^{n(r)} x = 0$, atendendo a (12.1), ou seja, $x \in \mathcal{K}_{n(r)}$.

Assim $\mathcal{K}_{n(r)} = \mathcal{K}_{n(r)+1}$, logo

(12.2) $$n(k) \leqq n(r) \quad ,$$

e a partir daqui o caso $n(r)=1$ fica resolvido.

Supondo então $n(r)>1$, sabemos que $\mathcal{R}_{n(r)-1}$ contém estritamente $\mathcal{R}_{n(r)}$, logo podemos considerar $z \in \mathcal{R}_{n(r)-1} \setminus \mathcal{R}_{n(r)}$ e tem-se $(\lambda I-T)z \in \mathcal{R}_{n(r)}$; como $n(k) \leqq n(r)$, o teorema 11 permite-nos afirmar que $(\lambda I-T)_{|\mathcal{R}_{n(r)}}$ é bijectiva e portanto existe $y \in \mathcal{R}_{n(r)}$ tal que

(12.3) $$(\lambda I-T)y = (\lambda I-T)z \quad \text{e , obviamente ,} \quad z \neq y \; .$$

Sejam agora $y', z' \in E$ tais que $y = (\lambda I-T)^{n(r)}y'$ e $z = (\lambda I-T)^{n(r)-1}z'$, e considere-se $x = (\lambda I-T)y' - z'$ — elemento de E . Usando (12.3) obtemos $(\lambda I-T)^{n(r)}x = (\lambda I-T)^{n(r)+1}y' - (\lambda I-T)^{n(r)}z' = (\lambda I-T)y - (\lambda I-T)z = 0$ e $(\lambda I-T)^{n(r)-1}x = y - z \neq 0$, donde $x \in \mathcal{K}_{n(r)} \setminus \mathcal{K}_{n(r)-1}$. Assim $\mathcal{K}_{n(r)-1}$ está estritamente contido em $\mathcal{K}_{n(r)}$ e portanto $n(k) \geqq n(r)$.

Conjugando com (12.2) obtemos finalmente a conclusão.

□

12. Nota: A observação desta demonstração mostra-nos que este corolário é-o apenas de primeira parte da alínea b) do teorema 11 .

13. Corolário: $\lambda I-T$ *é injectivo* sse *é sobrejectivo* .

13. Demonstração: Repare-se que se $\lambda I-T$ é injectivo então $\mathcal{K}_1 = \mathrm{Ker}(\lambda I-T) = \{0\}$ e portanto $x \in \mathcal{K}_2 \Leftrightarrow (\lambda I-T)x \in \mathcal{K}_1 \Rightarrow (\lambda I-T)x = 0 \Rightarrow x \in \mathcal{K}_1$;

logo $\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_1$, o que significa que $n(k)=1$. Por outro lado, se $\lambda\mathbf{I}-T$ é sobrejectivo e $x \in \mathcal{R}_1$ então $x = (\lambda\mathbf{I}-T)y$, para $y \in \mathbf{E} = (\lambda\mathbf{I}-T)\mathbf{E}$, logo $x = (\lambda\mathbf{I}-T)(\lambda\mathbf{I}-T)y'$, para $y' \in \mathbf{E}$, ou seja , $x \in \mathcal{R}_2$, e portanto $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$, o que significa que $n(r)=1$.

Assim, usando o corolário anterior obtemos

$$\lambda\mathbf{I}-T \text{ injectivo } \Rightarrow n(k)=1 \Leftrightarrow n(r)=1 \Leftarrow \lambda\mathbf{I}-T \text{ sobrejectivo} .$$

Além disso, em qualquer das hipóteses o teorema 11 permite escrever $\mathbf{E} = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{K}_1$.

Então

$$\left.\begin{array}{c} \lambda\mathbf{I}-T \quad \textbf{injectivo} \\ \Updownarrow \\ \mathcal{K}_1 = \{0\} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \lambda\mathbf{I}-T \quad \textbf{sobrejectivo} \\ \Updownarrow \\ \mathbf{E} = \mathcal{R}_1 \end{array}\right.$$

□

<u>Durante o resto do capítulo supõe-se que a álgebra de Banach $\mathbf{L}(E)$ é complexa</u>.

14. Definição: Dado $T \in \mathbf{L}(E)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, dizemos que λ é um *valor próprio* de T se $\lambda\mathbf{I}-T$ não é injectivo ; qualquer vector $0 \neq x \in \mathbf{E}$ que anule $\lambda\mathbf{I}-T$ diz-se um *vector próprio* de T associado a λ .

É evidente que todo o valor próprio de T é um elemento do espectro $\sigma(T)$ de T , mas o contrário nem sempre se verifica . Sabemos, no entanto, que se **E** tiver dimensão finita então todo o elemento do espectro é um valor próprio . No caso de **E** ser de dimensão infinita, só para operadores especiais é que poderemos ter resultados análogos .

15. Corolário: *O espectro* $\sigma(T)$ *dum operador compacto* $T \in \mathbf{K}(E)$ *só tem valores próprios, com única possível excepção do ponto* zero .

15. Demonstração: Suponhamos que $\lambda \neq 0$ não é valor próprio de T, o que significa que

$\lambda I - T$ é injectivo. O corolário 13 diz-nos então que $\lambda I - T$ é também sobrejectivo. Assim $\lambda I - T$ é uma bijecção ; para ser invertível é apenas necessário que a aplicação inversa $(\lambda I - T)^{-1}$ seja contínua (para pertencer a $\mathcal{L}(E)$). Mas isso é consequência imediata do teorema da aplicação aberta, dado que E é completo — cf. 4 do apêndice 1 .

Então $\lambda \in \rho(T)$.

$\square$

16. Lema: *Sejam* M_1, M_2 *e* E *espaços vectoriais tais que* $E = M_1 \oplus M_2$. *Sejam* S_1, S_2 *aplicações lineares em* M_1, M_2 , *respectivamente*, *e* S *a extensão linear a* E . *Então:*

a) $\operatorname{Ker} S = \operatorname{Ker} S_1 \oplus \operatorname{Ker} S_2$;

b) $SE = S_1 M_1 \oplus S_2 M_2$.

16. Demonstração: **a)** $x \in \operatorname{Ker} S \Leftrightarrow Sx = 0$

$$\Leftrightarrow Sy + Sz = 0 \text{ , com } x = y + z \text{ , } y \in M_1, z \in M_2$$

$$\Leftrightarrow Sy = Sz = 0 \text{ , com } x = y + z \text{ , } y \in M_1, z \in M_2$$

$$\Leftrightarrow y \in \operatorname{Ker} S_1 \text{ e } z \in \operatorname{Ker} S_2 \text{ , com } x = y + z$$

$$\Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker} S_1 + \operatorname{Ker} S_2 \text{ .}$$

Além disso, $x \in \operatorname{Ker} S_1 \cap \operatorname{Ker} S_2 \Rightarrow x \in M_1 \cap M_2 = \{0\} \Rightarrow x = 0$.

b) $x \in SE \Leftrightarrow x = Sw$, com $w \in E$

$$\Leftrightarrow x = Sy + Sz \text{ , com } w = y + z \text{ , } y \in M_1, z \in M_2$$

$$\Leftrightarrow x \in S_1 M_1 + S_2 M_2 \text{ .}$$

Além disso, $x \in S_1 M_1 \cap S_2 M_2 \Rightarrow x \in M_1 \cap M_2 = \{0\} \Rightarrow x = 0$.

$\square$

17. Corolário: *Todo o ponto não nulo de* $\sigma(T)$ *é isolado em* $\sigma(T)$, *caso* T *seja compacto em* E .

17. Demonstração: Seja $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$ e consideremos $\mathcal{R}_n$ e $\mathcal{K}_n$ como no teorema 11. Então $\lambda I|_{\mathcal{R}_n} - T|_{\mathcal{R}_n} = (\lambda I - T)|_{\mathcal{R}_n}$ é bijectivo ; além disso, como $\mathcal{R}_n$ é fechado num completo — e portanto é também completo — , o teorema da aplicação aberta — cf. 4 do apêndice 1 — permite afirmar que $\lambda \in \rho(T|_{\mathcal{R}_n})$.

Como o conjunto resolvente é aberto — cf. teorema I.12 — , existe uma vizinhança de λ tal que para $\mu \neq \lambda$ nessa vizinhança se tem

(17.1) $$\mu \in \rho(T|_{\mathcal{R}_n}) \quad ,$$

e além disso $\mu I - T = -[(\lambda - \mu)I - (\lambda I - T)]$ e portanto

(17.2) $$(\mu I - T)|_{\mathcal{K}_n} = -[(\lambda - \mu)I|_{\mathcal{K}_n} - (\lambda I - T)|_{\mathcal{K}_n}] \quad .$$

Do teorema 11 sabemos ainda que $(\lambda I - T)|_{\mathcal{K}_n}$ é nilpotente. Então, usando a fórmula do raio espectral — cf. teorema I.17 — e o facto do espectro ser sempre diferente do vazio — cf. teorema I.12 — , podemos afirmar que $\sigma[(\lambda I - T)|_{\mathcal{K}_n}] = \{0\}$ (o mesmo se passa para qualquer operador nilpotente).

Então, com $\lambda - \mu \neq 0$, temos que $\lambda - \mu \in \rho[(\lambda I - T)|_{\mathcal{K}_n}]$, pelo que o primeiro membro da igualdade (17.2) é invertível e portanto

(17.3) $$\mu \in \rho(T|_{\mathcal{K}_n}) \quad .$$

Ora (17.1) e (17.3) implicam que $(\mu I - T)|_{\mathcal{R}_n}$ e $(\mu I - T)|_{\mathcal{K}_n}$ são bijectivos ; como $E = \mathcal{R}_n \oplus \mathcal{K}_n$ (ainda pelo teorema 11), do lema anterior segue que também $\mu I - T$ é bijectivo, e novamente o teorema da aplicação aberta se aplica para afirmar que $\mu \in \rho(T)$.

□

18. Corolário: *Se* $T \in \mathcal{K}(E)$, $\sigma(T)$ *é finito ou infinito numerável. Neste último caso,* $0 \in \sigma(T)$ *e é o único ponto de acumulação no espectro de* T .

18. Demonstração: Sabemos que $\sigma(T)$ não é vazio — cf. teorema I.12 .

Repare-se agora que $\sigma(T)\backslash\{0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}[\,\sigma(T) \cap \{\lambda : |\lambda| \geq 1/n\}\,]$ e que cada conjunto da união é no máximo finito, pois caso contrário a compacidade de $\sigma(T)$ — cf. teorema I.12 — iria contradizer o corolário 17. Então, se $\sigma(T)$ não for finito, terá que ser infinito numerável.

Neste último caso, novamente a compacidade de $\sigma(T)$ implica a existência de pelo menos um ponto de acumulação em $\sigma(T)$. Como não pode ser nenhum elemento diferente de zero (atendendo ao corolário 17), então 0 tem que pertencer ao espectro e ser o seu único ponto de acumulação.

□

18. Nota: Se $T \in \mathcal{K}(E)$ e E tem dimensão infinita, então $0 \in \sigma(T)$. De facto, se $0 \notin \sigma(T)$, T seria invertível, logo $U_E = (U_E)^- = [T^{-1}T(U_E)]^- = T^{-1}[T(U_E)]^-$; como a compacidade de T significa que $[T(U_E)]^-$ é compacto, então também U_E seria compacto, o que contradiz o corolário 4.b).

19. Definição: Seja $T \in \mathcal{L}(E)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ um valor próprio de T. Chamamos *multiplicidade* (algébrica) de λ a $k = \dim[\,\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Ker}\,(\lambda I - T)^n\,] \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

19. Nota: No caso de $T \in \mathcal{K}(E)$ e $\lambda \neq 0$, sabemos que $\mathcal{K}_n = \mathrm{Ker}\,(\lambda I - T)^n$ tem dimensão finita, $n \in \mathbb{N}$, e que a partir de certo valor $n(k)$ de n os $\mathcal{K}_n$, $n \geq n(k)$, vêm iguais — cf. corolário 6 e proposição 9. Assim, teremos neste caso $k = \dim \mathrm{Ker}\,(\lambda I - T)^{n(k)} < \infty$, atendendo também a que a sucessão $(\mathcal{K}_n)$ é crescente. Em particular, *todo o elemento não nulo de* $\sigma(T)$ *tem multiplicidade finita* — cf. corolário 15.

A propriedade enunciada no fim da nota anterior vai-nos permitir obter uma certa *ordenação do espectro* dum operador compacto, ordenação essa que será usada futuramente.

Como um tal espectro é no máximo numerável, é possível escrevê-lo em sucessão

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n, \ldots \quad ,$$

desde que se convencione que primeiro se ordenem os elementos não nulos de $\sigma(T)$ — se os houver — e depois se ponham os restantes termos da sucessão iguais a zero, mesmo que zero não pertença ao espectro.

Vamos ver então como se ordenam os elementos diferentes de zero — que são valores próprios, pelo corolário 15.

O primeiro é um dos de módulo máximo (que existe porque $\sigma(T)$ é compacto), portanto tem-se $|\lambda_1| = r(T)$. Os elementos seguintes serão a repetição de λ_1 até obtermos tantos λ_1 como indica a sua multiplicidade (que é finita). Se houver valores próprios diferentes de λ_1 que tenham o mesmo módulo que λ_1, serão esses que virão a seguir, em número igual ao da respectiva multiplicidade (tal como no caso de λ_1). Claro que acabamos por esgotar os valores próprios distintos com módulo igual a $|\lambda_1|$; caso contrário a compacidade de $\sigma(T)$ permitir-nos-ia obter uma sucessão convergente para um elemento do espectro com módulo igual a $|\lambda_1| \neq 0$, o que já sabemos ser contraditório — cf. corolário 17.

Designando por A o conjunto dos valores próprios já ordenados, restam-nos os elementos de $\sigma(T) \setminus A$. Como A é aberto em $\sigma(T)$ (pois só tem pontos isolados), $\sigma(T) \setminus A$ é fechado em $\sigma(T)$ compacto, logo é compacto e portanto existe valor próprio de $\sigma(T) \setminus A$ com módulo máximo neste conjunto. A ordenação dos valores próprios com esse módulo segue o processo já descrito atrás.

Continuamos deste modo indefinidamente ou até esgotarmos os elementos não nulos de $\sigma(T)$. Neste último caso, referimos já que os restantes termos da sucessão se põem iguais a zero. No primeiro caso, $\sigma(T) \setminus \{0\}$ é infinito numerável e *todos os seus elementos surgem na sucessão assim construída* (atendendo novamente à compacidade de $\sigma(T)$).

É de notar que a ordenação não fica completamente determinada pelas exigências impostas, mas que *qualquer ordenação escolhida tem a mesma sucessão dos módulos*, e o importante nas relações que estabeleceremos é não haver ambiguidade nesta última sucessão.

20. Nota: Para facilidade de referência, designaremos por *sucessão dos valores próprios* do operador compacto que estivermos a considerar, qualquer sucessão construída do modo indicado ou obtida por alteração da ordem dos termos desta, desde que se mantenha a sucessão dos módulos.

20. Corolário: *Se* $T \in \mathcal{K}(E)$, *a sua sucessão dos valores próprios converge para zero.*

20. Demonstração: A respectiva sucessão dos módulos é decrescente e limitada inferiormente, logo convergente, e o seu limite só pode ser zero. Consequentemente a sucessão dos valores próprios também converge para zero.

□

21. Teorema de Shauder: *Seja* T *um elemento do espaço de Banach real ou complexo* $\mathcal{L}(E,F)$. *Então* T *é compacto* sse T' *é compacto (com* T' *o dual de* T*).*

21. Demonstração: Suponhamos que T é compacto. Então TU_E é relativamente compacto, o que significa que $K=(TU_E)^-$ é compacto.

Considere-se $C(K)$ o espaço das funções escalares contínuas em K com a norma do supremo, e o seu subconjunto $\mathfrak{F} = \{ f \in C(K) : \exists y' \in F' \text{ tal que } \|y'\|_{F'} \leqq 1 \text{ e } y'_{|K}=f \}$. Como K é um espaço métrico compacto, estamos na hipótese do teorema de Arzelà-Ascoli — cf. 5 do apêndice 1 — e portanto podemos afirmar que $\mathfrak{F}$ *é relativamente compacto em* $C(K)$ sse *é limitado (em* $C(K)$*) e equicontínuo.*

Lembramos que a *equicontinuidade* de $\mathfrak{F}$ significa que $\forall s \in K, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 :$ $f \in \mathfrak{F} \wedge \|t-s\|_F < \delta \Rightarrow |f(t)-f(s)| < \varepsilon$.

Como $|f(t)-f(s)| = |y'(t)-y'(s)| = |y'(t-s)| \leqq \|y'\|_{F'} \cdot \|t-s\|_F \leqq \|t-s\|_F$, basta escolher $\delta = \varepsilon$ para provarmos que $\mathfrak{F}$ é de facto equicontínuo.

Também é fácil ver que $\mathfrak{F}$ é limitado em $C(K)$: $\forall f \in \mathfrak{F}, \|f\|_{C(K)} = \sup\{ |f(t)| : t \in K \}$ $= \sup\{|y'(t)| : t \in K\} \leqq \sup\{ \|y'\|_{F'} \cdot \|t\|_F : t \in K\} \leqq \sup\{\|Tx\|_F : x \in U_E\} = \|T\|$.

Aplicamos então o teorema de Arzelà-Ascoli para afirmarmos que $\mathfrak{F}$ tem fecho compacto.

Assim, dada (y'_n) sucessão em $U_{F'}$, $(y'_{n|K})$ é uma sucessão em $\mathfrak{F}$ e portanto existe subsucessão $(y'_{s(n)}|_K)$ convergente em $C(K)$, logo de Cauchy. Ora $\|y'_{s(n)}|_K - y'_{s(m)}|_K\|_{C(K)}$ $= \sup\{|(y'_{s(n)} - y'_{s(m)})(t)| : t \in K\} = \sup\{|(y'_{s(n)} - y'_{s(m)})Tx| : x \in U_E\} =$ $\sup\{|T'(y'_{s(n)} - y'_{s(m)})x| : x \in U_E\} = \|T'y'_{s(n)} - T'y'_{s(m)}\|_{E'}$, logo também $(T'y'_{s(n)})$ é de Cauchy. Como $\mathbf{E'}$ é completo, esta subsucessão converge.

Então T' é compacto.

Reciprocamente:

Suponhamos T' compacto. Aplicando a primeira parte desta demonstração, também T'' é compacto. Como $J_F T = T'' J_E$, com $J_E: \mathbf{E} \to \mathbf{E''}$ e $J_F: \mathbf{F} \to \mathbf{F''}$ aplicações canónicas, então $[J_F(TU_E)]^- = [T''(J_E U_E)]^- \subset [T''(U_{E''})]^-$, logo $[J_F(TU_E)]^-$ é compacto e portanto $\forall \varepsilon > 0, \exists\, n \in \mathbb{N}$, $y''_i \in J_F(TU_E)$, $i = 1, \ldots, n$, tais que $J_F(TU_E) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (y''_i + \varepsilon U_{F''})$. Sejam $y_i \in TU_E$ tais que $J_F y_i = y''_i$, $i = 1, \ldots, n$. Então

$$
\begin{aligned}
x \in TU_E \Rightarrow J_F x \in J_F(TU_E) &\Rightarrow J_F x \in y''_i + \varepsilon U_{F''} \quad , \text{ para algum } i \in \{1, \ldots, n\}, \\
&\Rightarrow \|J_F x - J_F y_i\| \leqq \varepsilon \qquad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \\
&\Rightarrow \|x - y_i\| \leqq \varepsilon \qquad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \\
&\Rightarrow x \in y_i + \varepsilon U_F \qquad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad ,
\end{aligned}
$$

e portanto $TU_E \subset \bigcup_{i=1}^{n} (y_i + \varepsilon U_F)$, o que significa que TU_E é totalmente limitado. Como $\mathbf{F}$ é completo, TU_E é também relativamente compacto — cf. [6], p. 22 —, ou seja, T é compacto.

□

III. NÚMEROS-S

Durante este capítulo, **H** e **K** designam sempre espaços de Hilbert, enquanto **E** e **F** são sempre considerados espaços de Banach. Além disso, **H**, **K**, **E**, **F** $\neq \{0\}$ e todos os espaços considerados são complexos, salvo indicação em contrário.

1. Números singulares

Vamos recordar a definição de operador adjunto.

No contexto de espaços de Hilbert (reais ou complexos), dado $T \in \mathcal{L}(H,K)$ podemos definir $T^* \in \mathcal{L}(K,H)$ à custa do operador dual $T' \in \mathcal{L}(K',H')$, através das bijecções isométricas que o teorema da representação de Riesz — cf. 6 do apêndice 1 — permite estabelecer entre um espaço de Hilbert e o seu dual. Designando essas isometrias por $B_H : H \to H'$ e $B_K : K \to K'$, definimos

(0.1) $$T^* = B_H^{-1} T' B_K \quad ,$$

o que é equivalente a afirmar que $(Tx,y)_K = (x, T^*y)_H$, para $x \in H, y \in K$, com $(.,.)_K$ e $(.,.)_H$ designando os produtos internos em **K** e **H**, respectivamente, mantendo-se esta notação daqui para a frente, omitindo índices quando não houver perigo de confusão.

1. Proposição: *Seja* T *um elemento do espaço real ou complexo* $\mathcal{L}(H,K)$. *Então* T *é compacto* sse T^* *é compacto*.

1. Demonstração: Se T é compacto, sai imediatamente de (0.1), do teorema de Schauder — cf. teorema II.21 — e do lema II.2 que T^* é compacto.

Como $T^{**} = T$, então também T^* compacto $\Rightarrow$ T compacto.

□

2. Definição: Dizemos que $T \in \mathcal{L}(H)$ é *auto-adjunto* se $T=T^*$.

O seguinte resultado tem verificação imediata:

3. Lema (cf. [32], p. 345)**:** *Os valores próprios de um operador auto-adjunto são* reais, *e vectores próprios associados a valores próprios distintos são* ortogonais.

4. Lema: *Se* T *é auto-adjunto, o seu raio espectral é* $r(T) = \|T\|$.

4. Demonstração: Como $\|T^*T\| = \|T\|^2$ — cf. [32], p. 243 — então $T=T^* \Rightarrow \|T^2\| = \|T\|^2$, logo $\|T^p\| = \|T\|^p$ para todo $p=2^n$, com $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, sabemos da fórmula do raio espectral que $\lim_n \|T^n\|^{1/n}$ existe e é igual a $r(T)$. Assim, $r(T) = \lim_n \|T^n\|^{1/n} = \lim_p \|T^p\|^{1/p} = \lim_p \|T\| = \|T\|$.

□

Considerando agora operadores compactos em espaços de Hilbert, podemos usar a teoria exposta no capítulo anterior e afirmar o seguinte:

5. Proposição: *Todos os valores não nulos do espectro* $\sigma(T)$ *dum operador compacto* $T \in \mathcal{K}(H)$ *são valores próprios isolados em* $\sigma(T)$, *de multiplicidade finita, que formam um conjunto finito ou infinito numerável. Neste último caso,* $0 \in \sigma(T)$ *e é (o único) ponto de acumulação no espectro de* T. *Além disso, a sucessão dos valores próprios de* T *converge para* 0.

Considerando o caso em que $T \in \mathcal{L}(H)$ é simultaneamente compacto e auto-adjunto, verifica-se o seguinte:

6. Proposição (teorema espectral) : *Seja* $I = \{n \in \mathbb{N} : \lambda_n \neq 0\}$, *com* $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *a sucessão dos valores próprios de* $T \in \mathcal{K}(H)$ *auto-adjunto e não nulo. Então existe um* *conjunto ortonormado* $\{x_n: n\in I\} \subset \mathbf{H}$ *de vectores próprios de* T *tal que*

$$Tx = \Sigma_{n\in I}\ \lambda_n(x, x_n)\, x_n \qquad , \qquad para\ \ x\in\mathbf{H} \ .$$

Antes de demonstrarmos este resultado, estabelecemos o seguinte:

7. Lema: *Sejam* **H** e **K** *espaços de Hilbert reais ou complexos.*

Se $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ *é decrescente em módulo com limite* 0 ;

$\{x_n: n\in\mathbb{N}\} \subset \mathbf{H}$, $\{y_n: n\in\mathbb{N}\} \subset \mathbf{K}$ *são conjuntos ortonormados;*

$S:\mathbf{H}\to\mathbf{K}$ *é definido por* $Sx = \Sigma_{n=1,\dots,\infty} s_n\,(x, x_n)_{\mathbf{H}}\, y_n$, *para* $x\in\mathbf{H}$,

então S *é compacto.*

7. Demonstração: Sejam $S_N = \Sigma_{n=1,\dots,N}\ s_n\,(.\,, x_n)_{\mathbf{H}}\, y_n$, para $N\in\mathbb{N}$, e $S_0=0$.

As aplicações S e S_N , $N\in\mathbb{N}_0$, são obviamente lineares. Além disso, usando uma generalização do teorema de Pitágoras — cf. 7 do apêndice 1 — e a desigualdade de Bessel , obtemos $\|(S-S_N)x\|_{\mathbf{K}}^2 = \|\Sigma_{n=N+1,\dots,\infty} s_n\,(x, x_n)_{\mathbf{H}}\, y_n\|_{\mathbf{K}}^2 = \Sigma_{n=N+1,\dots,\infty} |s_n|^2\, |(x, x_n)_{\mathbf{H}}|^2$ $\leqq |s_{N+1}|^2\, \Sigma_{n=N+1,\dots,\infty} |(x, x_n)_{\mathbf{H}}|^2 \leqq |s_{N+1}|^2\, \|x\|_{\mathbf{H}}^2$, logo $\|S-S_N\| \leqq |s_{N+1}|$ e $S-S_N \in \mathcal{L}(\mathbf{H},\mathbf{K})$. Para N=0 vem então $S\in\mathcal{L}(\mathbf{H},\mathbf{K})$; por outro lado, como $S_N = S-(S-S_N)$, também $S_N\in\mathcal{L}(\mathbf{H},\mathbf{K})$. Como cada S_N tem dimensão finita , então é compacto , ou seja, $S_N\in\mathcal{K}(\mathbf{H},\mathbf{K})$.

Para concluir a demonstração basta reparar que $\lim_N \|S-S_N\| \leqq \lim_N |s_{N+1}| = 0$ e que $\mathcal{K}(\mathbf{H},\mathbf{K})$ é fechado em $\mathcal{L}(\mathbf{H},\mathbf{K})$ — cf. lema II.2 .

□

7. Nota: O resultado do lema anterior continua válido se em vez de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nas condições do enunciado se suposer apenas $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ com limite 0 .

6. Demonstração: Para todo o operador $S \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjunto, verifica-se que $\|Sx\|^2 = (Sx,Sx) = (S^2x,x)$, para $x \in H$, o que implica que $\mathrm{Ker}\, S^2 \subset \mathrm{Ker}\, S$ e portanto $\mathrm{Ker}\, S^2 = \mathrm{Ker}\, S$.

Ora $(\lambda I - T)^* = \bar{\lambda} I - T = \lambda I - T$ para $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, pois λ é real — cf. lema 3 e proposição 5 —, logo $\lambda I - T$ é auto-adjunto e portanto $\mathrm{Ker}\,(\lambda I - T)^2 = \mathrm{Ker}\,(\lambda I - T)$, ou $\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_1$, se usarmos a notação do capítulo II — cf. corolário II.6. Então a multiplicidade de $\lambda \neq 0$ é $\dim \mathrm{Ker}\,(\lambda I - T)$ — cf. nota II.19.

Sabemos que vectores próprios associados a valores próprios distintos são ortogonais — cf. lema 3. Além disso, para cada valor próprio $\lambda \neq 0$, podemos arranjar tantos vectores próprios ortonormados quantos indica a multiplicidade de λ, pois esta é $\dim \mathrm{Ker}\,(\lambda I - T)$ — podemos usar, por exemplo, o processo de Gram-Schmidt. Portanto, a par da sequência dos valores próprios não nulos de T, $(\lambda_n)_{n \in I}$, podemos considerar uma sequência de vectores próprios ortonormados $(x_n)_{n \in I}$, em que cada x_n está associado a λ_n, $n \in I$.

Considere-se T_0 *definido* por

(6.1) $$T_0 x = \sum_{n \in I} \lambda_n (x, x_n)\, x_n \quad , \qquad x \in H \quad .$$

Repare-se, primeiro que tudo, que $I \neq \emptyset$, pois o lema 4 diz-nos que $r(T) = \|T\|$ e nós estamos a supor $T \neq 0$. Provemos em seguida que, se $I = \mathbb{N}$, a série acima é de facto convergente. Sabemos que isso é verdade se e só se $\sum_{n \in I} |\lambda_n|^2 |(x, x_n)|^2 \leqq |\lambda_1|^2 \sum_{n \in I} |(x, x_n)|^2$ é convergente — cf. [32], p. 86 —, e isto é realmente verdade, como decorre da desigualdade de Bessel. Então T_0 está de facto *bem definido* por (6.1).

Atendendo ao lema 7, T_0 é compacto. Além disso, para $x, y \in H$ temos $(x, T_0^* y) = (T_0 x, y) = (\sum_{n \in I} \lambda_n (x, x_n)\, x_n , y) = \sum_{n \in I} \lambda_n (x, x_n)(x_n , y) = (x, \sum_{n \in I} \bar{\lambda}_n \overline{(x_n , y)}\, x_n) = (x, \sum_{n \in I} \lambda_n (y, x_n)\, x_n) = (x, T_0 y)$, logo $T_0^* = T_0$ e portanto T_0 é auto-adjunto.

Sendo T e T_0 compactos e auto-adjuntos, o mesmo sucede com $T - T_0$.

Raciocinemos agora por absurdo.

Suponhamos que $T-T_0 \neq 0$.

Então o lema 4 permite afirmar que $r(T-T_0) = \|T-T_0\| \neq 0$ e portanto existe valor próprio $\mu \neq 0$ de $T-T_0$. Consideremos $0 \neq z \in \mathbf{H}$ tal que

(6.2) $$(T-T_0)z = \mu z \quad .$$

Ora $(T-T_0)x_m = Tx_m - \sum_{n \in I} \lambda_n (x_m, x_n) x_n = Tx_m - \lambda_m x_m = 0$, $m \in I$, logo $0 = (z, (T-T_0)x_m) = ((T-T_0)z, x_m) = \mu(z, x_m)$, $m \in I$, e portanto

(6.3) $$(z, x_m) = 0 \quad , \quad m \in I \quad ,$$

já que $\mu \neq 0$. Assim, $T_0 z = 0$, e então de (6.2) vem $Tz = \mu z$, logo μ é valor próprio de T e z é vector próprio de T.

Então, por um lado $z \in \mathrm{Ker}(\mu \mathbf{I} - T)$; por outro lado, como $\mu \neq 0$, $\mu \in \{\lambda_n : n \in I\}$, e portanto de (6.3) vem também $z \in [\mathrm{Ker}(\mu \mathbf{I} - T)]^{\perp}$. Assim teríamos $z \in \mathrm{Ker}(\mu \mathbf{I} - T) \cap [\mathrm{Ker}(\mu \mathbf{I} - T)]^{\perp} = \{0\}$, o que entra em contradição com o facto de ser $z \neq 0$.

$\therefore \; T = T_0$.

□

Se T é compacto mas não necessariamente auto-adjunto, é válido um resultado formalmente análogo, mas para o apresentar é necessário fazer primeiro algumas considerações.

8. Definição: $T \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ diz-se *positivo* se $(Tx, x) \geq 0$, $x \in \mathbf{H}$.

8. Nota: Se T é positivo escreve-se $T \geq 0$, e é evidente que qualquer seu valor próprio é não negativo. Tem-se também que T positivo $\Rightarrow$ T auto-adjunto — cf. [5], pp. 84-85 —, resultado que não é, no entanto, válido se nas definições 2 e 8 tivéssemos suposto que o espaço $\mathcal{L}(\mathbf{H})$ pudesse também ser real.

9. Lema (cf. [29], p. 262, ou [5], p. 95)**:** *Se* $T \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ *é positivo, tem uma única* *raíz quadrada positiva* $T^{1/2}$, *ou seja*, $T^{1/2}$ *é o único operador positivo em* $\mathcal{L}(H)$ *tal que* $(T^{1/2})^2 = T$.

9. Nota: Se $T \in \mathcal{K}(H)$ e é positivo, o teorema espectral — cf. proposição 6 — permite provar que T *tem uma e uma só raíz quadrada compacta positiva*, dada por

$$T^{1/2} = \Sigma_{n \in I} \lambda_n^{1/2} (\cdot, x_n)\, x_n \quad ,$$

onde os símbolos têm o mesmo significado que nesse teorema — cf. apêndice 2 . Este resultado pode ser usado em vez do lema 9 nas demonstrações 12 (embora apenas no caso $T \in \mathcal{K}(H,K)$) , 14 , 2.8 e 3.3 .

10. Definição: $U \in \mathcal{L}(H,K)$ é uma *isometria parcial* se $\|Ux\|_K = \|x\|_H$ para $x \in (\mathrm{Ker}U)^{\perp}$.

11. Lema: *Seja* $U \in \mathcal{L}(H,K)$ *uma isometria parcial. Então:*

a) U^*U *é uma projecção sobre* $(\mathrm{Ker}U)^{\perp}$;

b) *se* $U \neq 0$, $\|U\|=1$;

c) U^* *é isometria parcial.*

11. Demonstração: a) Dado $x \in H$ e $w \in \mathrm{Ker}U$ temos que $(U^*Ux,w)_H = (Ux,Uw)_K = (Ux,0)_K = 0$, logo $U^*UH \subset (\mathrm{Ker}U)^{\perp}$.

Para concluir é agora necessário e suficiente provar que $U^*Ux=x$, para todo $x \in (\mathrm{Ker}U)^{\perp}$. Ora, dado $x \in (\mathrm{Ker}U)^{\perp}$ temos que $\|Ux\|_K = \|x\|_H$, ou seja, $\|Ux\|_K^2 = \|x\|_H^2$, ou ainda, $(Ux,Ux)_K = (x,x)_H$, logo $(U^*Ux,x)_H = (x,x)_H$, donde se conclui que $U^*Ux = x$ para $x \in (\mathrm{Ker}U)^{\perp}$ — cf. [32], p. 345 .

b) Como $H = \mathrm{Ker}U \oplus (\mathrm{Ker}U)^{\perp}$, dado $x \in H$ temos que $x=y+z$, com $y \in \mathrm{Ker}U$ e $z \in (\mathrm{Ker}U)^{\perp}$. Então $\|Ux\|_K^2 = \|Uz\|_K^2 = \|z\|_H^2 = \|x\|_H^2 - \|y\|_H^2 \leqq \|x\|_H^2$ e portanto $\|U\| \leqq 1$.

Além disso, sendo $U \neq 0$ existe $z \in (\mathrm{Ker}U)^{\perp}$ tal que $\|z\|_{\mathbf{H}}=1$, logo $\|U\| = \sup\{\|Ux\|_{\mathbf{K}} : \|x\|_{\mathbf{H}}=1\} \geq \|Uz\|_{\mathbf{K}} = \|z\|_{\mathbf{H}} = 1$.

c) Sabemos que $(\mathrm{Ker}U^*)^{\perp} = (U\mathbf{H})^{-}$ — cf. [32], p. 244. Então, dado $y \in (\mathrm{Ker}U^*)^{\perp}$, existe sucessão (y_n) em $U\mathbf{H}$ tal que $y_n \to y$, e para cada n existe $z_n \in \mathbf{H}$ tal que $y_n = Uz_n$. Como $\mathbf{H} = \mathrm{Ker}U \oplus (\mathrm{Ker}U)^{\perp}$, podemos escrever $z_n = x_n + w_n$, com $x_n \in (\mathrm{Ker}U)$, $w_n \in (\mathrm{Ker}U)^{\perp}$. Assim, $y_n = Uz_n = Uw_n$ e $U^*y_n = U^*Uw_n = w_n$, atendendo a a) desta demonstração. Usando a hipótese de U ser isometria parcial, obtemos finalmente $\|U^*y\|_{\mathbf{H}} = \lim_n \|U^*y_n\|_{\mathbf{H}} = \lim_n \|w_n\|_{\mathbf{H}} = \lim_n \|Uw_n\|_{\mathbf{K}} = \lim_n \|y_n\|_{\mathbf{K}} = \|y\|_{\mathbf{K}}$.

□

12. Proposição (decomposição polar) : *Seja* $T \in \mathcal{L}(\mathbf{H},\mathbf{K})$. *Então existe uma isometria parcial* $U \in \mathcal{L}(\mathbf{H},\mathbf{K})$ *com* $\mathrm{Ker}U = \mathrm{Ker}T$ *tal que*

$$T = U|T| \quad e \quad |T| = U^*T \quad , \quad com \quad |T| = (T^*T)^{1/2} .$$

12. Demonstração: Começamos por notar que T^*T é positivo e que portanto o lema 9 não deixa ambiguidades na definição de $|T| = (T^*T)^{1/2}$.

Repare-se que $\|Tx\|_{\mathbf{K}}^2 = (Tx,Tx)_{\mathbf{K}} = (T^*Tx, x)_{\mathbf{H}} = (|T|^2x, x)_{\mathbf{H}} = (|T|x, |T|x)_{\mathbf{H}} = \| |T|x \|_{\mathbf{H}}^2$, logo

(12.1) $$\mathrm{Ker}\,|T| = \mathrm{Ker}\,T \quad e \quad (|T|\mathbf{H})^{-} = (\mathrm{Ker}\,|T|)^{\perp} = (\mathrm{Ker}\,T)^{\perp} .$$

Então $W : |T|\mathbf{H} \to \mathbf{K}$ tal que $W(|T|x) = Tx$ está bem definida e é uma isometria linear, como facilmente se verifica. Estendendo em seguida W por continuidade a $(|T|\mathbf{H})^{-}$, obtém-se a isometria linear $V : (|T|\mathbf{H})^{-} \to \mathbf{K}$.

Definimos agora $U \in \mathcal{L}(\mathbf{H},\mathbf{K})$ por $Ux = VPx$, $x \in \mathbf{H}$, com P a projecção ortogonal de $\mathbf{H}$ sobre $(|T|\mathbf{H})^{-}$.

Ora $x \in \mathrm{Ker}U \Leftrightarrow VPx = 0 \Leftrightarrow Px = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}P = [(|T|\mathbf{H})^{-}]^{\perp}$, e portanto

(12.2) $$(\mathrm{Ker}U)^{\perp} = (|T|\mathbf{H})^{-} .$$

Então para $x \in (\mathrm{Ker}U)^{\perp}$ temos $\|Ux\|_{\mathbf{K}} = \|Vx\|_{\mathbf{K}} = \|x\|_{\mathbf{H}}$, logo U é uma isometria parcial.

Além disso, dado $x\in\mathbf{H}$ temos $U|T|x = VP|T|x = V|T|x = Tx$, ou seja , $T = U|T|$.

Também, para $x\in\mathbf{H}$, $U^*Tx = U^*U|T|x = |T|x$, atendendo a (12.2) e a a) do lema anterior, logo $|T| = U^*T$.

Finalmente, de (12.1) e (12.2) obtém-se $\mathrm{Ker}U = [(|T|\mathbf{H})^-]^\perp = \mathrm{Ker}T$.

□

13. Corolário: *Se* $T\in\mathcal{K}(\mathbf{H},\mathbf{K})$ *então* $|T|\in\mathcal{K}(\mathbf{H})$.

13. Demonstração: O resultado enunciado é consequência imediata da igualdade $|T| = U^*T$ da proposição anterior e do lema II.2.

□

Generalizamos agora a proposição 6:

14. Proposição (teorema espectral) : *Seja* $0\neq T\in\mathcal{K}(\mathbf{H},\mathbf{K})$ *e* $I=\{n\in\mathbb{N} : \lambda_n(|T|)\neq 0\}$, *com* $(\lambda_n(|T|))_{n\in\mathbb{N}}$ *a sucessão dos valores próprios de* $|T|$. *Então existem conjuntos ortonormados* $\{x_n : n\in I\}\subset\mathbf{H}$, $\{y_n : n\in I\}\subset\mathbf{K}$ *de vectores próprios de* T^*T *e* TT^* , *respectivamente*, *tais que*

$$Tx = \Sigma_{n\in I}\, \lambda_n(|T|)\,(x, x_n)_{\mathbf{H}}\, y_n \qquad , \qquad x\in\mathbf{H}$$

(desenvolvimento de Schmidt).

14. Demonstração: Usando a decomposição polar, $T = U|T|$ e $|T| = U^*T$, com U isometria parcial tal que $\mathrm{Ker}U = \mathrm{Ker}T$.

Como $|T|$ é não nulo, auto-adjunto e compacto — cf. corolário 13 — a proposição 6 permite escrever

$$|T|x = \Sigma_{n\in I}\, \lambda_n(|T|)\,(x, x_n)_{\mathbf{H}}\, x_n \quad , \quad x\in\mathbf{H} \quad ,$$

com $\{x_n : n\in I\}\subset\mathbf{H}$ conjunto ortonormado de vectores próprios de $|T|$, em que cada x_n está associado a $\lambda_n(|T|)$, $n\in I$ — cf. demonstração 6 . Então

$$Tx = \Sigma_{n\in I}\, \lambda_n(|T|)\,(x, x_n)_{\mathbf{H}}\, y_n \quad , \quad x\in\mathbf{H} \quad ,$$

com $y_n = U x_n$, $n \in I$.

Como

(14.1) $$T^* T x_n = |T|^2 x_n = [\lambda_n(|T|)]^2 x_n \quad ,$$

então x_n também é vector próprio de T^*T , $n \in I$.

Como U é isometria quando restringido a $(\mathrm{Ker}U)^\perp = (|T|\mathbf{H})^-$ — cf. (12.2) na demonstração 12 — e $x_n \in |T|\mathbf{H}$, $n \in I$ (pois $x_n = |T|[\lambda_n(|T|)]^{-1} x_n$), então $\|Ux_n\|_{\mathbf{K}} = \|x_n\|_{\mathbf{H}} = 1$, $n \in I$. Além disso , $(Ux_n , Ux_m)_{\mathbf{K}} = (U^*Ux_n , x_m)_{\mathbf{H}} = (x_n , x_m)_{\mathbf{H}} = 0$, para $n \neq m$, $n,m \in I$, pois U^*U é projecção sobre $(\mathrm{Ker}U)^\perp = (|T|\mathbf{H})^-$. Logo $\{y_n : n \in I\} \subset \mathbf{K}$ forma um conjunto ortonormado . Finalmente, como $TT^*y_n = TT^*Ux_n = T|T|^*x_n = U|T|^2x_n = [\lambda_n(|T|)]^2 y_n$, então y_n é vector próprio de TT^* , $n \in I$.

□

15. Corolário: *Se* $T \in \mathcal{K}(\mathbf{H},\mathbf{K})$, T *é o limite duma sucessão de operadores em* $\mathcal{L}(\mathbf{H},\mathbf{K})$ *com dimensão finita.*

15. Demonstração: Se $T=0$ ou I for finito , o próprio T tem dimensão finita, logo $T = \lim_n T$ e o resultado é verdadeiro .

Suponhamos agora $T \neq 0$ e I infinito , portanto $I = \mathbb{N}$. No teorema anterior provámos que $T = \sum_{n=1,\dots,\infty} \lambda_n(|T|) \, (\cdot, x_n)_{\mathbf{H}} \, y_n$, com $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbf{H}$, $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbf{K}$ ortonormados e $(\lambda_n(|T|))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_0^+$ decrescente com limite 0 . Estamos então nas hipóteses do lema 7 ; usando a sua demonstração podemos afirmar que

$$T = \lim_N T_N \quad ,$$

onde $T_N = \sum_{n=1,\dots,N} \lambda_n(|T|) \, (\cdot, x_n)_{\mathbf{H}} \, y_n \in \mathcal{L}(\mathbf{H},\mathbf{K})$ tem dimensão finita , $N \in \mathbb{N}$.

□

15. Nota: Designando $\mathcal{F}(\mathbf{H},\mathbf{K}) = \{T \in \mathcal{L}(\mathbf{H},\mathbf{K}) : T \text{ tem dimensão finita}\}$, sabemos que $\mathcal{F}(\mathbf{H},\mathbf{K}) \subset \mathcal{K}(\mathbf{H},\mathbf{K})$, logo $[\mathcal{F}(\mathbf{H},\mathbf{K})]^- \subset [\mathcal{K}(\mathbf{H},\mathbf{K})]^- = \mathcal{K}(\mathbf{H},\mathbf{K})$, pois $\mathcal{K}(\mathbf{H},\mathbf{K})$ é fechado, pelo lema II.2 . O corolário anterior permite então concluir que se tem de facto a igualdade $[\mathbf{F}(H,K)]^{-} = \mathbf{K}(H,K)$.

É altura de reconhecer a importância dos valores próprios de $|T| = (T^*T)^{1/2}$ e dar-lhes um nome especial relativamente a T .

16. Definição: Dado $T \in \mathbf{K}(H,K)$, os *números singulares* de T, designados por $s_n(T)$, $n \in \mathbf{N}$, são os elementos da sucessão dos valores próprios de $|T|$, de tal modo que

$$s_n(T) = \lambda_n(|T|) \quad , \quad n \in \mathbf{N} \; .$$

16. Nota: Embora num contexto mais restrito, a consideração de tais números já vem de 1907 com Schmidt — cf. [31] .

Suponhamos $T \neq 0$.

Usando a notação do corolário 15, a sua demonstração e a do lema 7, podemos afirmar que $s_N(T) = \lambda_N(|T|) \geq \|T - T_{N-1}\|$, $N \in I$, com $T_0 = 0$ (recordamos que $I = \{n \in \mathbf{N} : s_n(T) \neq 0\}$) .

Como $\|(T - T_{N-1})x_N\|_{\mathbf{K}} = \|\sum_{n \in I,\, n \geq N} s_n(T)\,(x_N, x_n)_{\mathbf{H}}\, y_n\|_{\mathbf{K}} = s_N(T)$, então $\|T - T_{N-1}\| = \sup\{\|(T - T_{N-1})x\|_{\mathbf{K}} : \|x\|_{\mathbf{H}} = 1\} \geq s_N(T)$, concluindo-se assim que

(16.1) $$s_N(T) = \|T - T_{N-1}\| \quad , \quad N \in I \; .$$

Podemos dar uma forma alternativa a esta expressão no caso $N \in I \setminus \{1\}$, já que se tem então

$s_N(T) = \sup\{\|(T - T_{N-1})x\|_{\mathbf{K}} : \|x\|_{\mathbf{H}} = 1\} = \sup\{\|\sum_{n \in I,\, n \geq N} s_n(T)\,(x, x_n)_{\mathbf{H}}\, y_n\|_{\mathbf{K}} : \|x\|_{\mathbf{H}} = 1\}$

$= \sup \{\|\sum_{n \in I} s_n(T)\,(x, x_n)_{\mathbf{H}}\, y_n\|_{\mathbf{K}} : \|x\|_{\mathbf{H}} = 1 \; , \; x \in \{x_1, \ldots, x_{N-1}\}^{\perp}\}$

$= \sup\{\|Tx\|_{\mathbf{K}} : \|x\|_{\mathbf{H}} = 1,\; x \in \{x_1, \ldots, x_{N-1}\}^{\perp}\}$. Assim :

(16.2) $$s_N(T) = \sup\{\|Tx\|_{\mathbf{K}} : \|x\|_{\mathbf{H}} = 1,\; x \in \{x_1, \ldots, x_{N-1}\}^{\perp}\} , \quad N \in I \setminus \{1\} \; .$$

O inconveniente das expressões (16.1) ou (16.2) é que o cálculo de $s_N(T)$ depende do conhecimento dos N-1 vectores próprios anteriores a x_N , $N \in I \setminus \{1\}$.

Vamos alterar esta situação:

Para cada $N \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, sejam dados arbitrariamente $z_1, \ldots, z_{N-1}$ vectores de $\mathbf{H}$, e seja $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ uma solução não nula do sistema indeterminado $\sum_{i=1,\ldots,N} \alpha_i (x_i, z_j)_{\mathbf{H}} = 0$, $j = 1, \ldots, N-1$, que é equivalente a ter $(\sum_{i=1,\ldots,N} \alpha_i x_i, z_j)_{\mathbf{H}} = 0$, $j = 1, \ldots, N-1$. Como a combinação linear $w = \sum_{i=1,\ldots,N} \alpha_i x_i$ é diferente de zero (pois os x_i's são linearmente independentes — por serem ortonormados — e $(\alpha_i)_{i=1,\ldots,N}$ é não nulo), podemos considerar $x = \|w\|_{\mathbf{H}}^{-1} w$, tendo-se também $(x, z_j)_{\mathbf{H}} = 0$, $j = 1, \ldots, N-1$. Então, usando (14.1) da demonstração 14 e o teorema de Pitágoras, obtemos $\|Tx\|_{\mathbf{K}}^2 = (Tx,Tx)_{\mathbf{K}} = \|w\|_{\mathbf{H}}^{-2} \sum_{i=1,\ldots,N} \sum_{j=1,\ldots,N} \alpha_i \overline{\alpha_j} (T^*Tx_i, x_j)_{\mathbf{H}} = \|w\|_{\mathbf{H}}^{-2} \sum_{i=1,\ldots,N} |\alpha_i|^2 [s_i(T)]^2 \geq \|w\|_{\mathbf{H}}^{-2} [s_i(T)]^2 \sum_{i=1,\ldots,N} |\alpha_i|^2 \geq \|w\|_{\mathbf{H}}^{-2} [s_i(T)]^2 \|w\|_{\mathbf{H}}^2 = [s_i(T)]^2$, logo $\|Tx\|_{\mathbf{K}} \geq s_N(T)$. Então $s_N(T) \leq \sup\{\|Tx\|_{\mathbf{K}} : \|x\|_{\mathbf{H}}=1,\ x \in \{z_1, \ldots, z_{N-1}\}^{\perp}\}$, para $z_1, \ldots, z_{N-1}$ vectores quaisquer em $\mathbf{H}$.

Como sabemos, por (16.2), que se verifica a igualdade se $z_j = x_j$, $j=1, \ldots, N-1$, então $s_N(T) = \inf\{\sup\{\|Tx\|_{\mathbf{K}} : \|x\|_{\mathbf{H}}=1,\ x \in \{z_1, \ldots, z_{N-1}\}^{\perp}\} : z_1, \ldots, z_{N-1} \in \mathbf{H}\}$, ou

(16.3) $s_N(T) = \inf\{\sup\{\|Tx\|_{\mathbf{K}} : \|x\|_{\mathbf{H}}=1,\ x \in \mathbf{M}^{\perp}\} : \dim \mathbf{M} < N\}$, $N \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$,

onde o ínfimo é calculado sobre todos os subespaços $\mathbf{M}$ de $\mathbf{H}$ com $\dim \mathbf{M} < N$.

17. Proposição: *Dado* $T \in \mathbf{K}(\mathbf{H},\mathbf{K})$, *temos que*

$$s_n(T) = \inf\{\|T-A\| : A \in \mathbf{L}(\mathbf{H},\mathbf{K}),\ \dim A < n\}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

17. Demonstração: O caso $T=0$ é trivial, por isso supomos $T \neq 0$.

Se $n \notin I$, da proposição 14 sai que $\dim T < n$, logo o ínfimo acima é 0, assim como $s_N(T)$.

Se $n \in I$, da igualdade (16.1) sai que o ínfimo acima não excede $s_N(T)$.

Reciprocamente:

Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H},\mathbf{K})$ com $\dim A < n$. Então A é compacto e, caso $A \neq 0$, admite o desenvolvimento de Schmidt $Ax = \sum_{n \in I'} s_n(A)\,(x, x_n')_{\mathbf{H}}\, y_n'$, $x \in \mathbf{H}$. Como $\dim A < n$, temos que $s_n(A) = 0$, logo $\# I' = m < n$. Então $s_n(T) \leqq \sup\{\|Tx\|_{\mathbf{K}} : \|x\|_{\mathbf{H}}=1,\ x \in \{x_1', \dots, x_m'\}^{\perp}\} = \sup\{\|(T-A)x\|_{\mathbf{K}} : \|x\|_{\mathbf{H}}=1,\ x \in \{x_1', \dots, x_m'\}^{\perp}\}$ $\leqq \|T-A\|$, atendendo à igualdade (16.3).

Se $A=0$ e $n=1$ temos $s_n(T) = s_1(T) = \|T\| = \|T-A\|$.

Se $A=0$ e $n \neq 1$, a igualdade (16.3) diz-nos que $s_n(T) \leqq \sup\{\|Tx\|_{\mathbf{K}} : \|x\|_{\mathbf{H}}=1\} = \|T\| = \|T-A\|$.

Em qualquer dos casos tem-se sempre que $s_n(T)$ não excede $\inf\{\|T-A\| : A \in \mathcal{L}(\mathbf{H},\mathbf{K}),\ \dim A < n\}$, $n \in I$.

□

17. Nota: A igualdade demonstrada mostra que $s_n(T)$ *é a distância do operador* T *ao conjunto dos operadores de dimensão inferior a* n.

Obtivemos assim uma *interpretação geométrica dos números singulares*.

Vamos deduzir uma outra, esta relacionada com o conceito de *diâmetro de Kolmogorov* (ou *largura*) dum conjunto, conceito que foi formulado pelo próprio Kolmogorov em 1936 — cf. [18] e [34].

18. Proposição: *Dado* $T \in \mathcal{K}(\mathbf{H},\mathbf{K})$, *temos que* $s_n(T)$ *coincide com o (n-1)-ésimo diâmetro de Kolmogorov do conjunto* $TU_{\mathbf{H}}$, $n \in \mathbb{N}$, *isto é,*

$$s_n(T) = \inf\{\ \sup\{\ \inf\{\|Tx-y\|_{\mathbf{K}} : y \in \mathbf{N}\} : \|x\|_{\mathbf{H}} \leqq 1\ \} : \dim \mathbf{N} < n\ \},\ n \in \mathbb{N},$$

onde o ínfimo exterior é calculado sobre todos os subespaços $\mathbf{N}$ *de* $\mathbf{K}$ *com* $\dim \mathbf{N} < n$.

18. Demonstração: O caso $T=0$ é trivial, por isso supomos $T \neq 0$.

Como existe uma correspondência biunívoca entre subespaços fechados de $\mathbf{K}$ e projecções ortogonais de $\mathbf{K}$ (a cada projecção ortogonal corresponde o seu contradomínio) — cf. [6], pp. 250-251 —, podemos escrever o segundo membro da igualdade acima como

(18.1) $\inf\{\ \sup\{\ \inf\{\ \|Tx-y\|_{\mathbf{K}} : y\in P\mathbf{K}\ \}\ :\ \|x\|_{\mathbf{H}}\leqq 1\ \}\ :\ \dim P < n\ \}$,

onde o ínfimo exterior é calculado sobre todas as projecções ortogonais P de $\mathbf{K}$ com dimensão inferior a n. Além disso, em (18.1) podemos substituir o ínfimo interior por $\|Tx-PTx\|_{\mathbf{K}}$ — cf. [30], p. 84.

Provemos primeiro que $s_n(T)$ não excede (18.1):

Se P é projecção ortogonal de $\mathbf{K}$ com $\dim P < n$, então $\dim PT < n$. Usando a proposição 17, obtemos $s_n(T) \leqq \|T-PT\| = \sup\{\ \|Tx-PTx\|_{\mathbf{K}} : \|x\|_{\mathbf{H}}\leqq 1\}$, donde se conclui a desigualdade pretendida.

Provemos agora que $\sup\{\ \|Tx-PTx\|_{\mathbf{K}} : \|x\|_{\mathbf{H}}\leqq 1\} = \|T-PT\|$ assume de facto o valor $s_n(T)$ para alguma projecção ortogonal de $\mathbf{K}$ com dimensão inferior a n:

O desenvolvimento de Schmidt de T dá-nos $T = \sum_{i\in I} s_i(T)\ (\cdot, x_i)_{\mathbf{H}}\ y_i$. Se $n\in I\backslash\{1\}$, considere-se $P = \sum_{i=1,\dots,n-1} (\cdot, y_i)_{\mathbf{K}}\ y_i$, que tem dimensão inferior a n e domínio $\mathbf{K}$ e é uma projecção ortogonal — cf. [6], pp. 251-252. Ora $PTx = \sum_{i=1,\dots,n-1} \sum_{j\in I} s_j(T)\ (x, x_j)_{\mathbf{H}}\ (y_j, y_i)_{\mathbf{K}}\ y_i = \sum_{i=1,\dots,n-1} s_i(T)\ (x, x_i)_{\mathbf{H}}\ y_i = T_{n-1}x$, logo a igualdade (16.1) permite afirmar que $\|T-PT\| = \|T-T_{n-1}\| = s_n(T)$.

Se $n=1$ fazemos $P=0$; se $n\notin I$ fazemos $P = \sum_{i\in I} (\cdot, y_i)_{\mathbf{K}}\ y_i$.

Em qualquer dos casos verifica-se a igualdade indicada na proposição.

□

18. Nota: A interpretação geométrica do resultado é a seguinte:

Como $\inf\{\ \|Tx-y\|_{\mathbf{K}} : y\in\mathbf{N}\ \} = \operatorname{dist}(Tx,\mathbf{N})$, então $\sup\{\ \inf\{\|Tx-y\|_{\mathbf{K}} : y\in\mathbf{N}\} : \|x\|_{\mathbf{H}}\leqq 1\}$ é o *desvio* entre $TU_{\mathbf{H}}$ e $\mathbf{N}$, e portanto $s_n(T)$ é o ínfimo desses desvios para todos os subespaços de $\mathbf{K}$ com dimensão menor que n. Como esse ínfimo é de facto atingido, podemos ainda afirmar que $s_n(T)$ *é o menor dos desvios entre* $TU_{\mathbf{H}}$ *e subespaços de* $\mathbf{K}$ *com dimensão* *inferior a* n , $n \in \mathbb{N}$.

2. Números-s

Voltemos novamente ao caso mais geral em que em vez de **H** e **K** de Hilbert temos **E** e **F** de Banach.

Embora neste contexto não se possa falar em operadores adjuntos e, consequentemente, em números singulares (tal como foram definidos em 1.16), as duas últimas proposições da secção anterior permitem-nos de certo modo transpôr o conceito não só para $\mathbf{K}(E,F)$ mas mesmo para $\mathbf{L}(E,F)$, já que as duas caracterizações aí obtidas nos permitem dar duas novas definições de números singulares que não têm nada a ver com adjuntos nem com aspectos especiais do espectro de um operador.

Se vamos estender essas definições a operadores em $\mathbf{L}(E,F)$, podemos obter números distintos, convindo então que tenham nomes diferentes.

Assim,

1. Definição: Dado $T \in \mathbf{L}(E,F)$, designamos por *números de aproximação* de T as quantidades

$$a_n(T) = \inf \{ \|T-A\| : A \in \mathbf{L}(E,F),\ \dim A < n \} \quad ,$$

para $n \in \mathbb{N}$.

2. Definição: Dado $T \in \mathbf{L}(E,F)$, designamos por *números de Kolmogorov* de T as quantidades

$$d_n(T) = \inf \{ \|Q^F_N T\| : N \text{ subespaço de } F,\ \dim N < n \} \quad ,$$

para $n \in \mathbb{N}$, onde $Q^F_N : F \to F/N$ é a aplicação canónica.

2. Nota: Esta segunda definição está de acordo com a proposição 1.18 , já que $\|Q^F_N T\|$

$$= \sup\{ \| Q^F_{\mathbf{N}} Tx \|_{F/\mathbf{N}} : x \in U_E \} = \sup\{ \inf\{ \|Tx+y\|_F : y \in \mathbf{N} \} : x \in U_E \} .$$

Podemos ainda estender o conceito de números singulares a $\mathbf{L}(E,F)$ através da igualdade (16.3) da secção anterior. Embora a caracterização aí apresentada dependa da noção de ortogonalidade, podemos dar-lhe uma forma mais geral.

Recordemos (16.3):

$$s_n(T) = \inf\{ \sup\{ \|Tx\|_K : \|x\|_H = 1 ,\ x \in \mathbf{M}^{\perp} \} : \dim \mathbf{M} < n \} ,$$

para $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $T \in \mathbf{K}(H,K)$, $T \neq 0$, e onde o ínfimo é calculado sobre o conjunto de todos os subespaços $\mathbf{M}$ de $\mathbf{H}$ com $\dim \mathbf{M} < n$.

Atendendo a que a aplicação que a cada $\mathbf{M}$ do conjunto indicado associa $\mathbf{M}^{\perp}$ é bijectiva sobre o conjunto dos subespaços fechados de $\mathbf{H}$ com codimensão inferior a n — cf. [32], p. 30 —, então podemos escrever $s_n(T) = \inf\{ \sup\{ \|Tx\|_K : \|x\|_H = 1 ,\ x \in \mathbf{M} \} : \operatorname{codim} \mathbf{M} < n \}$, ou

(2.1) $$s_n(T) = \inf\{ \sup\{ \|Tx\|_K : x \in U_H ,\ x \in \mathbf{M} \} : \operatorname{codim} \mathbf{M} < n \} ,$$

onde agora o ínfimo é calculado sobre todos os subespaços fechados $\mathbf{M}$ de $\mathbf{H}$ com $\operatorname{codim} \mathbf{M} < n$.

Ora o segundo membro de (2.1) é o (n-1)-ésimo *diâmetro de Gelfand* do conjunto TU_H, atendendo à compacidade de T — cf. [34], pp. 91-92 e 94. Além disso, repare-se que (2.1) não é válido apenas para $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ e $T \neq 0$, como mostramos a seguir:

— se $n=1$, de (2.1) obtém-se $s_1(T) = \|T\|$;

— se $n \notin \mathbb{N}$, então $\dim T < n$ — cf. proposição 1.14 —, e como $T\mathbf{H}$ é isomorfo a $\mathbf{H}/\operatorname{Ker}T$ — cf. [32], p. 31 —, temos que $\operatorname{codim} \operatorname{Ker}T < n$, logo de (2.1) vem $s_n(T) \leqq \sup\{ \|Tx\|_K : x \in U_H ,\ x \in \operatorname{Ker}T \} = 0$ e portanto $s_n(T) = 0$;

— se $T=0$, (2.1) transforma-se em $s_n(T) = 0$;

em qualquer dos casos os resultados obtidos com a fórmula (2.1) são verdadeiros — cf. secção anterior.

Assim,

3. Definição: Dado $T \in \mathcal{L}(E,F)$, designamos por *números de Gelfand* de T as quantidades

$$c_n(T) = \inf\{\, \| T J^E_{\mathbf{M}} \| : \mathbf{M} \text{ subespaço fechado de } \mathbf{E}\text{ , codim } \mathbf{M} < n \,\} \quad ,$$

para $n \in \mathbb{N}$, onde $J^E_{\mathbf{M}} : \mathbf{M} \to \mathbf{E}$ é a imersão canónica (ou natural).

3. Nota: Esta terceira definição está de acordo com as considerações anteriores, pois $\| T J^E_{\mathbf{M}} \| = \sup\{\, \| T J^E_{\mathbf{M}} x \|_{\mathbf{F}} : x \in U_E \} = \sup\{\, \| T|_{\mathbf{M}} x \|_{\mathbf{F}} : x \in U_E \} = \sup\{\, \|Tx\|_{\mathbf{F}} : x \in U_E \text{ , } x \in \mathbf{M} \}$.

4. Lema: *Dado* $T \in \mathcal{L}(E,F)$, $c_n(T) = d_n(T')$, $n \in \mathbb{N}$.

4. Demonstração: Ora

$$c_n(T) = \inf\{\, \| T J^E_{\mathbf{M}} \| : \mathbf{M} \text{ subespaço fechado de } \mathbf{E}\text{ , codim } \mathbf{M} < n \}$$

e $$d_n(T') = \inf\{\, \| Q^{E'}_{\mathbf{N}} T' \| : \mathbf{N} \text{ subespaço de } \mathbf{E'}\text{, dim } \mathbf{N} < n \} \text{ .}$$

Recordamos que $\mathbf{M}^a = \{x' \in \mathbf{E'} : x'(x) = 0 \text{ para todo } x \in \mathbf{M}\}$ é o *anulador de* $\mathbf{M}$ *em* $\mathbf{E'}$ e que ${}^a\mathbf{N} = \{x \in E : x'(x) = 0 \text{ para todo } x' \in \mathbf{N}\}$ é o *anulador de* $\mathbf{N}$ *em* $\mathbf{E}$. Além disso,

(4.1) *existem isomorfismos isométricos entre* $(E/\mathbf{M})'$ *e* $\mathbf{M}^a$ *e entre* $\mathbf{E'}/\mathbf{M}^a$ *e* $\mathbf{M'}$, *sendo este último definido pela aplicação*

(4.2) $f : \mathbf{E'}/\mathbf{M}^a \to \mathbf{M'}$ *tal que* $f(x' + \mathbf{M}^a) = x'|_{\mathbf{M}}$, $x' \in \mathbf{E'}$

— cf. [1], p. 341 .

Vamos então definir uma aplicação bijectiva g entre subespaços fechados $\mathbf{M}$ de $\mathbf{E}$ com codim $\mathbf{M} < n$ e subespaços $\mathbf{N}$ de $\mathbf{E'}$ com dim $\mathbf{N} < n$, fazendo corresponder a cada $\mathbf{M}$ o seu anulador $\mathbf{M}^a$.

De facto, atendendo a (4.1) podemos escrever

(4.3) $\text{codim } \mathbf{M} < n \Leftrightarrow \dim E/\mathbf{M} < n \Leftrightarrow \dim (E/\mathbf{M})' < n \Leftrightarrow \dim \mathbf{M}^a < n$,

portanto g está bem definida.

Como ${}^a(\mathbf{M}^a) = \mathbf{M}$ — cf. [1], p. 340 —, g é injectiva.

Seja agora $\mathbf{N}$ um subespaço de $\mathbf{E'}$ com dim $\mathbf{N} < n$ e provemos que ${}^a\mathbf{N}$ é um subespaço fechado de $\mathbf{E}$ com codim ${}^a\mathbf{N} < n$.

Ora, por um lado sabemos que ${}^{a}\mathbf{N}$ é fechado, por ser intersecção de fechados. Por outro lado, codim ${}^{a}\mathbf{N} < n$ sse $\dim({}^{a}\mathbf{N})^{a} < n$, atendendo às equivalências estabelecidas em (4.3). Então, se provarmos que $({}^{a}\mathbf{N})^{a} = \mathbf{N}$, ou que, equivalentemente, $\mathbf{N}$ é fechado na topologia fraca* de $\mathbf{E}'$ — cf. [1], p. 340 —, provamos a sobrejectividade de g, que é o que falta para obtermos g bijectiva.

Como $\mathbf{N}$ tem dimensão finita, $U_{\mathbf{N}}$ é compacto — cf. corolário II.4 —, o que significa que de toda a sua cobertura aberta se pode extrair uma subcobertura finita. Como todo o aberto na topologia fraca* é aberto na topologia de norma em $\mathbf{E}'$, também de toda a cobertura aberta de $U_{\mathbf{N}}$ na topologia fraca* se pode extrair uma subcobertura finita, e portanto $U_{\mathbf{N}}$ é compacto na topologia fraca*, o mesmo sucedendo a qualquer conjunto da forma $\{x' \in \mathbf{N} : \|x'\|_{\mathbf{E}'} \leqq r\}$, com $r > 0$, já que se obtém do anterior por meio duma aplicação contínua em $\mathbf{E}'$ com essa topologia. Como a topologia fraca* é de Hausdorff, os conjuntos $\{x' \in \mathbf{N} : \|x'\|_{\mathbf{E}'} \leqq r\}$ são fechados nessa topologia, e isso é o suficiente para que se tenha $\mathbf{N}$ fechado na topologia fraca* de $\mathbf{E}'$ — cf. teorema de Krein-Šmulian, em 8 do apêndice 1.

A demonstração deste lema fica concluída se provarmos agora que $\|TJ^{\mathbf{E}}_{\mathbf{M}}\| = \|Q^{\mathbf{E}'}_{\mathbf{N}} T'\|$, com $\mathbf{M}$ e $\mathbf{N}$ elementos correspondentes pela aplicação g atrás definida.

Ora, para qualquer $y' \in \mathbf{F}'$, obtemos, atendendo a (4.2), $\|Q^{\mathbf{E}'}_{\mathbf{N}} T'y'\|_{\mathbf{E}'/\mathbf{N}} = \|T'y' + \mathbf{N}\|_{\mathbf{E}'/\mathbf{N}} = \|T'y' + \mathbf{M}^{a}\|_{\mathbf{E}'/\mathbf{M}^{a}} = \|T'y'|_{\mathbf{M}}\|_{\mathbf{M}'} = \|(J^{\mathbf{E}}_{\mathbf{M}})' T'y'\|_{\mathbf{M}'}$, donde segue que $\|Q^{\mathbf{E}'}_{\mathbf{N}} T'\| = \|(J^{\mathbf{E}}_{\mathbf{M}})' T'\| = \|(TJ^{\mathbf{E}}_{\mathbf{M}})'\| = \|TJ^{\mathbf{E}}_{\mathbf{M}}\|$.

□

Em princípio, as definições 1,2 e 3 dão origem a diferentes sucessões de números, no caso de operadores entre espaços de Banach, e cada uma dessas definições poderá ser considerada como uma generalização a $\mathcal{L}(E,F)$ do conceito de números singulares. Além das apresentadas, poderíamos encontrar outras caracterizações destes números que permitissem fazer outras tantas extensões do conceito, obtendo-se assim o que designamos genericamente por *números-s* — cf. [26].

Pietsch unificou esta ideia — cf. [26] —, ao apresentar uma *teoria axiomática de números-s*, tomando como base a seguinte definição, onde

$\mathcal{L} = \{ T \in \mathcal{L}(E,F) :$ E e F são espaços de Banach $\}$, e ℓ_∞ é o espaço das sucessões limitadas de escalares com a norma $\|.\|_\infty$.

5. Definição: Uma aplicação $s : \mathcal{L} \to \ell_\infty$ que a cada T em $\mathcal{L}$ associa uma sucessão de escalares $(s_n(T))$ em ℓ_∞ é uma *função número-s* se se verificam as seguintes condições :

(1) $\|T\| = s_1(T) \geqq s_2(T) \geqq \ldots \geqq 0$;

(2) $s_n(T+S) \leqq s_n(T) + \|S\|$, para $T, S \in \mathcal{L}(E,F)$, $n \in \mathbb{N}$;

(3) $s_n(TSR) \leqq \|T\| \; s_n(S) \; \|R\|$, para $R \in \mathcal{L}(E_0,E)$, $S \in \mathcal{L}(E,F)$, $T \in \mathcal{L}(F,F_0)$, $n \in \mathbb{N}$;

(4) $\dim T < n \Rightarrow s_n(T) = 0$, $n \in \mathbb{N}$;

(5) $\dim E \geqq n \Rightarrow s_n(I_E) = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

O número $s_n(T)$ diz-se o *n-ésimo número-s* (associado à função **s**) do operador T .

5. Nota: Não confundir este $s_n(T)$ com o seu homónimo da secção anterior , que designava o n-ésimo número singular de $T \in \mathcal{K}(H,K)$.

Mais tarde — cf. [27] — Pietsch enfraqueceu a condição (5) da definição anterior, reescrevendo-a assim (onde $\ell^n_2 = (\mathbb{K}^n, \|.\|_2)$) :

(5') $s_n(I_{\ell^n_2}) = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Ampliou portanto o conjunto das funções número-s .

Tal como acontece com outros conceitos, por vezes impõem-se mais condições na definição de função número-s, com o objectivo de simplificação da escrita quando não nos interessa uma definição tão geral . Assim , por exemplo , em [20] König considera uma condição mais forte que (2) :

(2') $s_{n+m-1}(T+S) \leqq s_n(T) + s_m(T)$, para $T, S \in \mathcal{L}(E,F)$, $n \in \mathbb{N}$.

No entanto, neste trabalho adoptamos a definição mais geral, portanto a que Pietsch apresentou em [27]. Para facilidade de referência futura, escrevêmo-la a seguir :

6. Definição: Diz-se que $\mathbf{s} : \mathcal{L} \to \ell_\infty$ tal que $\mathbf{s}(T) = (s_n(T))$ é uma *função número-s* (que passaremos a designar abreviadamente por *função-s*) se se verificam as condições (1) a (4) da definição 5 e ainda a condição (5') escrita atrás.

Além disso, $s_n(T)$ diz-se o *n-ésimo número-s* (associado à função $\mathbf{s}$) do operador T .

Sendo a definição de Pietsch uma unificação da ideia que levou à definição dos números de aproximação, Kolmogorov e Gelfand — e outros construídos no mesmo espírito —, devemos estar à espera que os dois resultados seguintes sejam verdadeiros :

7. Proposição: *Usando as notações das definições 1, 2 e 3, tem-se que*

$\mathbf{a} : \mathcal{L} \to \ell_\infty$ *tal que* $\mathbf{a}(T) = (a_n(T))$,

$\mathbf{d} : \mathcal{L} \to \ell_\infty$ *tal que* $\mathbf{d}(T) = (d_n(T))$ *e*

$\mathbf{c} : \mathcal{L} \to \ell_\infty$ *tal que* $\mathbf{c}(T) = (c_n(T))$

são funções-s.

8. Proposição: *Para todo* $\mathbf{s}$ *função-s e* $T \in \mathcal{K}(H,K)$, $(s_n(T))$ *é a sucessão dos números singulares de* T .

7. Demonstração: Provamos somente as condições menos evidentes da definição 6 .

Para a função $\mathbf{a}$ verificamos apenas (5'), ou seja, que $a_n(I_{\ell^n_2}) = 1$, $n \in \mathbb{N}$:

Como da condição (1) decorre que $a_n(I_{\ell^n_2}) \leqq \| I_{\ell^n_2} \| = 1$, $n \in \mathbb{N}$, temos apenas que provar que não se pode dar o caso $a_n(I_{\ell^n_2}) < 1$. Assim, suponhamos que esta última desigualdade se verificava. Existiria então $A \in \mathcal{L}(\ell^n_2)$ com $\dim A < n$ e tal que $\| I_{\ell^n_2} - A \| < 1$. Consequentemente $A = I_{\ell^n_2} - (I_{\ell^n_2} - A)$ seria invertível — cf. teorema I.7 — e portanto $\dim A = \dim \ell^n_2 = n$ — contradição com $\dim A < n$.

Para a função **d** também verificamos apenas (5'), portanto que $d_n(I_{\ell^n_2}) = 1$, $n \in \mathbb{N}$:

Como ℓ^n_2 é um espaço de Hilbert com dimensão finita, $I_{\ell^n_2}$ é um operador compacto entre espaços de Hilbert, logo podemos usar as proposições 1.17 e 1.18 juntamente com as definições 1 e 2 para afirmarmos que $d_n(I_{\ell^n_2}) = a_n(I_{\ell^n_2})$. Como, por outro lado, **a** é uma função-s, e portanto verifica (5'), então também $d_n(I_{\ell^n_2}) = 1$.

Para a função **c** verificamos apenas (4), ou seja, que $\dim T < n \Rightarrow c_n(T) = 0$, $n \in \mathbb{N}$:

Ora $\dim T < n \Leftrightarrow \dim T\mathbf{E} < n$. Como $\mathbf{E}/\mathrm{Ker}T$ é isomorfo a $T\mathbf{E}$ —cf. [32], p.31— então $\mathrm{codim}\, \mathrm{Ker}T < n$. Assim, $c_n(T) = \inf\{ \| TJ^{\mathbf{E}}_{\mathbf{M}} \| : \mathbf{M}$ subespaço fechado de $\mathbf{E}$, $\mathrm{codim}\, \mathbf{M} < n \}$ $\leqq \| TJ^{\mathbf{E}}_{\mathrm{Ker}T} \| = 0$, logo $c_n(T) = 0$.

□

7. Nota: A proposição 7 continua válida mesmo se usarmos a definição 5 de função número-s.

8. Lema: *Os números de aproximação são os maiores números-s, isto é,*

$$s_n(T) \leqq a_n(T) \ , \quad n \in \mathbb{N} \ , \quad T \in \mathcal{L} \ ,$$

para qualquer **s** *função-s.*

8. Demonstração: Seja $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Para todo $A \in \mathcal{L}(E,F)$ com $\dim A < n$ tem-se, atendendo a (2) e (4) da definição de função-s, $s_n(T) = s_n(A + T - A) \leqq s_n(A) + \| T-A \|$ $= \|T-A\|$, logo $s_n(T) \leqq a_n(T)$.

□

8. Demonstração: Seja s função-s e $T \in \mathcal{K}(H,K)$. Como o caso $T=0$ é trivial, supomos $T \neq 0$.

A proposição 1.12 (decomposição polar) permite escrever $T = U|T|$, $|T| = U^*T$, com U uma isometria parcial e $|T| = (T^*T)^{1/2}$ operador positivo. Usando a condição (3) da definição 6 de função-s e o lema 1.11, podemos afirmar que $s_n(T) \leqq \|U\| s_n(|T|) = s_n(|T|)$ e $s_n(|T|) \leqq \|U^*\| s_n(T) = s_n(T)$, e portanto $s_n(T) = s_n(|T|)$.

Assim, é suficiente provarmos a proposição 8 para o operador positivo $|T| \in \mathcal{K}(H)$.

Ora, do lema 9 e da proposição 1.17 obtemos a desigualdade

(8.1) $$s_n(|T|) \leqq \lambda_n(|T|) \quad , \quad n \in \mathbb{N} .$$

Provemos então a desigualdade contrária.

O teorema espectral — cf. proposição 1.6 — diz-nos que $|T| = \sum_{i\in I} \lambda_i(|T|)(.,x_i)\,x_i$, com $\{x_i : i \in I\}$ conjunto ortonormado.

Se $\#I < n$, $\dim |T| < n$ e então $\lambda_n(|T|) = 0 = s_n(|T|)$.

Suponhamos agora $\#I \geqq n$.

Seja $S = \sum_{j=1,\dots,n} [\lambda_j(|T|)]^{-1}(.,x_j)\,x_j$ e determinemos $|T|S$: $|T|Sx =$ $\sum_{i\in I} \sum_{j=1,\dots,n} \lambda_i(|T|)[\lambda_j(|T|)]^{-1}(x,x_j)(x_j,x_i)\,x_i = \sum_{i=1,\dots,n} \lambda_i(|T|)[\lambda_i(|T|)]^{-1}(x,x_i)\,x_i$ $= \sum_{i=1,\dots,n} (x,x_i)\,x_i$. Designando $R = \sum_{i=1,\dots,n} (.,x_i)\,x_i$, temos então $R = |T|S$.

Repare-se que o teorema de Pitágoras e a desigualdade de Bessel nos permitem escrever $\|Sx\|^2 =$ $\| \sum_{j=1,\dots,n} [\lambda_j(|T|)]^{-1}(x,x_j)\,x_j \|^2 = \sum_{j=1,\dots,n} [\lambda_j(|T|)]^{-2} |(x,x_j)|^2 \leqq$ $[\lambda_n(|T|)]^{-2} \sum_{j=1,\dots,n} |(x,x_j)|^2 \leqq [\lambda_n(|T|)]^{-2} \|x\|^2$, e portanto $S \in \mathcal{L}(H)$ e

(8.2) $$\|S\| \leqq [\lambda_n(|T|)]^{-1} .$$

Com o objectivo de aplicar a condição (5') da definição 6 de função-s, vamos construir $I_{\ell^n_2}$ através do operador $R \in \mathcal{L}(H)$:

Definimos $B : \ell^n_2 \to H$ por $B(\xi_j)_{j=1,\dots,n} = \sum_{j=1,\dots,n} \xi_j\,x_j$ e $A : H \to \ell^n_2$

por $Ax = ((x, x_j))_{j=1,\dots,n}$, tendo-se então $I_{\ell^n_2} = ARB$. Além disso, usando novamente o teorema de Pitágoras podemos escrever $\| B\,(\xi_j)_{j=1,\dots,n} \|_H^2 = \| \Sigma_{j=1,\dots,n}\ \xi_j\, x_j \|_H^2 = \Sigma_{j=1,\dots,n}\ |\xi_j|^2 = \|(\xi_j)_{j=1,\dots,n}\|_2^2$, e portanto $\|B\| = 1$. Por seu lado, a desigualdade de Bessel permite obter $\|Ax\|_2{}^2 = \|((x, x_j))_{j=1,\dots,n}\|_2{}^2 = \Sigma_{j=1,\dots,n}\ |(x, x_j)|^2 \leqq \|x\|_H^2$, logo $\|A\| \leqq 1$.

Então (5') e (3) da definição 6 e (8.2) implicam que $1 = s_n(I_{\ell^n_2}) = s_n(ARB) \leqq s_n(R) \leqq s_n(|T|)\, \|S\| \leqq s_n(|T|)\, [\lambda_n(|T|)]^{-1}$, ou seja , $s_n(|T|) \geqq \lambda_n(|T|)$, $n \in \mathbb{N}$.

Desta desigualdade e de (8.1) conclui-se que $s_n(|T|) = \lambda_n(|T|)$, $n \in \mathbb{N}$.

□

8. Nota: Como consequência do teorema que acabámos de provar, *todas as funções-s coincidem quando restringidas a operadores compactos entre espaços de Hilbert*. Usando o teorema espectral para operadores auto-adjuntos mas não necessariamente compactos, onde entra o conceito de medida espectral ou resolução da identidade para $|T|$ — cf. [32], pp. 432-438 —, poderíamos provar, de modo muito análogo ao anterior, que *as funções-s continuam a coincidir mesmo para operadores não compactos entre espaços de Hilbert* — cf. [26] , onde é necessária uma modificação da parte final da demonstração, já que o autor desse artigo supõe válida a condição (5) em vez de (5') na definição de função-s ; cf. também [27], pp. 146-147, onde a demonstração segue um esquema diferente .

10. Proposição: *A recíproca da condição (4) da definição 6 de função-s também é verdadeira, i.e., para qualquer* **s** *função-s*, $T \in \mathcal{L}(E,F)$, $n \in \mathbb{N}$, *verifica-se*

(4') $$s_n(T) = 0 \;\Rightarrow\; \dim T < n$$

10. Demonstração: Suponhamos que $\dim T \geqq n$.

De modo análogo ao que fizemos na demonstração anterior, vamos construir $I_{\ell^n_2}$ através do operador T .

Para isso , considerem-se $x_1, \dots, x_n \in E$ tais que $Tx_1, \dots, Tx_n$ sejam linearmente independentes . Então é consequência do teorema de Hahn-Banach — cf.

9 do apêndice 1 — a existência de $b_1,\ldots,b_n \in F'$ tais que $b_j(Tx_i) = \delta_{ij}$, $i,j = 1,\ldots,n$. Definam-se $B : \ell^n_2 \to E$ por $B(\xi_i)_{i=1,\ldots,n} = \sum_{i=1,\ldots,n} \xi_i x_i$ e $A : F \to \ell^n_2$ por $Ay = (b_j(y))_{j=1,\ldots,n}$, tendo-se então $I_{\ell^n_2} = ATB$ e $0 \neq A \in \mathcal{L}(F,\ell^n_2)$, $0 \neq B \in \mathcal{L}(\ell^n_2, E)$.

Aplicando (5') e (3) da definição 6 , obtemos $1 = s_n(I_{\ell^n_2}) \leqq \|A\|\, s_n(T)\, \|B\|$ e portanto $s_n(T) \neq 0$.

□

11. Proposição: *Dada* s *função-s e* $n \in \mathbb{N}$, *a função* $s_n : \mathcal{L}(E,F) \to \mathbb{R}$ *que transforma* T *em* $s_n(T)$ *é contínua, já que* $|s_n(S)-s_n(T)| \leqq \|S-T\|$, *para* $S,T \in \mathcal{L}(E,F)$.

11. Demonstração: A condição (2) da definição 6 permite escrever $s_n(S) = s_n(T+S-T) \leqq s_n(T) + \|S-T\|$ e $s_n(T) = s_n(S+T-S) \leqq s_n(S) + \|S-T\|$, donde sai a conclusão .

□

No capítulo II provámos que se $T \in \mathcal{K}(E)$ então a sua sucessão dos valores próprios converge para zero .

Para $T \in \mathcal{K}(E,F)$ não podemos falar em sucessão dos valores próprios — nem sequer em valores próprios! Podemos, no entanto, considerar os seus números-s, para uma dada função-s, e surge então a pergunta :

— *Se* $T \in \mathcal{K}(E,F)$, *a sucessão* $(s_n(T))$ *converge para zero* ?

Como a noção de número-s foi definida para operadores quaisquer em $\mathcal{L}$, podemos também formular a pergunta recíproca da anterior :

— *Se* $T \in \mathcal{L}(E,F)$ *e* $((s_n(T))$ *converge para zero*, $T \in \mathcal{K}(E,F)$?

No contexto de espaços de Hilbert, as respostas são afirmativas, como se prova a seguir:

Se $T \in \mathcal{K}(H,K) = [\mathcal{F}(H,K)]^{-}$ — cf. nota 1.15 —, tem-se $\lim_n a_n(T) = 0$ e, pelo lema 9, $\lim_n s_n(T) = 0$, qualquer que seja $\mathbf{s}$ função-s. Reciprocamente, se $T \in \mathcal{L}(H,K)$ e $\lim_n s_n(T) = 0$, para uma dada $\mathbf{s}$ função-s, pela nota 8 temos que $\lim_n a_n(T) = 0$, logo $T \in [\mathcal{F}(H,K)]^{-} = \mathcal{K}(H,K)$.

No contexto de espaços de Banach, temos os seguintes resultados:

12. Proposição: *Se* $T \in \mathcal{L}(E,F)$ *e* $(a_n(T))$ *converge para zero, então* $T \in \mathcal{K}(E,F)$.

12. Demonstração: $\lim_n a_n(T) = 0 \Leftrightarrow T \in [\mathcal{F}(E,F)]^{-} \subset \mathcal{K}(E,F)$, com $\mathcal{F}(E,F) = \{T \in \mathcal{L}(E,F) : \dim T < \infty\}$.

□

13. Proposição: $T \in \mathcal{L}(E,F)$ *é compacto* sse $(d_n(T))$ *converge para zero*.

13. Demonstração: Suponhamos que $T \in \mathcal{K}(E,F)$.

Então $(TU_E)^{-}$ é compacto, logo dado $\varepsilon > 0$, arbitrário, existem $y_1, \ldots, y_m \in F$ tais que $TU_E \subset \bigcup_{i=1,\ldots,m} (y_i + \varepsilon U_F)$. Seja $\mathbf{N} = \langle y_1, \ldots, y_m \rangle$, subespaço de $\mathbf{F}$ com dimensão finita ($\leqq m$). Temos que $\| Q^F_{\mathbf{N}} T \| = \sup\{ \| Q^F_{\mathbf{N}} Tx \|_{F/\mathbf{N}} : \|x\|_E = 1 \} \leqq \sup\{ \| Q^F_{\mathbf{N}} (y_i + \varepsilon y) \|_{F/\mathbf{N}} : i=1, \ldots, m, \|y\|_F \leqq 1 \} = \sup\{ \| Q^F_{\mathbf{N}} (\varepsilon y) \|_{F/\mathbf{N}} : \|y\|_F \leqq 1 \} \leqq \sup\{ \| \varepsilon y \|_F : \|y\|_F \leqq 1 \} = \varepsilon$. Para $n > n_0 = \dim \mathbf{N}$ vem então $d_n(T) \leqq d_{n_0+1}(T) \leqq \varepsilon$, atendendo a (1) da definição 6. Como $\varepsilon > 0$ foi considerado arbitrariamente, provámos que $\lim_n d_n(T) = 0$.

Reciprocamente:

Suponhamos que $\lim_n d_n(T) = 0$. Queremos provar que TU_E é relativamente compacto, o que é equivalente a provar que TU_E é totalmente limitado, já que **F** é completo — cf. [6], p. 22.

Seja $\varepsilon>0$, arbitrário. Da hipótese sai que existem $n\in\mathbb{N}$ e $\mathbf{N}$ subespaço de $\mathbf{F}$ tais que $\dim \mathbf{N} < n$ e $\| Q^F_N T \| < \varepsilon$. Pelo corolário II.4, U_N é compacto (em **F**), o mesmo sucedendo a $(\|T\|+\varepsilon)U_N$, e portanto existem $y_1, \ldots, y_m \in \mathbf{F}$ tais que $(\|T\|+\varepsilon)U_N \subset \cup_{i=1,\ldots,m} (y_i+\varepsilon U_F)$. Ora, se $x\in U_E$ temos que $\| Q^F_N Tx \|_{F/N} \leqq \| Q^F_N T\| \|x\|_E \leqq \| Q^F_N T \| < \varepsilon$, logo existe $y\in \mathbf{N}$ tal que $\|Tx-y\|_F<\varepsilon$. Então $\|y\|_N \leqq \|y-Tx\|_F + \|Tx\|_F < \varepsilon + \|Tx\|_F \leqq \|T\|+\varepsilon$ e portanto $y \in (\|T\|+\varepsilon)U_N \subset \cup_{i=1,\ldots,m} (y_i+\varepsilon U_F)$, donde sai que $\|y-y_i\|_F \leqq \varepsilon$ para algum y_i, $i=1,\ldots,m$. Assim, $\|Tx-y_i\|_F \leqq \|Tx-y\|_F + \|y-y_i\|_F < 2\varepsilon$, concluindo-se que $TU_E \subset \cup_{i=1,\ldots,m} (y_i+2\varepsilon U_F)$. Como $\varepsilon>0$ foi considerado arbitrariamente, provámos que TU_E é totalmente limitado.

□

14. Corolário: $T\in\mathcal{L}(E,F)$ *é compacto* sse $(c_n(T))$ *converge para zero*.

14. Demonstração: Usando sucessivamente o teorema de Schauder — II.21 —, a proposição 13 e o lema 4, podemos escrever T compacto $\Leftrightarrow$ T' compacto $\Leftrightarrow \lim_n d_n(T') = 0 \Leftrightarrow \lim_n c_n(T) = 0$.

□

Na secção anterior provámos que $[\mathcal{F}(H,K)]^- = \mathcal{K}(H,K)$ — cf. nota 1.15.

Definindo $\mathcal{F}(E,F)$ de modo análogo, isto é, $\mathcal{F}(E,F) = \{T\in\mathcal{L}(E,F) : \dim T < \infty\}$, verifica-se a inclusão trivial $[\mathcal{F}(E,F)]^- \subset \mathcal{K}(E,F)$, e durante muito tempo pensou-se que se verificava mesmo a igualdade, como no caso de espaços de Hilbert — até que Enflo — cf. [10] — arranjou um contra-exemplo. Consequentemente, existem operadores compactos que não podem ser aproximados por operadores de dimensão finita, e, assim, a sucessão dos números de aproximação dum tal operador não pode convergir para zero, enquanto que a sucessão dos números de Kolmogorov, tal como a dos números de Gelfand, converge para zero, já que o operador é compacto.

Existem portanto operadores (compactos) cujas sucessões dos números de aproximação diferem das sucessões dos números-s associados a outras funções-s, o que significa que *no contexto de espaços de Banach não existe análoga da proposição 8, isto é, as funções-s não coincidem mesmo quando restringidas a operadores compactos*.

3. Estimativas de valores próprios

Durante esta secção, $T \in \mathcal{K}(E)$, podendo portanto usar-se o material estabelecido no capítulo II relativo a operadores compactos actuando no mesmo espaço. Designamos por $(\lambda_n(T))$ a *sucessão dos valores próprios de* T (recorde-se a convenção implícita nesta designação — cf. nota II.20).

Começamos com o seguinte

1. Lema: *Seja* $T \in \mathcal{K}(E)$ *e* $n \in \mathbb{N}$ *com* $\lambda_n(T) \neq 0$. *Então existe* $E_n \subset E$, *subespaço de dimensão* n *invariante por* T, *tal que a sucessão dos valores próprios de* $T_n = T|_{E_n} : E_n \to E_n$ *é definida por* $\lambda_j(T_n) = \lambda_j(T)$ *se* $j = 1, \ldots, n$, *e* $\lambda_j(T_n) = 0$ *se* $j > n$.

1. Demonstração: Se $\mu_1, \ldots, \mu_m$ forem os valores próprios distintos no conjunto $\{\lambda_1(T), \ldots, \lambda_n(T)\}$, temos que $\Sigma_{j=1,\ldots,m-1} \operatorname{mult}(T,\mu_j) < n \leq \Sigma_{j=1,\ldots,m} \operatorname{mult}(T,\mu_j)$, com $\operatorname{mult}(T,\mu_j)$ a *multiplicidade de* μ_j *como valor próprio de* T.

Seja então $k = n - \Sigma_{j=1,\ldots,m-1} \operatorname{mult}(T,\mu_j)$ e $Y_j = \cup_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{Ker}(\mu_j I - T)^i$, $j = 1, \ldots, m$.

Sabemos, a partir do teorema II.11, que $T(Y_j) \subset Y_j$, logo podemos considerar o operador

$T_j = T|_{Y_j} : Y_j \rightarrow Y_j$, que é compacto , já que Y_j tem dimensão finita , $j = 1, \ldots, m$ — cf. corolário II.6 e proposição II.9 .

É óbvio que μ_j é valor próprio de T_j , $j = 1, \ldots, m$. Além disso , se $\lambda y - Ty = 0$, para $0 \neq y \in Y_j$, repare-se que existe $i \in \mathbf{N}$ tal que (designando por C^i_p a combinação de i elementos p a p) $0 = (\mu_j\mathbf{I}-T)^i y = [(\mu_j-\lambda)\mathbf{I} + (\lambda\mathbf{I}-T)]^i y = (\mu_j-\lambda)^i\mathbf{I}y + [\Sigma_{p=1,\ldots,i} C^i_p(\mu_j-\lambda)^{i-p}(\lambda\mathbf{I}-T)^{p-1}](\lambda\mathbf{I}-T)y = (\mu_j-\lambda)^i y$ e portanto $\lambda = \mu_j$. Então μ_j é o único valor próprio de T_j , $j = 1, \ldots, m$. Temos também que $\operatorname{mult}(T_j,\mu_j) = \dim \cup_{i\in\mathbf{N}} \operatorname{Ker}(\mu_j\mathbf{I}_j-T_j)^i = \dim \cup_{i\in\mathbf{N}} \operatorname{Ker}(\mu_j\mathbf{I}-T)^i = \operatorname{mult}(T,\mu_j)$, $j = 1, \ldots, m$, onde convencionámos representar $\mathbf{I}|_{Y_j}$ por $\mathbf{I}_j$.

Usando o teorema de Jordan — cf. 10 do apêndice 1 —, Y_m tem uma base $(y_1, \ldots, y_r)$, com $r = \operatorname{mult}(T,\mu_m)$, relativamente à qual o operador T_m é representado por uma matriz da forma

$$\begin{bmatrix} U_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & U_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & U_s \end{bmatrix},$$

onde cada 0 representa uma matriz constituída apenas por zeros e cada U_i , $i = 1, \ldots, s$, é da forma

$$\begin{bmatrix} \mu_m & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_m & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mu_m & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \mu_m \end{bmatrix}.$$

Seja $Y'_m = \langle y_1, \ldots, y_k \rangle$, para o k definido no início da demonstração . Usando a representação matricial anterior, facilmente se verifica que $T(Y'_m) \subset Y'_m$, logo consideramos também $T'_m = T|_{Y'_m} : Y'_m \to Y'_m$, cujo único valor próprio é , obviamente , $\mu_m \neq 0$. Além disso , designando $\mathbf{I}'_m = \mathbf{I}|_{Y'_m}$, o cálculo directo com a representação matricial acima informa-nos que $y_1, \ldots, y_k \in \cup_{i\in\mathbf{N}} \operatorname{Ker}(\mu_m \mathbf{I}'_m - T'_m)^i$, logo $\operatorname{mult}(T'_m, \mu_m) = k$.

Defina-se $\mathbf{E}_n = [\oplus_{j=1,\ldots,m-1} Y_j] \oplus Y'_m$.

Para provar que a soma é directa, repare-se que $Y_i \cap Y_j = \{0\}$, $i, j = 1, \ldots, m$, $i \neq j$. De facto, se $Y_i \cap Y_j \neq \{0\}$, ter-se-ia $\dim Y_i \cap Y_j \geq 1$, logo $T|_{Y_i \cap Y_j} : Y_i \cap Y_j \to Y_i \cap Y_j$ teria pelo menos um valor próprio λ . Assim, existiria um elemento não nulo $y \in Y_i \cap Y_j$ tal que $\lambda x - Tx = 0$, e então λ seria também valor próprio de T_i e T_j , logo $\mu_i = \lambda = \mu_j$, o que é absurdo. Portanto a soma $Y_i + Y_j$ é directa , $i, j = 1, \ldots, m$, $i \neq j$; como $Y'_m \subset Y_m$, também a soma $Y_i + Y'_m$ é directa , $i \neq m$. Utilizando agora o método de indução, facilmente se prova que $\mathbf{E}_n$ é obtido por meio duma soma directa.

Da definição de $\mathbf{E}_n$ decorre imediatamente que é um espaço com dimensão n e que $T\mathbf{E}_n \subset \mathbf{E}_n$. Obviamente, $\mu_1, \ldots, \mu_m$ são valores próprios de $T_n = T|_{\mathbf{E}_n}$. A verificação de que estes são os únicos valores próprios de T_n também é simples, se usarmos o facto de $\mathbf{E}_n$ ser definido à custa duma soma directa . Finalmente , designando $\mathbf{I}_n = \mathbf{I}|_{\mathbf{E}_n}$, $\operatorname{mult}(T_n, \mu_j) = \dim \cup_{i\in\mathbf{N}} \operatorname{Ker}(\mu_j \mathbf{I}_n - T_n)^i = \dim \cup_{i\in\mathbf{N}} \operatorname{Ker}(\mu_j \mathbf{I} - T)^i = \operatorname{mult}(T, \mu_j)$, $j = 1, \ldots, m-1$, e se $0 \neq x \in \mathbf{E}_n$ é tal que $(\mu_m \mathbf{I} - T)^i x = 0$, para algum $i \in \mathbf{N}$, então $x = (\Sigma_{j=1,\ldots,m-1} x_j) + x_m$, com $x_j \in Y_j$, $j = 1, \ldots, m-1$, e $x_m \in Y'_m$, e portanto $0 = (\mu_m \mathbf{I} - T)^i x = [\Sigma_{j=1,\ldots,m-1} (\mu_m \mathbf{I} - T)^i x_j] + (\mu_m \mathbf{I} - T)^i x_m$, o que implica que cada uma destas parcelas é igual a zero ; então $x_j \in Y_j \cap Y_m$ e já sabemos que isto significa que $x_j = 0$, para $j \neq m$, logo $x = x_m \in Y'_m$. Isto é suficiente para provar que $\mathrm{mult}(T_n, \mu_m) = \mathrm{mult}(T'_m, \mu_m) = k$.

□

1. Nota: Seja E com dimensão finita , $T \in \mathcal{L}(E) = \mathcal{K}(E)$ e μ_j os valores próprios distintos de T , $j = 1, \ldots, m$. Então *podemos escrever* $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_m$, *com* $E_j = \mathrm{Ker}(\mu_j \mathbf{I} - T)^{r_j}$, $j = 1, \ldots, m$, *e* r_j *a multiplicidade de* μ_j *como raíz do polinómio característico de* T ; *além disso*, $r_j = \dim E_j$ — cf. [11], p. 444.

A partir deste resultado, é fácil ver que *a multiplicidade de* μ_j *agora considerada coincide com* $\mathrm{mult}(T, \mu_j)$.

Consideremos inicialmente $\mu_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, m$. É suficiente provar que $\mathrm{Ker}(\mu_j \mathbf{I} - T)^{r_j+1} \subset \mathrm{Ker}(\mu_j \mathbf{I} - T)^{r_j}$, pois nessa altura $\mathrm{mult}(T, \mu_j) = \dim \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Ker}(\mu_j \mathbf{I} - T)^i = \dim \mathrm{Ker}(\mu_j \mathbf{I} - T)^{r_j} = r_j$ — cf. nota II.19 e início da demonstração II.9 . Ora $x \in \mathrm{Ker}(\mu_j \mathbf{I} - T)^{r_j+1} \Rightarrow x = x_1 + \ldots + x_m$, com $x_j \in E_j$, $j = 1, \ldots, m$, e então $x - x_j \in \mathrm{Ker}(\mu_j \mathbf{I} - T)^{r_j+1} \subset Y_j$ e $x - x_j = x_1 + \ldots + x_{j-1} + x_{j+1} + \ldots + x_m \in E_1 \oplus \ldots \oplus E_{j-1} \oplus E_{j+1} \oplus \ldots \oplus E_m \subset Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_{j-1} \oplus Y_{j+1} \oplus \ldots \oplus Y_m$, com Y_j definido como na demonstração anterior, $j = 1, \ldots, m$, logo $x - x_j = 0$, ou seja , $x = x_j \in E_j = \mathrm{Ker}(\mu_j \mathbf{I} - T)^{r_j}$.

Uma rápida inspecção convence-nos que os resultados usados nesta nota são válidos mesmo se algum dos valores próprios for zero . Consequentemente, podemos retirar as restrições $\mu_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, m$.

2. Lema: *Se* $T \in \mathcal{K}(E)$, $N \in \mathbb{N}$ *e* $0 \neq \mu \in \sigma(T^N)$, *então*

$$\mathrm{mult}(T^N,\mu) = \sum_{\substack{\lambda\in\sigma(T)\\ \lambda^N=\mu}} \mathrm{mult}(T,\lambda)$$

2. Demonstração: Repare-se que também $T^N\in\mathcal{K}(E)$ e que portanto μ é um seu valor próprio e $Y = \cup_{j\in\mathbf{N}} \mathrm{Ker}\,(\mu\mathbf{I}-T^N)^j \neq \{0\}$ é um subespaço de $\mathbf{E}$ com dimensão finita — cf. corolário II.15 e nota II.19. Além disso é imediato verificar que Y é invariante por T.

Considere-se então $T_0 = T|_Y : Y \to Y$, que é também compacto. Se $\lambda\in\sigma(T_0)$ temos que $\lambda^N\in\sigma(T_0{}^N)$, pelo teorema da aplicação espectral — cf. I.15. Como $T_0{}^N = T^N|_Y : Y \to Y$, da demonstração 1 decorre que $\lambda^N=\mu$; usando também a nota 1, podemos afirmar que $Y =$

$$\bigoplus_{\lambda\in\sigma(T_0)}[\cup_{j\in\mathbf{N}}\mathrm{Ker}\,(\lambda\mathbf{I}|_Y-T_0)^j] \subset \sum_{\lambda\in\sigma(T),\ \lambda^N=\mu} [\cup_{j\in\mathbf{N}}\mathrm{Ker}\,(\lambda\mathbf{I}|_Y-T_0)^j]$$

$\subset \sum_{\lambda\in\sigma(T),\lambda^N=\mu} [\cup_{j\in\mathbf{N}}\mathrm{Ker}\,(\lambda\mathbf{I}-T)^j]$, e portanto $\mathrm{mult}(T^N,\mu) = \dim Y \leq$

$$\sum_{\lambda\in\sigma(T),\lambda^N=\mu} \dim[\cup_{j\in\mathbf{N}}\mathrm{Ker}\,(\lambda\mathbf{I}-T)^j] = \sum_{\lambda\in\sigma(T),\lambda^N=\mu}\mathrm{mult}(T,\lambda).$$

Reciprocamente :

Pode ver-se por verificação directa que, dado $\lambda\in\mathbb{C}$, $\lambda^N\mathbf{I}-T^N = P(\lambda)(\lambda\mathbf{I}-T) = (\lambda\mathbf{I}-T)\,P(\lambda)$, com $P(\lambda) = \lambda^{N-1}\mathbf{I} + \lambda^{N-2}T + \ldots + \lambda T^{N-2} + T^{N-1}$, donde resulta que $(\lambda^N\mathbf{I}-T^N)^j = P(\lambda)^j(\lambda\mathbf{I}-T)^j$, $j\in\mathbf{N}$, e, consequentemente, para λ tal que $\lambda^N=\mu$ vem $\cup_{j\in\mathbf{N}}\mathrm{Ker}\,(\lambda\mathbf{I}-T)^j \subset Y$ e portanto $\bigoplus_{\lambda\in\sigma(T),\lambda^N=\mu}[\cup_{j\in\mathbf{N}}\mathrm{Ker}\,(\lambda\mathbf{I}-T)^j] \subset Y$, onde o facto de a soma ser directa decorre da demonstração 1. Assim,

$$\sum_{\lambda\in\sigma(T),\lambda^N=\mu}\mathrm{mult}(T,\lambda) = \sum_{\lambda\in\sigma(T),\lambda^N=\mu}\dim[\cup_{j\in\mathbf{N}}\mathrm{Ker}\,(\lambda\mathbf{I}-T)^j] =$$

$$\dim\bigoplus_{\lambda\in\sigma(T),\lambda^N=\mu}[\cup_{j\in\mathbf{N}}\mathrm{Ker}\,(\lambda\mathbf{I}-T)^j] \leq \dim Y = \mathrm{mult}(T^N,\mu).$$

$\square$

2. Nota: Seja (a_i) a subsucessão de $(|\lambda_j(T)|)$ formada pelos seus elementos distintos (consideramos também a hipótese de uma eventual *subsucessão finita* — seja-nos permitido este abuso de linguagem). É fácil verificar, usando o teorema da aplicação espectral — cf. I.15 — que (a_i^N) é a subsucessão de $(|\lambda_j(T^N)|)$ formada pelos seus elementos distintos, estando implícita a mesma convenção que em cima.

Consideremos agora um $a_i^N \neq 0$. O número de termos de $(\lambda_j(T^N))$ cujo módulo é igual a a_i^N é obviamente dado por $n_i = \sum_{\substack{\mu \in \sigma(T^N) \\ |\mu| = a_i^N}} \mathrm{mult}(T^N, \mu)$ — cf. com a construção da *sucessão dos valores próprios de um operador compacto*, a seguir à nota II.19. Usando o lema anterior, $n_i = \sum_{\substack{\mu \in \sigma(T^N) \\ |\mu| = a_i^N}} \sum_{\substack{\lambda \in \sigma(T) \\ \lambda^N = \mu}} \mathrm{mult}(T,\lambda) = \sum_{\substack{\lambda \in \sigma(T) \\ |\lambda|^N = a_i^N}} \mathrm{mult}(T,\lambda) =$

$\sum_{\lambda \in \sigma(T),\ |\lambda| = a_i} \mathrm{mult}(T,\lambda)$, portanto n_i é também o número de termos de $(\lambda_j(T))$ cujo módulo é igual a $a_i \neq 0$.

Então $(|\lambda_j(T)|^N) = (|\lambda_j(T^N)|)$ e, com uma eventual reordenação das sucessões, $([\lambda_j(T)]^N) = (\lambda_j(T^N))$ — cf. nota II.20.

3. Proposição: *Seja* $T \in \mathbf{K}(H)$ *e* $n \in \mathbf{N}$. *Então*

$$\prod_{j=1,\dots,n} |\lambda_j(T)| \leq \prod_{j=1,\dots,n} s_j(T)$$

3. Demonstração: Dado que o caso $\lambda_n(T)=0$ é trivial, supomos $\lambda_n(T) \neq 0$.

Usamos o lema 1, para considerarmos um subespaço de dimensão n $\mathbf{H}_n \subset \mathbf{H}$ com $T\mathbf{H}_n \subset \mathbf{H}_n$, e $T_n = T|_{\mathbf{H}_n} : \mathbf{H}_n \to \mathbf{H}_n$ tal que $\lambda_j(T_n) = \lambda_j(T)$, $j = 1, \dots, n$.

Aplicando a proposição 1.12 (decomposição polar), podemos escrever $T_n = U|T_n|$, com $\mathrm{Ker}\, U = \mathrm{Ker}\, T_n$ e U isometria parcial. Como os valores próprios de T_n são diferentes de zero, Ker $T_n = \{0\}$ e portanto U é isometria. No caso de espaços de Hilbert com dimensão finita, sabemos que isto é equivalente a U ser unitário — cf. [13], p.118 —, logo $|\det U| = 1$, onde det U é o determinante de U — cf. [11], p. 473. Como o determinante é o produto dos valores próprios, com cada valor próprio contado tantas vezes quantas indica a sua multiplicidade como raíz do polinómio característico, que é afinal igual à multiplicidade desse valor próprio — cf. nota 1 —, temos $\prod_{j=1,\dots,n} |\lambda_j(T)| = \prod_{j=1,\dots,n} |\lambda_j(T_n)| = |\det T_n| = |\det(U\,|T_n|)| = \det|T_n| = \prod_{j=1,\dots,n} \lambda_j(|T_n|) = \prod_{j=1,\dots,n} s_j(T_n)$. Sendo $J : \mathbf{H}_n \to \mathbf{H}$ a imersão canónica e $P : \mathbf{H} \to \mathbf{H}_n$ a projecção ortogonal sobre $\mathbf{H}_n$, temos que $T_n = PTJ$ e portanto $s_j(T_n) = s_j(PTJ) \leqq s_j(T)$, pela condição (3) da definição de função-s e atendendo a que $\|J\| = \|P\| = 1$. Então $\prod_{j=1,\dots,n} |\lambda_j(T)| \leqq \prod_{j=1,\dots,n} s_j(T_n)$.

□

Como consequência imediata da proposição que acabámos de demonstrar, temos que

$$|\lambda_n(T)| = [|\lambda_j(T)|^n]^{1/n} \leqq [\prod_{j=1,\dots,n} |\lambda_j(T)|]^{1/n} \leqq [\prod_{j=1,\dots,n} s_j(T)]^{1/n} ,$$

e obtemos uma majoração para cada valor próprio de T em termos de números singulares, mais precisamente, $|\lambda_n(T)|$ *não excede a média geométrica dos* n *primeiros números singulares de* T.

(3.1) — *Será possível obter mesmo* $|\lambda_n(T)| \leqq s_n(T)$, $n \in \mathbf{N}$?

A resposta é negativa.

De facto, decorre da demonstração 3 que no caso de $\mathbf{H}$ ter dimensão finita n e ser $\lambda_n(T) \neq 0$ (portanto T invertível) se verifica mesmo a igualdade

$$\prod_{j=1,\dots,n} |\lambda_j(T)| = \prod_{j=1,\dots,n} s_j(T) .$$

Se for n=2 tem-se então $|\lambda_1(T)| \leqq s_1(T)$ e $|\lambda_1(T)|\,|\lambda_2(T)| = s_1(T)\, s_2(T)$, donde sai $|\lambda_2(T)| \geqq s_2(T)$. Além disso, se a primeira desigualdade for estrita, o mesmo sucederá à última. É o que acontece se tomarmos, por exemplo, $T \in \mathbf{L}(\ell^2_2)$ definido pela matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad :$$

Tem-se $\lambda_1(T) = 2$, $\lambda_2(T) = 1$, e com a ajuda do teorema da aplicação espectral — cf. I.15 — obtem-se $s_1(T) = (3+\sqrt{5})^{1/2}$ e $s_2(T) = (3-\sqrt{5})^{1/2}$.

Voltemos à desigualdade $|\lambda_n(T)| \leqq [\prod_{j=1,\dots,n} s_j(T)]^{1/n}$. Se $\|T\| \leqq 1$, temos que $s_j(T) \leqq \|T\| \leqq 1$ (condição (1) da definição de função-s), logo $\prod_{j=1,\dots,n} s_j(T) \leqq s_n(T)$ e então

(3.2) $$|\lambda_n(T)| \leqq [s_n(T)]^{1/n}$$

Além disso, *esta desigualdade não pode ser melhorada*, já que há casos em que se verifica mesmo a igualdade.

De facto, considerem-se os operadores $T_r \in \mathcal{L}(\ell^2_2)$ definidos pelas matrizes

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ r & 0 \end{bmatrix} \qquad ,$$

onde $0 < r < 1$. Obviamente $\|T_r\| \leqq 1$, portanto $|\lambda_1(T_r)| \leqq s_1(T_r)$, $|\lambda_2(T_r)| \leqq [s_2(T_r)]^{1/2}$, por (3.2). O cálculo directo dá-nos, mais precisamente, $|\lambda_1(T_r)| = |\lambda_2(T_r)| = r^{1/2}$ e $s_1(T_r) = 1$, $s_2(T_r) = r$, donde $|\lambda_2(T_r)| = r^{1/2} = [s_2(T_r)]^{1/2}$, *igualdade válida para todo* $r \in\,]0,1[$.

Este facto permite também afirmar que

(3.3) *não existe uma constante absoluta* $c>0$ *tal que* $|\lambda_n(T)| \leqq c \,.\, s_n(T)$.

(note-se que para $0 < c \leqq 1$, a não existência pode deduzir-se logo da resposta negativa dada à pergunta (3.1)).

Na verdade, raciocinando por absurdo obteríamos, para os operadores T_r definidos acima, que $r^{1/2} = |\lambda_2(T_r)| \leqq c \,.\, s_2(T_r) = c \,.\, r$, ou seja, $r^{1/2} \geqq 1/c$, para todo o $r \in\,]0,1[$, o que é absurdo.

Repare-se que temos estado a raciocinar dentro das hipóteses da proposição 3 , portanto no caso de operadores compactos que actuam em espaços de Hilbert .

No caso de espaços de Banach, as coisas complicam-se, até pelo facto de as funções-s se diversificarem . No entanto, podemos apresentar um resultado bastante geral, para cuja demonstração precisamos do seguinte

4. Lema: *Seja* $T \in \mathcal{K}(E)$ *e* $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$ *um conjunto de valores próprios distintos não nulos de* T . *Então existe uma projecção contínua* P *sobre* $Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_m$, *com* $Y_j = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Ker}(\mu_j I - T)^i$, $j = 1, \ldots, m$, *tal que* $PT = TP$.

4. Demonstração: O teorema II.11 permite escrever

$\nearrow$ $E = Y_j \oplus R_j$, $j = 1, \ldots, m$,

(4.1) $\longrightarrow$ *onde* Y_j *(definido em cima) e* R_j *são subespaços fechados de* E

$\searrow$ *invariantes por* T *(e logo invariantes por* $(\lambda I - T)^k$, *para todo* $\lambda \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$ *)*.

Para cada $j = 1, \ldots, m$, sabemos que a respectiva decomposição de E do modo mencionado acima dá origem a uma projecção contínua P_j sobre Y_j com $\mathrm{Ker}\, P_j = R_j$ — cf. [32], p. 247 .

Consideremos $P = P_1 + \ldots + P_m \in \mathcal{L}(E)$. Temos que

(4.2) $$P^2 = P_1^2 + \ldots + P_m^2 + \Sigma_{j\neq i,\ i,j=1,\ldots,m} P_i P_j = P + \Sigma_{j\neq i,\ i,j=1,\ldots,m} P_i P_j .$$

Por outro lado , provámos durante a demonstração 1 que $Y_j \cap Y_i = \{0\}$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, m$, e isto vai-nos permitir provar que

(4.3) $$Y_j \subset R_i \quad , \quad i \neq j \quad , \quad i, j = 1, \ldots, m .$$

De facto , $y \in Y_j \Rightarrow (\mu_j I - T)^k y = 0$, para algum $k \in \mathbb{N}$; usando (4.1) , $y = y_1 + y_2$, com $y_1 \in Y_i$, $y_2 \in R_i$, e então $0 = (\mu_j I - T)^k y = (\mu_j I - T)^k y_1 + (\mu_j I - T)^k y_2$, onde estas parcelas pertencem, respectivamente, a Y_i e R_i , logo são ambas nulas e portanto $y_1, y_2 \in \mathrm{Ker}\,(\mu_j\mathbf{I}-T)^k \subset Y_j$, donde $y_1 \in Y_i \cap Y_j = \{0\}$ e , finalmente , $y = y_2 \in R_i$.

Uma consequência imediata de (4.3) é que $P_iP_j = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, m$. Substituíndo em (4.2), vem $P^2 = P$, logo P é projecção (contínua). É evidente que $P\mathbf{E} \subset Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_m$; além disso , se x pertence a esta soma directa , decompomos $x = x_1 + \ldots + x_m$, com $x_j \in Y_j$, $j = 1, \ldots, m$, obtendo-se então $Px = Px_1 + \ldots + Px_m = x_1 + \ldots + x_m = x$, usando novamente (4.3).

Finalmente , $PT = P_1T + \ldots + P_mT$ e $TP = TP_1 + \ldots + TP_m$, logo é suficiente provar que $P_jT = TP_j$, $j = 1, \ldots, m$. Dado então $x \in \mathbf{E}$, $x = x_1 + x_2$, com $x_1 \in Y_j$, $x_2 \in R_j$, logo $P_jTx = P_jTx_1 + P_jTx_2 = Tx_1 = TP_jx$, atendendo a (4.1).

□

4. Nota: Repare-se que a projecção contínua P obtida dá origem à decomposição

$$\mathbf{E} = (Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_m) \oplus \mathrm{Ker}\,P$$

por meio de dois subespaços fechados de $\mathbf{E}$ invariantes por T (a invariância de $\mathrm{Ker}\,P$ pode provar-se através da igualdade $PT=TP$). Além disso, o facto de a imagem de P ser dada através duma soma directa permite caracterizar o núcleo de P por meio de

$$\mathrm{Ker}\,P = \bigcap_{j=1,\ldots,m} \mathrm{Ker}\,P_j = \bigcap_{j=1,\ldots,m} R_j ,$$

como facilmente se verifica.

Vimos no decorrer da demonstração 1 que os únicos valores próprios de $T|_{P\mathbf{E}} : P\mathbf{E} \to P\mathbf{E}$ são $\mu_1, \ldots, \mu_m$. Por outro lado, nenhum dos μ_j é, respectivamente, valor próprio de $T|_{R_j}$, $j = 1, \ldots, m$, pois o teorema II.11 diz-nos que $(\mu_j\mathbf{I}-T)|_{R_j}$ é bijectivo . Consequentemente , $\mu_1, \ldots, \mu_m$ não são valores próprios da restrição de T a $\bigcap_{j=1,\ldots,m} R_j = \mathrm{Ker}\,P$.

Como do lema II.16 sai imediatamente que $\sigma_p(T) = \sigma_p(T|_{P\mathbf{E}}) \cup \sigma_p(T|_{\mathrm{Ker}P})$, onde σ_p denota a parte do espectro constituída apenas pelos valores próprios (chamada *espectro* *pontual*), concluímos que os (únicos) valores próprios de $T|_{\mathrm{Ker}P}$ são os elementos do conjunto $\sigma_p(T)\setminus\{\mu_1,\dots,\mu_m\}$.

5. Teorema: *Seja* $T\in\mathcal{K}(E)$ *e* **s** *uma função-s. Então, para todo* $n\in\mathbb{N}$,

$$|\lambda_n(T)| = \lim_k [s_n(T^k)]^{1/k} \quad .$$

5. Demonstração: Provamos que

(5.1) $$\limsup_k [s_n(T^k)]^{1/k} \leq |\lambda_n(T)|$$

(5.2) e $$\liminf_k [s_n(T^k)]^{1/k} \geq |\lambda_n(T)| \quad ,$$

usando o método de indução.

Para $n=1$, trata-se da fórmula do raio espectral — cf. teorema I.17 —, já que $|\lambda_1(T)|=r(T)$ e $s_1(T^k)=\|T^k\|$.

Consideremos agora (5.1), supondo que se verifica para $n-1\geq 1$.

Se $\lambda_{n-1}(T)=\lambda_n(T)$, $\limsup_k [s_n(T^k)]^{1/k} \leq \limsup_k [s_{n-1}(T^k)]^{1/k} \leq |\lambda_{n-1}(T)| = |\lambda_n(T)|$.

Se $\lambda_{n-1}(T)\neq\lambda_n(T)$, designemos por $\{\mu_1,\dots,\mu_m\}$ o subconjunto dos valores próprios distintos no conjunto $\{\lambda_1(T),\dots,\lambda_{n-1}(T)\}$. Com as mesmas notações do lema 4, seja P a projecção aí considerada. Obviamente, $\dim P = \sum_{j=1,\dots,m} \mathrm{mult}(T,\mu_j) = n-1$ — cf. com a construção da sucessão dos valores próprios de T, a seguir à nota II.19 —, logo $\dim PT^k \leq n-1$, para todo $k\in\mathbb{N}$. Então, para $k\in\mathbb{N}$,

(5.3) $$s_n(T^k) \leq a_n(T^k) \leq \|T^k-PT^k\| = \|(I-P)T^k\| = \|(I-P)^kT^k\| = \|[(I-P)T]^k\| ,$$

atendendo ao lema 2.9, à definição 2.1 e ao facto de $I-P$ ser também projecção e P permutar com T. Se λ é valor próprio de $(I-P)T$, existe $x\in E\setminus\{0\}$ tal que $(I-P)Tx=\lambda x$, e então $x\in(I-P)E=\mathrm{Ker}\,P$, logo λ é valor próprio de $(I-P)T|_{\mathrm{Ker}P}:\mathrm{Ker}\,P\to\mathrm{Ker}P$. O recíproco deste resultado é trivial. Assim, os valores próprios de $(\mathbf{I}-P)T$ são os de $(\mathbf{I}-P)T|_{KerP}$. Como, dado $x \in \operatorname{Ker} P$, $(\mathbf{I}-P)Tx = Tx$, as considerações feitas na nota 4 permitem afirmar que os (únicos) valores próprios de $T|_{KerP} = (\mathbf{I}-P)T|_{KerP}$ — ou os de $(\mathbf{I}-P)T$ — são os elementos do conjunto $\sigma_p(T) \setminus \{\mu_1, \dots, \mu_m\}$. Atendendo a que $(\mathbf{I}-P)T$ é compacto — cf. lema II.2 —, o raio espectral $r[(\mathbf{I}-P)T]$ é $|\lambda_n(T)|$ — cf. também corolário II.15 — e então de (5.3) e da fórmula do raio espectral — cf. teorema I.17 — obtemos $\limsup_k [s_n(T^k)]^{1/k} \leqq \lim_k \|[(\mathbf{I}-P)T]^k\|^{1/k} = r[(\mathbf{I}-P)T] = |\lambda_n(T)|$.

Consideremos agora (5.2), supondo que se verifica para $n-1 \geqq 1$.

Como o caso $\lambda_n(T)=0$ é trivial, supomos $\lambda_n(T)\neq 0$.

Usamos o lema 1, para considerarmos um subespaço de dimensão n, $E_n \subset E$ com $TE_n \subset E_n$ e $T_n = T|_{E_n} : E_n \to E_n$ tal que $\lambda_j(T_n) = \lambda_j(T)$, $j = 1, \dots, n$. Assim, $T_n \in \mathcal{L}(E_n)$ é invertível. Seja $J : E_n \to E \in \mathcal{L}(E_n, E)$ a imersão canónica, $P : E \to E_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$ uma projecção sobre E_n — cf. [32], p. 247 — e $A : \ell^n_2 \to E_n \in \mathcal{L}(\ell^n_2, E_n)$ um isomorfismo (topológico) — cf. [32], p. 62. Então $(A^{-1}T_n^{-k}P)\,T^k(JA) \in \mathcal{L}(\ell^n_2)$ é o operador identidade, para todo $k \in \mathbb{N}$, atendendo à invariância de E_n por T. Usando as condições (3) e (5') da definição de função-s, obtemos $1 = s_n(\mathbf{I}_{\ell^n_2})$ $= s_n[(A^{-1}T_n^{-k}P)T^k(JA)] \leqq \|A^{-1}\|\,\|T_n^{-k}\|\,\|P\|\,s_n(T^k)\,\|J\|\,\|A\| \leqq (\|A^{-1}\|\,\|P\|\,\|A\|)\,\|T_n^{-k}\|\,s_n(T^k)$, logo $[s_n(T^k)]^{1/k} \geqq (\|A^{-1}\|\,\|P\|\,\|A\|)^{-1/k}\,\|T_n^{-k}\|^{-1/k}$ e portanto $\liminf_k [s_n(T^k)]^{1/k} \geqq \lim_k (\|A^{-1}\|\,\|P\|\,\|A\|)^{-1/k} \lim_k \|T_n^{-k}\|^{-1/k} = 1.[r(T_n^{-1})]^{-1} = |\lambda_n(T)|$, usando a fórmula do raio espectral e atendendo a que sendo T_n invertível, os valores próprios de T_n^{-1} são os inversos dos valores próprios de T_n, como se verifica facilmente.

□

5. Nota: A fórmula obtida foi demonstrada para o caso de espaços de Hilbert com dimensão finita por Loesener — cf. [23]. Para $T \in \mathcal{K}(E)$ com E de Banach, foi demonstrada por König — cf. [19] —, no caso de a função-s ser dada pela definição 2.5. A demonstração que aqui apresentamos (válida para a definição 2.6 de função-s, que adoptámos) é essencialmente a de [20], pp. 134-135, tendo-se, no entanto, eliminado o uso dos números de Hilbert, que nos parece desnecessário.

6. Lema: *Sejam* $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n \geqq 0$, $b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_n \geqq 0$ *e*

$$\prod_{j=1,\ldots,k} b_j \leqq \prod_{j=1,\ldots,k} a_j \quad \textit{para} \quad k = 1, \ldots, n.$$

Então, para qualquer $0 < p < \infty$ *e* $k = 1, \ldots, n$, *tem-se*

$$\sum_{j=1,\ldots,k} b_j^p \leqq \sum_{j=1,\ldots,k} a_j^p \quad .$$

6. Nota: Para uma demonstração, cf. [20], pp. 33-35.

Como consequência imediata da proposição 3 e do lema anterior, obtemos a seguinte

7. Proposição (desigualdade de Weyl): *Seja* $T \in \mathcal{K}(H)$, $n \in \mathbb{N}$ *e* $0 < p < \infty$. *Então*

$$\sum_{j=1,\ldots,n} |\lambda_j(T)|^p \leqq \sum_{j=1,\ldots,n} [s_j(T)]^p \quad .$$

No capítulo seguinte obteremos, entre outras coisas, generalizações desta desigualdade no contexto mais geral de espaços de Banach.

IV. NÚMEROS DE ENTROPIA

Durante todo o capítulo, $E,F \neq \{0\}$ designam sempre espaços de Banach complexos. Se $T \in \mathcal{K}(E)$, notamos por $(\lambda_n(T))$ a sucessão dos valores próprios de T, tal como na secção anterior.

1. Estimativas de valores próprios

1. Definição: Dado $T \in \mathcal{L}(E,F)$, designamos por *números (exteriores) de entropia* as quantidades

$$e_n(T) = \inf\{\varepsilon \geqq 0 : \exists\, y_1, \ldots, y_q \in F \text{ com } q \leqq 2^{n-1} \text{ e } TU_E \subset \cup_{i=1,\ldots,q}(y_i + \varepsilon U_F)\},$$

para $n \in \mathbb{N}$.

1. Nota: É fácil verificar que se pode definir equivalentemente $e_n(T)$ por $\inf\{\sup\{\inf\{\|Tx-y\|_F : y \in I\} : \|x\|_E \leqq 1\} : I \subset F,\ 0 < \# I \leqq 2^{n-1}\}$, $n \in \mathbb{N}$, obtendo-se para o *n-ésimo número de entropia* um aspecto formalmente análogo ao do 2^{n-1}-ésimo diâmetro de Kolmogorov do conjunto TU_E, $n \in \mathbb{N}$ — cf. proposição III.1.18 —, uma das principais diferenças consistindo no facto de num caso I ser um subconjunto de F e se considerar o seu cardinal, e no outro ser subespaço de F com determinada dimensão. Além disso, é imediato que se tem a relação

(1.1) $$d_{2^{n-1}+1}(T) \leqq e_n(T) \quad , \quad n \in \mathbb{N} ,$$

com $d_m(T)$ o m-ésimo número de Kolmogorov de T — cf. definição III.2.2.

Em vez de $q \leqq 2^{n-1}$, pareceria mais natural considerar $q \leqq n$ ou $q < n$ na definição 1 acima. Neste último caso, obter-se-ia mesmo $d_n(T) \leqq e_n(T)$, $n \in \mathbb{N}$, em vez da desigualdade (1.1). No entanto, a opção pela definição 1 permite provar a aditividade dos números de entropia — cf. lema 3 —, propriedade importante no contexto da teoria dos ideais de operadores — cf., por exemplo, [20] e [27]. Por outro lado, ao considerar-se $q \leqq 2^{n-1}$, a *entropia* : $n \longmapsto e_n(T)$ é uma função de $n \in \mathbb{N}$ de certo modo inversa da *entropia* : $\varepsilon \longmapsto \log_2 N(\varepsilon, T)$, função de variável real positiva, onde $N(\varepsilon, T)$ é o número mínimo de bolas fechadas de raio ε que cobrem o conjunto TU_E, e $\log_2 N(\varepsilon, T)$ se designa por ε*-entropia* deste mesmo conjunto, supondo-se T compacto. A influência desta ideia de ε-entropia na definição 1 provém do facto de a teoria dos números de entropia ter sido apresentada por Pietsch em [27] e, por sua vez, as raízes da noção de ε-entropia repousarem num artigo anterior de Pontrjagin e Schnirelmann — cf. [28] — datado de 1932, como refere o próprio Pietsch. De qualquer modo, podemos já encontrar a consideração de números de entropia (embora sem este nome) na opção $q \leqq n$ e usando a expressão equivalente considerada na nota acima, nos artigos [24] de Mitiagin e Pelczynski e [34] de Triebel.

2. Proposição: *Os números de entropia verificam as condições* (1), (2) *e* (3) *da definição de função-s*, *i. e.*,

(1) $\|T\| = e_1(T) \geqq e_2(T) \geqq \ldots \geqq 0$;

(2) $e_n(T+S) \leqq e_n(T) + \|S\|$, *para* $T, S \in \mathcal{L}(E,F)$, $n \in \mathbb{N}$;

(3) $e_n(TSR) \leqq \|T\|\, e_n(S)\, \|R\|$, *para* $R \in \mathcal{L}(E_0,E)$, $S \in \mathcal{L}(E,F)$, $T \in \mathcal{L}(F,F_0)$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Demonstração: Provamos apenas o que nos parece menos evidente, ou seja, $\|T\| \leqq e_1(T)$.

Consideremos $\varepsilon \geqq 0$ tal que existe $y \in F$ com $TU_E \subset y + \varepsilon U_F$, e portanto $\|Tx - y\|_F \leqq \varepsilon$ para todo $x \in U_E$. Assim, dado $x \in U_E$ temos que $2\|Tx\|_F = \|2.Tx\|_F =$

$\|Tx + Tx\|_F = \|Tx - y + Tx + y\|_F \leqq \|Tx - y\|_F + \|-(Tx + y)\|_F \leqq \varepsilon + \|T(-x) - y)\|_F \leqq 2\varepsilon$,

logo $\|Tx\|_F \leqq \varepsilon$ e então $\|T\| = \sup\{\|Tx\|_F : x \in U_E\} \leqq \varepsilon$, donde sai $\|T\| \leqq e_1(T)$.

□

2. Nota: Uma função $\mathbf{s} : \mathfrak{L} \longrightarrow \ell_\infty$ definida por $\mathbf{s}(T) = (s_n(T))$ que satisfaça as condições (1) , (2) e (3) da definição de função-s , diz-se uma *pseudo-função-s* . Assim , $\mathbf{e} : \mathfrak{L} \longrightarrow \ell_\infty$ *definida por* $\mathbf{e}(T) = (e_n(T))$ *é uma pseudo-função-s* .

Provemos agora a referida *aditividade dos números de entropia*.

3. Lema: *Dados* $T, S \in \mathfrak{L}(E,F)$ *e* $n,m \in \mathbb{N}$, *temos que*

$$e_{n+m-1}(T+S) \leqq e_n(T) + e_m(S) \quad .$$

3. Demonstração: Sejam $\varepsilon_1 , \varepsilon_2 \geqq 0$ tais que existem $y_{11}, \dots, y_{1q(1)}$, $y_{21}, \dots, y_{2q(2)} \in F$ com $q(1) \leqq 2^{n-1}$, $q(2) \leqq 2^{m-1}$ e $TU_E \subset \cup_{i=1,\dots,q(1)} (y_{1i} + \varepsilon_1 U_F)$, $SU_E \subset \cup_{j=1,\dots,q(2)} (y_{2j} + \varepsilon_2 U_F)$. Dado $x \in U_E$, existem então i, j tais que $\|Tx - y_{1i}\|_F \leqq \varepsilon_1$ e $\|Sx - y_{2j}\|_F \leqq \varepsilon_2$, logo $\|(T+S)x - (y_{1i} + y_{2j})\|_F \leqq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ e portanto $(T+S)U_E \subset \cup_{i=1,\dots,q(1)} \cup_{j=1,\dots,q(2)} [(y_{1i} + y_{2j}) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)U_F]$. Como $\{ y_{1i} + y_{2j} : i = 1, \dots, q(1) , j = 1, \dots, q(2) \} \subset F$ com cardinal não superior a $q(1).q(2) \leqq 2^{n-1}.2^{m-1} = 2^{(n+m-1)-1}$, então $e_{n+m-1}(T+S) \leqq \inf(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \leqq e_n(T) + e_m(S)$.

□

3. Nota: Este resultado contém como caso particular a propriedade (2) da proposição 2 .

Analogamente , verifica-se também a *multiplicatividade dos números de entropia*, i. e. ,

4. Lema: *Dados* $S \in \mathfrak{L}(E,F)$, $T \in \mathfrak{L}(F,G)$ *e* $n,m \in \mathbb{N}$, *temos que*

$$e_{n+m-1}(TS) \leqq e_n(T) \cdot e_m(S) \quad .$$

4. Demonstração: Sejam $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geqq 0$ tais que existem $y_{11}, \ldots, y_{1q(1)} \in F$, $y_{21}, \ldots, y_{2q(2)} \in G$ com $q(1) \leqq 2^{m-1}$, $q(2) \leqq 2^{n-1}$ e $TU_F \subset \cup_{j=1,\ldots,q(2)} (y_{2j} + \varepsilon_2 U_G)$, $SU_E \subset \cup_{i=1,\ldots,q(1)} (y_{1i} + \varepsilon_1 U_F)$. Então $(TS)U_E \subset T[\cup_{i=1,\ldots,q(1)} (y_{1i} + \varepsilon_1 U_F)] = \cup_{i=1,\ldots,q(1)} (Ty_{1i} + \varepsilon_1 TU_F) \subset \cup_{i=1,\ldots,q(1)} [Ty_{1i} + \varepsilon_1 \cup_{j=1,\ldots,q(2)} (y_{2j} + \varepsilon_2 U_G)]$ $= \cup_{i=1,\ldots,q(1)} \cup_{j=1,\ldots,q(2)} [(Ty_{1i} + \varepsilon_1 y_{2j}) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 U_G]$. Como $\{Ty_{1i} + \varepsilon_1 y_{2j} : i=1,\ldots,q(1), j=1,\ldots,q(2)\} \subset G$ com cardinal não superior a $q(1).q(2) \leqq 2^{m-1}.2^{n-1} = 2^{(n+m-1)-1}$, então $e_{n+m-1}(TS) \leqq \inf(\varepsilon_1.\varepsilon_2) \leqq e_n(T).e_m(S)$.

□

4. Nota: Este resultado contém como caso particular a propriedade (3) da proposição 2.

O seguinte resultado é devido a Carl e Triebel — cf. [4] —, embora uma versão mais fraca fosse primeiro obtida por Carl — cf. [3].

5. Teorema: *Seja* $T \in \mathcal{K}(E)$ *e* $k, n \in \mathbb{N}$. *Então*

(5.1) $$|\lambda_1(T) \ldots \lambda_n(T)|^{1/n} \leqq 2^{(k-1)/(2n)} e_k(T) \quad .$$

5. Demonstração: Como o caso $\lambda_n(T)=0$ é trivial, supomos $\lambda_n(T) \neq 0$.

De acordo com o lema III.3.1, seja $E_n \subset E$ um subespaço com dimensão n, invariante por T, tal que para $T_n = T|_{E_n} : E_n \to E_n$ é $\lambda_j(T_n) = \lambda_j(T)$, $j=1,\ldots,n$.

Seja $\varepsilon \geqq 0$ tal que existem $y_1, \ldots, y_q \in E$ com $q \leqq 2^{k-1}$ e $TU_E \subset \cup_{i=1,\ldots,q} (y_i + \varepsilon U_E)$. Consequentemente,

(5.2) $\nearrow$ $T_n U_{E_n} = T(U_E \cap E_n) \subset TU_E \cap E_n \subset \cup_{i=1,\ldots,q} [(y_i + \varepsilon U_E) \cap E_n] \subset$

$\searrow$ $\cup_{i=1,\ldots,q} (z_i + 2\varepsilon U_{E_n})$, com z_i, $i=1,\ldots,q$, determinados elementos de E_n.

Recorremos novamente ao teorema de Jordan — cf. 10 do apêndice 1 —, para considerarmos uma base $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{E}_n$ relativamente à qual T_n é representado por uma matriz da forma

$$\begin{bmatrix} U_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & U_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & U_r \end{bmatrix},$$

onde cada 0 representa uma matriz constituída apenas por zeros e cada U_i, $i=1,\ldots,r$, é da forma

$$\begin{bmatrix} \lambda_j(T) & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j(T) & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_j(T) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_j(T) \end{bmatrix}$$

para algum $j \in \{1,\ldots,n\}$, de tal modo que a matriz de T_n relativamente à base $(x_1, \ldots, x_n)$ é *triangular* com a diagonal principal constituída pelos valores próprios de T_n, aparecendo estes tantas vezes quantas indicam as suas multiplicidades.

Identifiquemos o espaço complexo $\mathbf{E}_n$ com o *espaço real* $\mathbb{R}^{2n}$ através da *bijecção* $R : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbf{E}_n$ definida por $R(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) = \Sigma_{j=1,\ldots,n} (a_j + ib_j)\, x_j$, para todo $(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, e onde i representa a unidade imaginária de $\mathbb{C}$. É fácil verificar que

(5.3) $\qquad R(x+y) = Rx + Ry \quad e \quad R(\alpha x) = \alpha Rx\ , \ \forall x,y \in \mathbb{R}^{2n}\ , \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Considere-se o *endomorfismo real* de $\mathbb{R}^{2n}$ definido através da composição $S = R^{-1}T_nR$. Com um pouco de paciência pode ver-se que a matriz de S relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^{2n}$ é da forma

$$\begin{bmatrix} V_1 & & & \\ & V_2 & & * \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & V_n \end{bmatrix} \quad , \text{ onde } \quad V_i = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\,\lambda_j(T) & -\mathrm{Im}\,\lambda_j(T) \\ \mathrm{Im}\,\lambda_j(T) & \mathrm{Re}\,\lambda_j(T) \end{bmatrix}$$

para algum $j \in \{1,\ldots,n\}$, $i=1,\ldots,n$, podendo a escolha dos j ser feita de tal modo que se $i_1 \neq i_2$ são índices de V , então os correspondentes j_1 e j_2 são índices diferentes de λ . Assim ,

(5.4) $\det S = \prod_{i=1,\ldots,n} \det V_i = \prod_{i=1,\ldots,n} [\mathrm{Re}^2\lambda_j(T) + \mathrm{Im}^2\lambda_j(T)] = \prod_{j=1,\ldots,n} |\lambda_j(T)|^2$

— cf. também [11], pp. 321-323 . Designando por vol_{2n} a medida de Lebesgue usual em $\mathbb{R}^{2n}$, temos então que

(5.5) $\mathrm{vol}_{2n}(S\,U_{\mathbb{R}^{2n}}) = |\det S|\,\mathrm{vol}_{2n}(U_{\mathbb{R}^{2n}}) = |\lambda_1(T)\ldots\lambda_n(T)|^2\,\mathrm{vol}_{2n}(U_{\mathbb{R}^{2n}})$

— cf. também [14], p. 153 — para qualquer que seja a norma considerada em $\mathbb{R}^{2n}$ (observe-se que em $\mathbb{R}^{2n}$ todas as normas são equivalentes e portanto geram a mesma topologia; assim , $U_{\mathbb{R}^{2n}}$ é fechado na topologia usual , logo *mensurável* ; o mesmo se passa com $S\,U_{\mathbb{R}^{2n}}$, já que de S linear e invertível — cf. (5.4) — sai que S^{-1} é linear e *limitada*, atendendo à dimensão finita de $\mathbb{R}^{2n}$) . Se definirmos uma norma em $\mathbb{R}^{2n}$ por $\|x\| = \|Rx\|_E$, para todo $x \in \mathbb{R}^{2n}$, é fácil verificar que $U_{\mathbb{R}^{2n}} = R^{-1}U_{E_n}$ e $S\,U_{\mathbb{R}^{2n}} = R^{-1}T_nU_{E_n}$. Considerando então em E_n a tribo e a medida induzidas respectivamente pela tribo de Borel e a medida vol_{2n} de $\mathbb{R}^{2n}$ através da aplicação R , das igualdades anteriores e de (5.5) sai (usando a notação vol para a medida em E_n)

(5.6) $\mathrm{vol}(T_nU_{E_n}) = \mathrm{vol}_{2n}(R^{-1}T_nU_{E_n}) = \mathrm{vol}_{2n}(S\,U_{\mathbb{R}^{2n}}) = |\lambda_1(T)\ldots\lambda_n(T)|^2\,\mathrm{vol}_{2n}(U_{\mathbb{R}^{2n}})$

$$= |\lambda_1(T)\ldots\lambda_n(T)|^2\,\mathrm{vol}_{2n}(R^{-1}U_{E_n}) = |\lambda_1(T)\ldots\lambda_n(T)|^2\,\mathrm{vol}(U_{E_n}) \ .$$

Com a ajuda de (5.3) , podemos provar facilmente que $\mathrm{vol}(x+B) = \mathrm{vol}(B)$ e $\mathrm{vol}(\alpha B) = |\alpha|^{2n}\,\mathrm{vol}(B)$, para $x \in E_n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e B mensurável , usando as propriedades análogas de vol_{2n} (respectivamente a *invariância por tanslação* e *a que resulta* *do facto de a homotetia de razão* α *ter determinante igual a* $|\alpha|^{2n}$ — cf. também [14], p.153, tal como em (5.5) acima). Conjugando estas igualdades com (5.2) e (5.6) obtemos (usando também a subaditividade da medida)

(5.7) $$|\lambda_1(T)\ldots\lambda_n(T)|^2 \operatorname{vol}(U_{En}) \leqq \Sigma_{i=1,\ldots,q} \operatorname{vol}(z_i + 2\varepsilon U_{En}) = q\,.\operatorname{vol}(2\varepsilon U_{En}) \leqq 2^{k-1}.(2\varepsilon)^{2n} \operatorname{vol}(U_{En}) \;.$$

Repare-se agora que $\operatorname{vol}(U_{En}) > 0$ — de facto, $0 < 2^{2n} = \operatorname{vol}_{2n}([-1,1]^{2n}) = \operatorname{vol}_{2n}(\{x\in\mathbb{R}^{2n} : \|x\|_\infty \leqq 1\}) \leqq \operatorname{vol}_{2n}(c.U_{\mathbb{R}^{2n}}) = c^{2n}\operatorname{vol}_{2n}(U_{\mathbb{R}^{2n}}) = c^{2n}\operatorname{vol}(U_{En})$, para algum $c > 0$, atendendo à equivalência das normas em $\mathbb{R}^{2n}$. Então de (5.7) vem $|\lambda_1(T)\ldots\lambda_n(T)|^2 \leqq 2^{2n}.2^{k-1}.\varepsilon^{2n} \Leftrightarrow |\lambda_1(T)\ldots\lambda_n(T)|^{1/n} \leqq 2.2^{(k-1)/(2n)}.\varepsilon$ e portanto

(5.8) $$|\lambda_1(T)\ldots\lambda_n(T)|^{1/n} \leqq 2.2^{(k-1)/(2n)}.e_k(T) \quad , \quad k,n\in\mathbb{N} \quad , \quad T\in\mathcal{K}(E) \;.$$

Vamos ver, finalmente, que podemos retirar o número 2 do segundo membro da desigualdade anterior.

Se $T\in\mathcal{K}(E)$, também $T^N\in\mathcal{K}(E)$, para $N\in\mathbb{N}$ — cf. lema II.2 —, e tem-se $(\lambda_j(T^N)) = ([\lambda_j(T)]^N)$, atendendo à nota III.3.2. Considerando $k, n\in\mathbb{N}$ e $l = N(k-1)+1$, e substituindo em (5.8) com l no lugar de k, vem, atendendo ao lema 4,

$$\begin{aligned}
& [\,\Pi_{j=1,\ldots,n} |\lambda_j(T^N)|\,]^{1/n} \leqq 2.2^{(l-1)/(2n)}.e_l(T^N) \\
\Leftrightarrow\;& [\,\Pi_{j=1,\ldots,n} |\lambda_j(T)|\,]^{N/n} \leqq 2.2^{N(k-1)/(2n)}.e_{Nk-(N-1)}(T^N) \\
\Rightarrow\;& [\,\Pi_{j=1,\ldots,n} |\lambda_j(T)|\,]^{N/n} \leqq 2.2^{N(k-1)/(2n)}.[e_k(T)]^N \\
\Leftrightarrow\;& [\,\Pi_{j=1,\ldots,n} |\lambda_j(T)|\,]^{1/n} \leqq 2^{1/N}.2^{(k-1)/(2n)}.e_k(T) \;.
\end{aligned}$$

Fazendo $N\to\infty$, obtemos (5.1).

□

5. Nota: Como consequência imediata deste teorema temos

(5.9) $$|\lambda_n(T)| \leqq |\lambda_1(T)\ldots\lambda_n(T)|^{1/n} \leqq \sqrt{2}\,e_{n+1}(T) \leqq \sqrt{2}\,e_n(T)$$

(fez-se k=n+1 em (5.1)). Comparando com as observações anteriores ao lema

III.3.4 , mais particularmente com a afirmação (3.3) aí feita , podemos de imediato concluir que **e** *não é uma função-s*. É possível , no entanto , obter a mesma conclusão sem recorrermos ao referido resultado da secção anterior : substituindo T por $\mathbf{I}_E$ em (5.9) acima , com **E** de dimensão finita n , vem $e_{n+1}(\mathbf{I}_E) \geqq 1/\sqrt{2} > 0$ e portanto falha a condição (4) da definição de função-s .

Surge naturalmente a questão de saber o que acontece ao limite correspondente ao do teorema III.3.5 no caso de números de entropia . A resposta é dada pelo seguinte

6. Teorema: *Seja* $T \in \mathcal{K}(E)$ *e* $n \in \mathbf{N}$. *Então* $r(T) = \lim_k [e_n(T^k)]^{1/k}$.

6. Demonstração: Como $[e_n(T^k)]^{1/k} \leqq \|T^k\|^{1/k}$, então $\limsup_k [e_n(T^k)]^{1/k} \leqq \lim_k \|T^k\|^{1/k} = r(T)$, pela fórmula do raio espectral — cf. teorema I.17 . Por outro lado , usando o corolário I.16 e o teorema 5 , vem $r(T) = [(r(T))^k]^{1/k} = [r(T^k)]^{1/k} = |\lambda_1(T^k)|^{1/k} \leqq [2^{(n-1)/2} e_n(T^k)]^{1/k}$, logo $r(T) \leqq \liminf_k [2^{(n-1)/(2k)} (e_n(T^k))^{1/k}] = \liminf_k [e_n(T^k)]^{1/k}$. A conclusão é agora evidente .

□

2. Desigualdades de Weyl

O objectivo principal desta secção é generalizar a proposição III.3.7 para espaços de Banach e alguns números-s , objectivo que só é atingido no teorema 7 desta secção e após o estabelecimento de uma série de resultados preliminares necessários, segundo o esquema seguido, à sua demonstração .

<u>Durante o resto do capítulo usaremos o símbolo Σ_k em vez de $\Sigma_{k=1,\dots,\infty}$, para todas as séries consideradas</u> .

1. Lema: *Se* $\dim E = n \in \mathbf{N}$, *então*

(1.1) $$e_k(\mathbf{I}_E) \leqq 4 \,.\, 2^{-(k-1)/(2n)} \quad , \quad k \in \mathbb{N} \;.$$

1. Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$ tal que $(1+\varepsilon)/\varepsilon = 2^{(k-1)/(2n)}$, isto é , $\varepsilon = (2^{(k-1)/(2n)} - 1)^{-1}$, supondo $k \neq 1$ (o caso $k=1$ é trivial).

Como $\mathbf{E}$ é de dimensão finita , U_E é compacto — cf. corolário II.4 — e portanto podemos considerar um conjunto maximal de elementos $x_1, \ldots, x_p \in U_E$ tais que $\|x_i - x_j\| > 2\varepsilon$, $i \neq j$ (caso contrário poderíamos obter uma sucessão convergente em U_E com elementos distantes entre si de mais de 2ε , o que é absurdo) . Então os conjuntos $x_i + \varepsilon U_E$ são disjuntos , $i=1, \ldots, p$, e verificam-se as inclusões $x_i + \varepsilon U_E \subset (1+\varepsilon) U_E$, $i=1, \ldots, p$, e $U_E \subset \bigcup_{i=1,\ldots,p} (x_i + 2\varepsilon U_E)$. Usando a mesma técnica da demonstração do teorema 1.5 para identificar $\mathbf{E}$ com $\mathbb{R}^{2n}$ e , tal como lá , designando por vol a medida em $\mathbf{E}$ induzida pela medida de Lebesgue usual em $\mathbb{R}^{2n}$, temos $p \,.\, \varepsilon^{2n} . \mathrm{vol}(U_E) = \sum_{i=1,\ldots,p} \mathrm{vol}(x_i + \varepsilon U_E)$ $= \mathrm{vol}\,[\bigcup_{i=1,\ldots,p} (x_i + \varepsilon U_E)] \leqq \mathrm{vol}[(1+\varepsilon)U_E] = (1+\varepsilon)^{2n} \mathrm{vol}(U_E)$, donde $p \,.\, \varepsilon^{2n} \leqq (1+\varepsilon)^{2n}$, ou seja , $p \leqq [(1+\varepsilon)/\varepsilon]^{2n} = 2^{k-1}$. Então

(1.2) $$e_k(\mathbf{I}_E) \leqq 2\varepsilon = 2 \,.(2^{(k-1)/(2n)} - 1)^{-1} \;.$$

Se $(k-1)/(2n) < 1$, (1.1) é trivial , pois então $4 \,.\, 2^{-(k-1)/(2n)} \geqq 2 > \|\mathbf{I}_E\| \geqq e_k(\mathbf{I}_E)$. Se $(k-1)/(2n) \geqq 1$, $2^{(k-1)/(2n)-1} \geqq 1$ e portanto $2^{(k-1)/(2n)}(1 - 1/2) \geqq 1$, ou ainda , $2^{(k-1)/(2n)} - 1 \geqq 2^{(k-1)/(2n)-1}$; conjugando com (1.2) sai $e_k(\mathbf{I}_E) \leqq 4 \,.\, 2^{-(k-1)/(2n)}$.

□

2. Corolário: *Se* $\dim \mathbf{E} = n \in \mathbb{N}$ *e* $0 < q < \infty$, *então*

$$[\sum_k (e_k(\mathbf{I}_E))^q]^{1/q} \leqq \rho_q n^{1/q} \quad ,$$

onde $\rho_q > 0$ *depende apenas de* q *e pode ser tomado igual a* $2^{5/2}[2/(q.\log 2)]^{1/q}$.

2. Demonstração: Usamos o lema anterior para obtermos $\Sigma_k (e_k(I_E))^q \leqq 4^q \Sigma_k (2^{-q/(2n)})^{k-1} = 4^q (1-2^{-q/(2n)})^{-1} = 4^q . 2^{q/(2n)} . (2^{q/(2n)} -1)^{-1}$. Da fórmula de Taylor para a exponencial de base 2 sai que $2^{q/(2n)} \geqq 1 + [q/(2n)].\log 2$. Substituindo na expressão acima, obtemos $\Sigma_k (e_k(I_E))^q \leqq 4^q . 2^{q/(2n)} . [q.\log 2 /(2n)]^{-1} = 2.4^q.2^{q/(2n)}.(q.\log 2)^{-1}.n \leqq 2^{5q/2}.2.(q.\log 2)^{-1}.n$.

□

3. Lema: *Sejam* $0<q<\infty$, $n\in\mathbf{N}$, $T_i \in \mathcal{L}(E,F)$, $i=1,\ldots,n$ *e* $T = \Sigma_{i=1,\ldots,n} T_i$. *Supondo que* $\Sigma_k (e_k(T_i))^q < \infty$, $i=1,\ldots,n$, *tem-se*

(3.1) $A := [\Sigma_k (e_k(T))^q]^{1/q} \leqq 2^{1/r} [\Sigma_{i=1,\ldots,n} [\Sigma_k (e_k(T_i))^q]^{r/q}]^{1/r} =: 2^{1/r} B^{1/r}$,

onde

$$1/r = \begin{cases} 1/q+1 & \text{se } 1\leqq q<\infty \\ 2/q & \text{se } 0<q\leqq 1 \end{cases}$$

3. Demonstração: Seja r tal como indicado em cima. Para se obter (3.1) é suficiente provar que

(3.2) $$\Sigma_{i=1,\ldots,n} [\Sigma_k (e_k(S_i))^q]^{r/q} = 1/2 \Rightarrow [\Sigma_k (e_k(S))^q]^{1/q} \leqq 1,$$

para todos $S_i \in \mathcal{L}(E,F)$, $i=1,\ldots,n$, e $S = \Sigma_{i=1,\ldots,n} S_i$. De facto, se for $B=0$ tem-se $\|T_i\| = e_1(T_i) = 0$, $i=1,\ldots,n$, logo $T=0$ e portanto (3.1) verifica-se trivialmente. Suponhamos agora $B\neq 0$; de $B/(2B)=1/2$ sai $\Sigma_{i=1,\ldots,n} [\Sigma_k (e_k((2B)^{-1/r}T_i)^q]^{r/q} = 1/2$, atendendo a que $e_k(\alpha T_i) = |\alpha| e_k(T_i)$, $\alpha\in\mathbf{C}$, $k\in\mathbf{N}$, como facilmente se verifica usando as propriedades (1) e (3) da proposição 1.2. Aplicando (3.2) ter-se-á então $[\Sigma_k [e_k(\Sigma_{i=1,\ldots,n} (2B)^{-1/r}T_i)]^q]^{1/q} \leqq 1$, ou seja, $(2B)^{-1/r}. A \leqq 1$, donde segue (3.1).

Por seu lado, para que se tenha (3.2) é suficiente provar que

(3.3) $$\{[\Sigma_k (e_k(R_i))^q]^{r/q} \leqq 2^{-k_i}, i=1,\ldots,m, \Sigma_{i=1,\ldots,m} 2^{-k_i} \leqq 1\} \Rightarrow [\Sigma_k (e_k(R))^q]^{1/q} \leqq 1,$$

onde $m\in\mathbf{N}$, $R_i\in\mathcal{L}(E,F)$, $k_i\in\mathbf{N}_0$, $i=1,\dots,m$, e $R=\Sigma_{i=1,\dots,m} R_i$. De facto , suponhamos verificada a hipótese da implicação (3.2) ; podemos mesmo , sem perda de generalidade , supor que $\Sigma_k (e_k(S_i))^q \neq 0$ para todo $i\in\{1,\dots,n\}$. Podemos então escolher $k_i\in\mathbf{N}_0$ tal que $2^{-k_i-1} \leqq [\Sigma_k (e_k(S_i))^q]^{r/q} \leqq 2^{-k_i}$, $i=1,\dots,n$, logo $\Sigma_{i=1,\dots,n} 2^{-k_i-1} \leqq 1/2$, ou seja , $\Sigma_{i=1,\dots,n} 2^{-k_i} \leqq 1$. Aplicando (3.3) obtemos o consequente de (3.2).

Para provar (3.3) podemos , sem perda de generalidade , supor que $\Sigma_{i=1,\dots,m} 2^{-k_i} = 1$ no antecedente da implicação . De facto , suponhamos que (3.3) é válido com esta modificação e consideremos agora o caso em que se tem $\Sigma_{i=1,\dots,m} 2^{-k_i} < 1$. Designemos por l_j , $j=1,\dots,p$, os elementos distintos no conjunto $\{k_i : i=1,\dots,m\}$ e por r_j o número de vezes que l_j aparece nesse conjunto . Assim podemos escrever $\Sigma_{i=1,\dots,m} 2^{-k_i} = \Sigma_{j=1,\dots,p} r_j 2^{-l_j}$. Além disso , escolha-se a indexação dos l_j de tal modo que l_1 seja o maior deles . Se definirmos $r'_1 = 2^{l_1} - \Sigma_{j=2,\dots,p} r_j 2^{l_1-l_j}$ ($\in\mathbf{N}$) , temos que $r'_1 2^{-l_1} + \Sigma_{j=2,\dots,p} r_j 2^{-l_j} = 1$; escolhendo então $R_i=0$ e $k_i=l_1$ para $i=m+1,\dots,r'_1+\Sigma_{j=2,\dots,p} r_j$, obtemos $[\Sigma_k [e_k(\Sigma_{i=1,\dots,m} R_i)]^q]^{r/q} \leqq 1$.

Finalmente , provemos (3.3) com a referida modificação , utilizando para isso o método de indução sobre $\max\{k_1,\dots,k_m\}$, onde $m\in\mathbf{N}$ é variável . No caso $\max\{k_1,\dots,k_m\} = 0$ o antecedente só é verificado para $m=1$ e a implicação é trivial . Suponhamos agora que a implicação é verdadeira para $\max\{k_1,\dots,k_m\} = h$, $\forall m\in\mathbf{N}$; fixemos então $m\in\mathbf{N}$, $k_i\in\mathbf{N}_0$, $R_i\in\mathcal{L}(E,F)$, $i=1,\dots,m$, tais que $\max\{k_1,\dots,k_m\} = h+1$, $[\Sigma_k (e_k(R_i))^q]^{r/q} \leqq 2^{-k_i}$, $i=1,\dots,m$, e $\Sigma_{i=1,\dots,m} 2^{-k_i} = 1$, e consideremos l_j e r_j , $j=1,\dots,p$, tal como atrás . Como $r_1 2^{-(h+1)} + \Sigma_{j=2,\dots,p} r_j 2^{-l_j} = 1$, então $r_1 = 2^{h+1} - \Sigma_{j=2,\dots,p} r_j 2^{h+1-l_j}$ é par . Assim , podemos fazer a reindexação dos k_i iguais a $h+1$ por meio do conjunto de índices $I=\{(1,1),\ldots,(1,2s)\}$, com $s\in\mathbb{N}$. Ora, como $e_{2k-1}(T)+e_{2k}(T)\leqq 2\,.\,e_{2k-1}(T)$, $\forall T\in\mathcal{L}$ — cf. (1) da proposição 1.2 —, tem-se $[\Sigma_k\,(e_k(R_{(1,2j-1)}+R_{(1,2j)}))^q\,]^{1/q}\leqq$ $2^{1/q}\,[\Sigma_k\,(e_{2k-1}(R_{(1,2j-1)}+R_{(1,2j)}))^q\,]^{1/q}\leqq 2^{1/q}\,[\Sigma_k\,(e_k(R_{(1,2j-1)})+e_k(R_{(1,2j)}))^q\,]^{1/q}$ $\leqq 2^{1/r-1}.\,[\,[\Sigma_k\,(e_k(R_{(1,2j-1)}))^q\,]^{1/q}+[\Sigma_k\,(e_k(R_{(1,2j)}))^q\,]^{1/q}\,]$, $j=1,\ldots,s$, atendendo à aditividade dos números de entropia, à desigualdade de Minkowski e a que

$$(u+v)^z\leqq\begin{cases}u^z+v^z & \text{se}\quad 0<z\leqq 1\\ 2^{z-1}(u^z+v^z) & \text{se}\quad 1\leqq z<\infty\end{cases},\quad \text{para}\quad u,v\geqq 0\,.$$

Podemos ainda escrever $[\,\Sigma_k\,(\,e_k(R_{(1,2j-1)}+R_{(1,2j)})\,)^q\,]^{1/q}\leqq$ $2^{1/r-1}.\,[\,2^{-k_{(1,2j-1)}/r}+2^{-k_{(1,2j)}/r}\,]\;=\;2^{1/r-1}.\,2\,.\,2^{-(h+1)/r}\;=\;2^{-h/r}$, $j=1,\ldots,s$. Designando $Q_j=R_{(1,2j-1)}+R_{(1,2j)}$, $j=1,\ldots,s$, podemos escrever $\Sigma_{i=1,\ldots,m}\,R_i=\Sigma_{\substack{i=1,\ldots,m\\k_i<h+1}}\,R_i+\Sigma_{j=1,\ldots,s}\,Q_j$ com $[\Sigma_k\,(e_k(R_i))^q\,]^{r/q}\leqq 2^{-k_i}$ para $i\in\{1,\ldots,m\}$ tal que $k_i<h+1$, $[\Sigma_k\,(e_k(Q_j))^q\,]^{r/q}\leqq 2^{-h}$ para $j\in\{1,\ldots,s\}$, $\Sigma_{\substack{i=1,\ldots,m\\k_i<h+1}}\,2^{-k_i}+\Sigma_{j=1,\ldots,s}\,2^{-h}\;=\;\Sigma_{j=2,\ldots,p}\,r_j\,2^{-l_j}+(r_1/2).2^{-h}=1$ e $\max\{\,\max\{k_i:\ i=1,\ldots,m\,,\ k_i<h+1\}\,,\ h\,\}=h$. Então, pela hipótese de recorrência, $[\Sigma_k\,(\,e_k(\,\Sigma_{i=1,\ldots,m}\,R_i)\,)^q\,]^{1/q}\leqq 1$.

□

4. Proposição: *Seja* $0<q<p<\infty$ *e* $T\in\mathcal{L}(E,F)$ *tal que* $\dim T\leqq n\in\mathbb{N}$. *Então*

$$[\Sigma_k\,(e_k(T))^q\,]^{1/q}\;\leqq\;\rho_{p,q}\,.\,n^{1/q-1/p}.\,\sup\{k^{1/p}.\,a_k(T):\ k=1,\ldots,n\}\,,$$

onde $a_k(T)$ *é o k-ésimo número de aproximação de* T, *e* $\rho_{p,q}>0$ *depende apenas de* p *e* q *e pode ser tomado igual a* $3^{1/q}.2^{2+1/r}.\rho_q.2^{1/q-1/p}.[2^{(1/q-1/p).r}-1]^{-1/r}$, *onde* ρ_q *e* r *são dados, respectivamente, pelo corolário 2 e lema 3.*

4. Demonstração: Seja $N=[\log_2 n]$ a parte inteira de $\log_2 n$. Atendendo à definição de números de aproximação — cf. III.2.1 — e à proposição III.2.10, podemos encontrar operadores $T_i \in \mathcal{L}(E,F)$ com $\dim T_i < 2^i$ tais que $\|T-T_i\| \leq 2\, a_{2^i}(T)$, $i = 0, \ldots, N+1$, onde $T_0 = 0$ e $T_{N+1} = T$. Definindo $D_i = T_i - T_{i-1}$, $i = 1, \ldots, N+1$, temos que $\dim D_i < 2^i + 2^{i-1} = 3.2^{i-1}$ e $T = \Sigma_{i=1,\ldots,N+1} D_i$. Usando a factorização

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "D_i"] \arrow[d, "D_i^o"'] & F \\ D_i(E) \arrow[r, "I_i"'] & D_i(E) \arrow[u, "J_i"'] \end{tikzcd}$$

onde D^o_i é a aplicação induzida por D_i, I_i é a aplicação identidade e J_i a imersão canónica, temos, por (3) da proposição 1.2 e pelo corolário 2, $[\Sigma_k (e_k(D_i))^q]^{1/q} \leq \|J_i\|\, [\Sigma_k (e_k(I_i))^q]^{1/q}\, \|D^o_i\| \leq \rho_q.(3.2^{i-1})^{1/q}.\|D_i\|$, $i = 1, \ldots, N+1$. Como $\|D_i\| = \|T_i - T_{i-1}\| \leq \|T_i - T\| + \|T - T_{i-1}\| \leq 2\, a_{2^i}(T) + 2\, a_{2^{i-1}}(T) \leq 4\, a_{2^{i-1}}(T)$, $i=1, \ldots, N+1$, o lema anterior permite escrever $[\Sigma_k (e_k(T))^q]^{1/q} \leq$

$$\leq 2^{1/r} \left[\Sigma_{i=1,\ldots,N+1} [\Sigma_k (e_k(D_i))^q]^{r/q}\right]^{1/r}$$

$$\leq 2^{1/r} \left[\Sigma_{i=1,\ldots,N+1} \rho_q^{\,r}.3^{r/q}.2^{(i-1).r/q}.4^r.[a_{2^{i-1}}(T)]^r\right]^{1/r}$$

$$= \rho_q . 2^{1/r}. 4 . 3^{1/q} \left[\Sigma_{i=1,\ldots,N+1} 2^{(1/q - 1/p).r.(i-1)}.[2^{(i-1)/p}. a_{2^{i-1}}(T)]^r\right]^{1/r}$$

$$\leq 3^{1/q}.2^{2+1/r}\rho_q.\left[\Sigma_{i=1,\ldots,N+1} 2^{(1/q - 1/p)r(i-1)}\right]^{1/r}.\sup\{2^{(i-1)/p}.a_{2^{i-1}}(T): i=1,\ldots,N+1\}$$

$$\leq 3^{1/q}.2^{2+1/r}\rho_q.\left[\frac{1-2^{(1/q - 1/p)r(N+1)}}{1-2^{(1/q - 1/p)r}}\right]^{1/r}.\sup\{k^{1/p}.a_k(T): k=1,\ldots,n\}$$

$$\leq \left[3^{1/q}.2^{2+1/r}\rho_q.\frac{2^{1/q - 1/p}}{(2^{(1/q - 1/p)r} - 1)^{1/r}}\right].n^{1/q - 1/p}.\sup\{k^{1/p}.a_k(T): k=1,\ldots,n\}.$$

□

4. Nota: Sendo $J_F \in \mathcal{L}(F, \ell_\infty(U_{F'}))$ definido por $J_F x = (a(x))_{a \in U_{F'}}$, $x \in F$ — cf.

[27], C.3.3 — , *verifica-se para os números de Gelfand a relação* $c_n(T) = a_n(J_F T)$, $n \in \mathbb{N}$, $T \in \mathcal{L}(E,F)$ — cf. [27], 11.5.1 e 11.5.6 . Analogamente , sendo $Q_E \in \mathcal{L}(\ell_1(U_E), E)$ definido por $Q_E(\xi_x)_{x \in U_E} = \Sigma_{x \in U_E} \xi_x \, x$, $(\xi_x)_{x \in U_E} \in \ell_1(U_E)$ — cf. [27], C.3.7 — , *verifica-se para os números de Kolmogorov a relação* $d_n(T) = a_n(TQ_E)$, $n \in \mathbb{N}$, $T \in \mathcal{L}(E,F)$ — cf. [27], 11.6.1 e 11.6.6 . Então , substituindo T por $J_F T$ ou TQ_E na proposição anterior , obtemos , respectivamente ,

(4.1) $$[\Sigma_k (e_k(J_F T))^q]^{1/q} \leqq \rho_{p,q} \cdot n^{1/q - 1/p} \cdot \sup\{k^{1/p} \cdot c_k(T) : k=1,\dots,n\}$$

e

(4.2) $$[\Sigma_k (e_k(TQ_E))^q]^{1/q} \leqq \rho_{p,q} \cdot n^{1/q - 1/p} \cdot \sup\{k^{1/p} \cdot d_k(T) : k=1,\dots,n\} .$$

Consultando novamente [27] , de 12.1.8 sai $f_n(J_F T) = f_n(T) = f_n(TQ_E)$, *onde* f_n *é o n-ésimo número interior de entropia* — cf. [27], 12.1.6 — , *que , segundo 12.1.10 do mesmo livro , está relacionado com o n-ésimo número (exterior) de entropia por* $f_n(S) \leqq e_n(S) \leqq 2.f_n(S)$, $S \in \mathcal{L}(E,F)$. Conjugando estes dois resultados , de (4.1) e (4.2) obtemos , respectivamente ,

$$[\Sigma_k (e_k(T))^q]^{1/q} \leqq 2 \cdot \rho_{p,q} \cdot n^{1/q - 1/p} \cdot \sup\{k^{1/p} \cdot c_k(T) : k=1,\dots,n\} \quad \text{e}$$

$$[\Sigma_k (e_k(T))^q]^{1/q} \leqq 2 \cdot \rho_{p,q} \cdot n^{1/q - 1/p} \cdot \sup\{k^{1/p} \cdot d_k(T) : k=1,\dots,n\} .$$

5. Lema: *Sejam* $T \in \mathcal{K}(E)$, $0<p<\infty$, $n \in \mathbb{N}$ *e* $(s_k(T))_{k \in \mathbb{N}}$ *a sucessão dos números de aproximação , de Gelfand ou de Kolmogorov . Então existe* $\sigma_p > 1$ *dependente apenas de* p *tal que*

(5.1) $$|\lambda_n(T)|^p \leqq \sigma_p \cdot [\Sigma_{k=1,\dots,n} (s_k(T))^p] / n .$$

5. Demonstração: Atendendo à definição de números de aproximação — cf. III.2.1 — e à proposição III.2.10 , existe $S \in \mathcal{L}(E)$ com $\dim S < n$ tal que $\|T-S\| \leqq 2 \cdot a_n(T)$. Então , usando (2) da definição III.2.5 e (2) da proposição 1.2 , obtemos , respectivamente ,

(5.2) $a_k(S) \leqq a_k(T) + \|T-S\| \leqq a_k(T) + 2 . a_n(T) \leqq 3 . a_k(T)$, $1 \leqq k \leqq n$,

(5.3) e $e_n(T) \leqq \|T-S\| + e_n(S) \leqq 2 . a_n(T) + e_n(S)$.

Atendendo à proposição 4 podemos escrever , com $0 < q < p$, $n^{1/q} . e_n(S) \leqq [\Sigma_{k=1,\ldots,n} (e_k(S))^q]^{1/q} \leqq \rho_{p,q} . n^{1/q - 1/p} . \sup \{k^{1/p} . a_k(S) : k=1,\ldots,n\}$, ou ainda , $n^{1/p} . e_n(S) \leqq \rho_{p,q} . \sup \{k^{1/p} . a_k(S) : k=1,\ldots,n\} \leqq 3 . \rho_{p,q} . \sup \{k^{1/p} . a_k(T) : k=1,\ldots,n\}$, usando (5.2) . Combinando com (5.3) obtemos $n^{1/p} . e_n(T) \leqq (2 + 3.\rho_{p,q}) . \sup \{k^{1/p} . a_k(T) : k=1,\ldots,n\} \leqq (2 + 3.\rho_{p,q}) . [\Sigma_{k=1,\ldots,n} (a_k(T))^p]^{1/p}$, logo

(5.4) $(e_n(T))^p \leqq (2 + 3.\rho_{p,q})^p . [\Sigma_{k=1,\ldots,n} (a_k(T))^p] / n$.

Usando (5.9) da nota 1.5 , da desigualdade anterior pode ainda tirar-se

(5.5) $|\lambda_n(T)|^p \leqq \sigma_{p,q} . [\Sigma_{k=1,\ldots,n} (a_k(T))^p] / n$,

com $\sigma_{p,q} = 2^{p/2} . (2 + 3.\rho_{p,q})^p > 1$.

Apoiando-nos na nota 4 , a desigualdade (5.4) acima é válida para c_k ou d_k em vez de a_k , desde que se introduza um factor 2^p no segundo membro , vindo então (5.5) modificado em conformidade , isto é , com $\sigma_{p,q} = 2^{3p/2} . (2 + 3.\rho_{p,q})^p > 1$. Concretizando $\sigma_{p,q}$ para algum $q \in]0,p[$, concluímos a demonstração .

□

6. Lema (desigualdade de Hardy) : *Se* $s>1$ *e* $\Sigma_j \alpha_j^s < \infty$, *com* $\alpha_j \geqq 0$, $j \in \mathbb{N}$, *então*

$$\Sigma_j [(\Sigma_{k=1,\ldots,j} \alpha_k) / j]^s \leqq [s/(s-1)]^s . \Sigma_j \alpha_j^s .$$

6. Nota: Trata-se de uma desigualdade clássica ; para uma demonstração , cf. [15], pp. 239-242 .

Tal como anunciado no início desta secção, apresentamos agora uma generalização da proposição III.3.7, que decorre como corolário dos resultados anteriores.

7. Teorema (desigualdade de Weyl) : *Sejam* $T \in \mathcal{K}(E)$, $0<p<\infty$, $n \in \mathbb{N}$ *e* $(s_k(T))_{k\in\mathbb{N}}$ *a sucessão dos números de aproximação, de Gelfand ou de Kolmogorov. Então existe* $c_p>1$ *dependente apenas de* p *tal que*

(7.1) $$[\Sigma_{j=1,\dots,n} |\lambda_j(T)|^p]^{1/p} \leqq c_p . [\Sigma_{j=1,\dots,n} (s_j(T))^p]^{1/p} .$$

Além disso, se $1 \leqq p < \infty$ *há mesmo uma constante absoluta* $c>1$ *que pode substituir* c_p *em (7.1).*

7. Demonstração: Continuamos a considerar (5.1) com $\sigma_{p,q}$ em vez de σ_p, ou seja, deixamos a escolha de $q \in]0,p[$ para depois.

Substituindo $s=2$ e $\alpha_j = \begin{cases} (s_j(T))^{p/2} & \text{se } 1 \leqq j \leqq n \\ 0 & \text{se } j>n \end{cases}$ no lema 6, obtemos

$\Sigma_{j=1,\dots,n} [[\Sigma_{k=1,\dots,j} (s_k(T))^{p/2}]/j]^2 \leqq \Sigma_j [(\Sigma_{k=1,\dots,j} \alpha_k)/j]^2 \leqq 2^2 . \Sigma_j \alpha_j^2 = 2^2 . \Sigma_{j=1,\dots,n} (s_j(T))^p$. Conjugando com o lema 5, vem $[\Sigma_{j=1,\dots,n} |\lambda_j(T)|^p]^{1/p} =$

$$[\Sigma_{j=1,\dots,n} (|\lambda_j(T)|^{p/2})^2]^{1/p} \leqq \sigma_{p/2,q}{}^{2/p} . [\Sigma_{j=1,\dots,n} [(\Sigma_{k=1,\dots,j} (s_k(T))^{p/2})/j]^2]^{1/p}$$
$$\leqq (2.\sigma_{p/2,q})^{2/p} . [\Sigma_{j=1,\dots,n} (s_j(T))^p]^{1/p} .$$

Concretizando $c_{p,q} := (2.\sigma_{p/2,q})^{2/p}$ para algum $q \in]0,p/2[$, obtemos $c_p>1$ para o qual se verifica (7.1).

Particularizemos agora para o caso $1 \leqq p < \infty$.

Queremos provar que podemos escolher q em função de p ($0<q<p/2$) de tal modo que o conjunto $\{ c_{p,q} : 1 \leqq p < \infty \}$ é majorado ; como $c_{p,q} \leqq 2^{2/p} . 2^{3/2} . (2 + 3.\rho_{p/2,q})$, é suficiente provar que $\{\rho_{p/2,q} : 1 \leqq p < \infty\}$ é majorado. Escolhendo $q = p/(p+2)$, temos $0 < q < p/2$ e $0 < q < 1$, logo $1/r = 2/q = 2(p+2)/p$ e portanto $\rho_{p/2,q} =$ $3^{1+2/p} . 2^{4+4/p} . 2^{5/2} . [\, 2.(1+2/p)/\log 2 \,]^{1+2/p} . 2 . [\, 2^{p/[2(p+2)]} - 1 \,]^{-2(p+2)/p} \leqq$ $3^3 . 2^{23/2} . (6 / \log 2)^3 . (2^{1/6} - 1)^{-6} = (18 / \log 2)^3 . 2^{23/2} . (2^{1/6} - 1)^{-6}$, o que completa a demonstração.

Efectuando mais alguns cálculos, concluímos que podemos escolher $c = 2^{7/2} . [\, 2 + 3 . (18 / \log 2)^3 . 2^{23/2} . (2^{1/6} - 1)^{-6} \,]$.

□

7. Nota: A generalização da desigualdade clássica de Weyl — cf. proposição III.3.7 — apresentada neste teorema é devida a Johnson, König, Maurey e Retherford — cf. [17]. Uma outra versão para a demonstração foi dada mais tarde por F. Teixeira — cf. [33] —, usando uma série de resultados preliminares cuja quase totalidade se encontrava já nos trabalhos de Carl — cf. [3] — e Pietsch — cf. [27], nomeadamente 12.1.13 e 6.2.4 —, embora em geral estabelecidos em contextos diferentes. Foi essencialmente este o esquema de demonstração que seguimos, aproveitando, no entanto, para corrigir certas irregularidades de [33], algumas das quais já apareciam em [3].

Já vimos — nota 1.5 — que **e** não é função-s, tendo-se mesmo $e_{n+1}(I_E) > 0 = \lambda_{n+1}(I_E)$, para **E** com dimensão n, e portanto no caso **E** = **H** de Hilbert vem $s_{n+1}(I_H) = \lambda_{n+1}(I_H) < e_{n+1}(I_H)$, o que mostra que *nem no conjunto* $\mathfrak{F}(H,H) \subset \mathfrak{K}(H)$ *os números de entropia coincidem com os números singulares*; por isso não podem ser considerados como suas generalizações ao caso de espaços de Banach. No entanto — é óbvio a partir de (5.9) da secção anterior — também para eles se verifica uma fórmula do tipo (7.1) atrás:

$$[\, \Sigma_{j=1,\dots,n} |\lambda_j(T)|^p \,]^{1/p} \leqq \sqrt{2} . [\, \Sigma_{j=1,\dots,n} (e_j(T))^p \,]^{1/p} .$$

NOTA FINAL

Seja E espaço de Banach complexo.

Recordamos que no capítulo II justificámos a consideração de operadores compactos no nosso trabalho pela necessidade de o espectro ter um aspecto especial, simplificado. Acontece, no entanto, que por vezes a ênfase é mesmo nesse tipo de espectro e não no facto de o operador ser compacto, o que nos leva a pensar não em operadores compactos mas noutros que tenham algumas das suas propriedades, e de tal modo que estas sejam suficientes para que o espectro seja do mesmo tipo. É o caso dos *operadores de Riesz*, isto é, dos elementos T de $\mathcal{L}(E)$ para os quais $(\lambda I-T)E$ é fechado, $\dim[E/(\lambda I-T)E] < \infty$ e $\dim \mathrm{Ker}(\lambda I-T) < \infty$, para todo $\lambda \neq 0$. Em [20] König considera também este tipo de operadores, obtendo generalizações de alguns dos resultados envolvendo operadores compactos apresentados no nosso trabalho.

Outro caminho que leva a generalizações é a consideração de um determinado subconjunto do espectro de um operador de $\mathcal{L}(E)$ que se comporte como a parte não nula do espectro de um operador de $\mathcal{K}(E)$. Tem-se de facto que se E tem dimensão infinita e se se definir o *espectro essencial* de $T \in \mathcal{L}(E)$ pelo conjunto não vazio $\sigma_e(T) = \mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I-T)E$ é fechado, $\dim[E/(\lambda I-T)E] < \infty$ e $\dim \mathrm{Ker}(\lambda I-T) < \infty\} \subset \sigma(T)$ e o *raio do espectro essencial* por $r_e(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_e(T)\}$, então o subconjunto $\Lambda(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| > r_e(T)\}$ *é no máximo numerável e todos os seus elementos são valores próprios isolados em* $\sigma(T)$ *com multiplicidades finitas*. Assim, é possível dispôr os elementos de $\Lambda(T)$ segundo uma sucessão construída de modo análogo à sucessão dos valores próprios de um operador compacto — cf. capítulo II — com a ressalva de agora se colocar $r_e(T)$ onde antes se punha 0. Além disso, não é muito difícil provar que se T é compacto então

$\Lambda(T) = \sigma(T)\backslash\{0\}$. No caso de $\mathbf{E}$ ter dimensão finita, $\sigma_e(T) = \emptyset$ e não podemos definir $r_e(T)$ do modo indicado; no entanto, se pusermos $r_e(T) = 0$ e definirmos $\Lambda(T)$ como atrás, tem-se também $\Lambda(T) = \sigma(T)\backslash\{0\}$. Podemos portanto tentar generalizar para a *sucessão dos elementos* de $\Lambda(T)$ o que provámos para $(\lambda_n(T))$ no caso de T compacto. Zemánek em [35] e F. Teixeira em [33] obtiveram de facto generalizações de alguns dos resultados apresentados no nosso trabalho.

Repare-se que, implícito nas considerações anteriores está o seguinte facto: T *compacto* $\Rightarrow$ $r_e(T) = 0$. Podemos então perguntarmo-nos o que sucede a $r_e(T)$ se T não é compacto. Se definirmos a *medida de não-compacidade* de $T \in \mathbf{L}(\mathbf{E})$ por $\gamma(T) = \inf\{\varepsilon > 0 :\ TU_{\mathbf{E}}$ pode ser coberto por um número finito de bolas de raio $\varepsilon\}$, tem-se

$$r_e(T) = \lim_n [\gamma(T^n)]^{1/n} ,$$

fórmula análoga à do raio espectral e demonstrada independentemente cerca de 1970 por Nussbaum — cf. [25] — e Lebow e Schechter — cf. [22].

Repare-se ainda que $\gamma(T)=0$ *sse* T *é compacto*, atendendo a que $\mathbf{E}$ é espaço completo, e que a medida de não-compacidade de T está evidentemente relacionada com os números de entropia pela fórmula $\gamma(T) = \lim_n e_n(T)$; portanto T *é compacto sse* $\lim_n e_n(T) = 0$, resultado do tipo dos que obtivemos em III.2 para números de Gelfand e Kolmogorov.

APÊNDICE 1

No que se segue, sempre que nada é referido em especial, os espaços vectoriais considerados tanto podem ser reais como complexos.

1. Teorema de Liouville (cf. [30], p.228)**:** *Toda a função inteira limitada é constante.*

2. Corolário do teorema de Hahn-Banach (cf. [6], p.65)**:** *Para todo* $x \neq 0$ *num espaço normado* X, *existe um* $x' \in X'$ *tal que* $\|x'\|=1$ *e* $x'(x)=\|x\|$.

3. Teorema de Banach-Steinhaus (cf. [32], p.170)**:** *Seja* X *um espaço normado e* S *um subconjunto de* X. *Suponhamos que para cada* $x' \in X'$ *a família de escalares* $\{x'(x) : x \in S\}$ *é limitada. Então o conjunto* S *é limitado em* X, *i. e.*, *existe uma constante* $M>0$ *tal que* $\|x\|<M$ *para todo* $x \in S$.

4. Teorema da aplicação aberta (cf. [1], p.274)**:** *Se* T *é uma aplicação linear contínua sobrejectiva de um espaço de Banach* E *para um espaço de Banach* F, *então* T *é uma aplicação aberta de* E *sobre* F.

5. Teorema de Arzelà-Ascoli (cf. [6], p.266)**:** *Se o espaço topológico* X *é compacto, então um conjunto em* $C(X)$ *é relativamente compacto se e só se é limitado e equicontínuo.*

6. Teorema da representação de Riesz (cf. [32], p.142)**:** *Seja* H *um espaço de Hilbert. Então a aplicação que a cada* $y \in H$ *faz corresponder* $x' \in H'$ *definido por* $x'(x)=(x,y)$ *para* $x \in H$, *é bijectiva; além disso,* $\|y\| = \|x'\|$.

7. Teorema de Pitágoras (generalizado) (cf. [16], p.237): *Seja* H *um espaço de Hilbert e seja* $\{z_n : n\in\mathbb{N}\}$ *um conjunto ortogonal em* H , *i. e.*, $z_n \perp z_m$ *para* $n\neq m$. *Então* $\Sigma_{n=1,\dots,\infty} z_n$ *converge sse* $\Sigma_{n=1,\dots,\infty} \|z_n\|^2 < \infty$. *Se* $\Sigma_{n=1,\dots,\infty} z_n = z$, *então* $\|z\|^2 = \Sigma_{n=1,\dots,\infty} \|z_n\|^2$.

8. Teorema de Krein-Šmulian (cf. [6], p.429): *Seja* E *um espaço de Banach. Um conjunto convexo em* E' *é fechado na topologia fraca* se e só se a sua intersecção com todo o múltiplo positivo de* $U_{E'}$ *é fechada na topologia fraca**.

9. Corolário do teorema de Hahn-Banach (cf. [1], p.300): *Seja* M *um subespaço fechado do espaço normado* X , *e suponha-se que* $x_0 \in X\backslash M$. *Então existe uma funcional* $x' \in X'$ *tal que* :

(i) $x'(x) = 0$, $\forall x \in M$;

(ii) $x'(x_0) = 1$;

(iii) $\|x'\| = 1/d$, *com* $d = \mathrm{dist}(x_0 , M)$.

10. Teorema de Jordan (cf. [11], pp.448-449): *Seja* X *um espaço vectorial com dimensão finita sobre um corpo comutativo* $\mathbb{K}$ *e* L *um endomorfismo de* E . *Então as propriedades seguintes são equivalentes*:

(i) *todos os valores próprios de* L *estão em* $\mathbb{K}$;

(ii) *existe uma base de* X *relativamente à qual a matriz de* L *tem a forma*

$$\begin{bmatrix} U_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & U_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & U_r \end{bmatrix} ,$$

onde cada 0 *representa uma matriz constituída apenas por zeros e cada* U_i ,

$i=1,\ldots,r$, *é da forma*

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

APÊNDICE 2

Consideração do caso complexo e uso do teorema espectral — proposição III.1.6 — para provar que todo o operador T compacto positivo em $\mathbf{H}$ de Hilbert tem uma e uma só raíz quadrada compacta positiva.

Se $T=0$, obviamente T é uma sua raíz quadrada compacta positiva. Por outro lado, se $S\neq 0$ fosse uma raíz quadrada compacta positiva de T, pelo lema III.1.4 e corolário II.15 sabemos que existiria um valor próprio $\lambda\neq 0$ de S, logo $Sx = \lambda x$ e $0 = Tx = S^2x = \lambda^2 x$ para algum $x \in \mathbf{H}\setminus\{0\}$, o que é absurdo.

Suponhamos agora $T\neq 0$.

Temos então $T = \sum_{n\in I} \lambda_n(\cdot, x_n)x_n$, nas condições da proposição III.1.6. Designando por μ_i, com i pertencente a um certo conjunto de índices $J\subset\mathbf{N}$, os valores próprios distintos e não nulos de T, podemos ainda escrever $T = \sum_{i\in J} \sum_{\lambda_n=\mu_i} \lambda_n(\cdot, x_n)x_n =$ $\sum_{i\in J} [\mu_i \sum_{\lambda_n=\mu_i} (\cdot, x_n)x_n] = \sum_{i\in J} \mu_i P_{i,T}$, com $P_{i,T}$ a projecção ortogonal de $\mathbf{H}$ sobre $\mathrm{Ker}(\mu_i I - T)$, $i\in J$ — cf. demonstração III.1.6. Note-se que este resultado é válido para todo o operador $T\neq 0$ compacto positivo em $\mathbf{H}$.

Se S for uma raíz quadrada compacta positiva de T, o teorema da aplicação espectral — cf. I.15 — permite afirmar que os valores próprios distintos não nulos de S são todos os números da forma $\mu_i^{1/2}$, $i\in J$. Logo, tal como para T acima, $S = \sum_{i\in J} \mu_i^{1/2} P_{i,S}$.

Obviamente

$$\mathrm{Ker}(\mu_i^{1/2} I - S) \subset \mathrm{Ker}(\mu_i I - T), \quad i\in J. \tag{1}$$

Para provar a inclusão contrária, fixemos um j arbitrário em J e suponhamos que

$x \in \mathrm{Ker}(\mu_j I - T)$. Então $Tx = \mu_j x$ e $Sx = \sum_{i \in J} \mu_i^{1/2} P_{i,S}\, x = \mu_j^{1/2} P_{j,S}\, x$, pois $\mathrm{Ker}(\mu_j I - T) \perp \mathrm{Ker}(\mu_i I - T)$, $i \neq j$ — cf. lema III.1.3 —, e da inclusão (1) sai $x \perp \mathrm{Ker}(\mu_i^{1/2} I - S)$, $i \neq j$. Assim, $\mu_j x = Tx = S^2 x = \mu_j^{1/2} S P_{j,S}\, x = \mu_j^{1/2} \mu_j^{1/2} P_{j,S}\, x = \mu_j P_{j,S}\, x$, atendendo a que $P_{j,S}\, x \in \mathrm{Ker}(\mu_j^{1/2} I - S)$. Como $\mu_j \neq 0$, vem então $x \in \mathrm{Ker}(\mu_j^{1/2} I - S)$.

Logo $\mathrm{Ker}(\mu_i^{1/2} I - S) = \mathrm{Ker}(\mu_i I - T)$, $i \in J$, e portanto $S = \sum_{i \in J} \mu_i^{1/2} P_{i,T}$.

Provámos pois que, se existir raíz quadrada compacta positiva de T, é única e dada pela expressão acima.

Seja então $T^{1/2} = \sum_{i \in J} \mu_i^{1/2} P_{i,T} = \sum_{i \in J} [\mu_i^{1/2} \sum_{\lambda_n = \mu_i} (\cdot, x_n) x_n] = \sum_{i \in J} \sum_{\lambda_n = \mu_i} \lambda_n^{1/2} (\cdot, x_n)\, x_n = \sum_{n \in I} \lambda_n^{1/2} (\cdot, x_n)\, x_n$, que é compacto,

pelo lema III.1.7. É também positivo, pois $(T^{1/2} x, x) = \sum_{n \in I} \lambda_n^{1/2} (x, x_n)(x_n, x) = \sum_{n \in I} \lambda_n^{1/2} |(x, x_n)|^2 \geq 0$. Finalmente, é imediato verificar que $(T^{1/2})^2 = T$.

□

REFERÊNCIAS

[1] - A. Brown + C. Pearcy , *Introduction to operator theory I*, Springer-Verlag , New York , 1977.

[2] - S. R. Caradus + W. E. Pfaffenberger + B. Yood , *Calkin algebras and algebras of operators on Banach spaces*, Marcel Dekker , New York , 1974.

[3] - B. Carl , " Entropy numbers , s-numbers , and eigenvalue problems " , preprint de 1979 ou J. Functional Anal. , 41 (1981) , pp. 290-306.

[4] - B. Carl + H. Triebel , " Inequalities between eigenvalues , entropy numbers , and related quantities of compact operators in Banach spaces " , Math. Annal., 251 (1980) , pp. 129-133.

[5] - R. G. Douglas , *Banach algebra techniques in operator theory*, Academic Press , New York , 1972.

[6] - N. Dunford + J. T. Schwartz , *Linear operators , part I*, Interscience , New York, edição corrigida correspondente à edição de 1957.

[7] - N. Dunford + J. T. Schwartz , *Linear operators , part II*, Interscience , New York , 1963.

[8] - D. E. Edmunds , " Entropy numbers , s-numbers and eigenvalues " , preprint ou Lecture Notes in Math. , 964 , Springer-Verlag (1982), pp. 213-231.

[9] - D. E. Edmunds + H. Triebel , " Entropy numbers for non-compact self-adjoint operators in Hilbert spaces ", Math. Nachr., 100 (1981), pp. 213-219.

[10] - P. Enflo , " A counterexample to the approximation problem in Banach spaces " , Acta Math. , 130 (1973) , pp. 309-317.

[11] - R. Godement , *Cours d'algèbre*, Hermann , Paris , 1973.

[12] - I. C. Gohberg + M. G. Krejn , *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators in Hilbert space*, Transl. of Math. monographs , 18 , Am. Math. Soc. , Providence , 1969.

[13] - P. R. Halmos , *Finite dimensional vector spaces*, University Press , Princeton , 1948.

[14] - P. R. Halmos , *Measure Theory*, Van Nostrand Company , New York , 1950.

[15] - G. H. Hardy + J. E. Littlewood + G. Pólya , *Inequalities* , Cambridge University Press , London , 1934 .

[16] - E. Hewitt + K. Stromberg , *Real and Abstract Analysis* , Springer-Verlag , New York , 1975 .

[17] - W. B. Johnson + H. König + B. Maurey + J. R. Retherford , " Eigenvalues of p-summing and l_p-type operators in Banach spaces " , J. Functional Anal. , 32 (1979) , pp. 353-380 .

[18] - A. Kolmogoroff , " Über die beste annäherung von funktionen einer gegebenen funktionenklasse " , Annals of Math. , 37 (1936) , pp. 107-110 .

[19] - H. König , " A formula for the eigenvalues of a compact operator " , Studia Math. , 65 (1979) , pp. 141-146 .

[20] - H. König , *Eigenvalue distribution of compact operators* , Birkhäuser Verlag , Basel , 1986 .

[21] - C. Kuratowski , " Sur les espaces complets " , Fund. Math. , 15 (1930) , pp. 301-309 .

[22] - A. Lebow + M. Schechter , " Semigroups of operators and measures of noncompactness " , J. Functional Anal. , 7 (1971) , pp. 1-26 .

[23] - C. Loesener , *Sur la recherche des valeurs propres de matrices mal conditionées* , Thèse , Université Montpellier , 1976 .

[24] - B. S. Mitiagin + A. Pelczynski , " Nuclear operators and approximative dimension " , Proceedings of the I. C. M. , Mockba , 1968 , pp. 366-372 .

[25] - R. D. Nussbaum , " The radius of the essencial spectrum " , Duke Math. J. , 37 (1970) , pp. 473-478 .

[26] - A. Pietsch , " s-numbers of operators in Banach spaces " , Studia Math. , 51 (1974) , pp. 201-223 .

[27] - A. Pietsch , *Operator ideals* , North-Holland , Amsterdam , 1980 .

[28] - L. Pontrjagin + L. Schnirelmann , " Sur une proprieté métrique de la dimension ", Annals of Math. , 33 (1932) , pp. 156-162 .

[29] - F. Riesz + B. Sz.-Nagy , *Leçons d'analyse fonctionnelle* , Akadémiai Kiadó , Budapest, 1953 .

[30] - W. Rudin , *Real and complex analysis* , Tata McGraw-Hill , New Delhi , 1985 .

[31] - E. Schmidt , " Zur theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen " , Math. Annal. , 63 (1907) , pp. 433-476 ; 64 (1907), pp. 161-174 .

[32] - A. E. Taylor + D. C. Lay, *Introduction to functional analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1980.

[33] - M. F. Teixeira, " Weyl's inequality in Banach spaces ", Bull. London Math. Soc., 16 (1984), pp. 1-7.

[34] - H. Triebel, " Interpolationseigenschaften von Entropie- und Durchmesseridealen Kompakter Operatoren ", Studia Math., 34 (1970), pp. 89-107.

[35] - J. Zemánek, " The essential spectral radius and the Riesz part of spectrum ", preprint de 1980 ou Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 35 (1983), pp. 1275-1289.