Boletim da SPM - nº16
Abril de 1990

MODELAÇÃO DO MOVIMENTO DAS ASAS DE GAFANHOTOS VIA POLINOMIOS DE FOURIER

(Relatório de uma experiência pedagógica)

António Caetano
Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra*

0. Tive a sorte de ter sido convidado para orientar o grupo de trabalho de Matemática do VI Encontro Juvenil de Ciência (E.J.C.), que decorreu em Coimbra de 4 a 16 de Setembro de 1988. Digo sorte pois proporcionou-me assim viver uma experiência que ja ambicionava há algum tempo ter, nomeadamente a de leccionar *fora-da-lei*, no sentido em que não tive que cumprir ordens dadas por outrem. Havia, é claro, uma linhas directrizes a seguir, mas estas não me tiraram a liberdade de movimentos, já que estavam essencialmente de acordo com o que pretendia fazer.

Sabia de antemão que os constituintes do grupo de trabalho tinham sido ou iriam ser seleccionados por um processo que de algum modo avaliava as suas capacidades científicas, que seriam entre quatro a seis elementos e que as suas idades estariam em princípio na faixa dos dezasseis aos dezoito anos, correspondendo portanto aos 10º, 11º ou 12º anos de escolaridade. Sabia tambem que estariam no grupo de trabalho de Matemática porque tinham gosto por esta disciplina. De facto tudo isto se concretizou como previsto à excepção do facto de um dos participantes estar no grupo porque não tinha tido lugar no de Química, de modo que é natural que este não se tenha sentido muito feliz durante as sessões. Estas foram em número de três, cada uma durando sensivelmente três horas.

Foi muito importante saber o tipo de publico a que me iria dirigir, e toda a minha preparação previa para o Encontro foi largamente influenciada por isso. Lembro-me que, na altura, no âmbito do meu trabalho na Universidade, precisei de estudar series de Fourier, assunto a que não fora submetido durante os anos da Licenciatura, e tive a ideia de, de certo modo, *matar dois coelhos com uma cajadada só*, apresentando no grupo de trabalho algo relacionado com esse tema. Apesar de não constar do programa da Licenciatura em Matemática em Coimbra, não achei que fosse um assunto assim tão difícil que não pudesse ser abordado (de um modo muito elementar, evidentemente) por individuos que tivessem apenas completado o 9º ano de escolaridade. Havia alguns obstaculos a transpôr, é claro, pois estava consciente que os participantes do grupo de trabalho não sabiam, em principio, calcular integrais, assim como também não deviam saber calcular primitivas nem derivadas; e, pelo meu lado, não estava particularmente interessado em perder tempo a ensinar-lhes todas essas coisas quando havia outras bem mais interessantes para fazer.

Senão vejamos:

Logo nas primeiras páginas de [4] (ver bibliografia no fim) se refere que a aproximação por polinômios de Fourier pode levar à obtenção de um grafico, que se ajuste melhor do que o apresentado nesse livro, para representar a função que relaciona tempo com a posição das asas de um gafanhoto do deserto. Como havia algo

---

* Presentemente (6/89) equiparado a bolseiro (!) na Universidade de Sussex, Inglaterra.

suspeito no modo como as coisas eram apresentadas em [4], referi-me a bibliografia aí indicada: [3]. Neste outro livro deparei também com algumas coisas que não me pareceram totalmente correctas, de modo que fui mesmo à fonte original: [5]. Em nenhum destes três documentos é concretizada a ideia indicada em [4] quanto à aproximação através da soma de várias funções trigonométricas, embora este mesmo caminho seja também apontado em [3]. Assim, por um lado, eu próprio comecei a ficar com curiosidade de saber mais; por outro lado, esta motivação *pescada* fora da Matemática pareceu-me ser suficiente para despertar a atenção inicial da audiência.

Não foi fácil preparar este tema para as sessões do grupo de trabalho. Para isso foram necessárias várias outras sessões de trabalho a estudar sozinho e a imaginar os melhores caminhos a seguir. Repare-se que não basta (ou pelo menos eu não me sentiria feliz se fizesse isso) encarar a audiência e dizer: "Este é o gráfico do gafanhoto. Achem uma fórmula para ele usando somas de senos e co-senos". Eu queria antes que os participantes (participassem!) chegassem aos polinómios de Fourier de uma forma natural, e para isso era necessário que primeiro que tudo eu estivesse receptivo às ideias que eles tivessem para resolver o problema. De modo que parte da minha preparação foi ficar sentado numa cadeira a espera que me viessem à cabeça as ideias que eles poderiam ter, a começar pelas mais simples (tenho a impressão que estas foram as que apareceram no fim!). Depois tive que testar essas ideias e comparar os resultados com os que vinham da aproximação por somas de senos e co-senos ponderadas pelos coeficientes que eu sabia serem os convenientes. Digamos que *preparei o meu improviso* para não ser apanhado de surpresa durante as sessões. Se não se quer um ensino preponderantemente dirigido é necessário haver uma preparação da parte do professor para o que der e vier — caso contrário acaba por ser o professor o dirigido. Alternativamente ou complementarmente a esta preparação prévia pode-se usar a capacidade de improviso na altura, o que pode resultar desde que se conheça muito bem o assunto que se está a tratar.

É talvez conveniente referir que, atendendo a que se tratou de uma primeira abordagem ao assunto, os conceitos e propriedades matemáticos usados não foram estabelecidos com rigor. Nesta fase apelo mais para a convicção das pessoas do que para a lógica intrínseca das coisas. Isto tem além do mais a vantagem de não quebrar demasiado o ritmo a que a investigação do problema deve decorrer de modo a que o interesse da audiência não esmoreça.

Antes de começar, uma palavra aos leitores mais exigentes. Sou preguiçoso por natureza, de modo que tenho uma tendência enorme para usar abusos de linguagem, como por exemplo identificar funções com os seus gráficos e fórmulas. Espero que isto seja desculpável, tanto mais que fiz um esforço para não abusar desses abusos.

1. Na primeira sessão comecei por expôr o problema que pretendia pôr à consideração dos participantes, fazendo vários esquemas do gafanhoto no quadro e explicando como eram feitas as medições (para uma descrição completa da experiência de Zoologia que tomei como motivação — onde o gafanhoto estava pendurado à saída de um túnel de ar e batia as asas ao sentir o vento passar, simulando assim o vôo natural —, aconselho o leitor a consultar o artigo [5], que contém em particular várias figuras elucidativas). Em seguida entreguei-lhes os dados relevantes obtidos experimentalmente e que se encontram essencialmente na p. 494 de [5]. Na fig. 1 pode ver-se uma reprodução dessa página. Temos assim:

(*a*) *Standard stroke* (figure II, 20)

The standard stroke was defined as the average stroke of a *standard Schistocerca* which lifted its basic weight $\pm 10\%$ and flew with a forward speed $v = 3{\cdot}5 \pm 0{\cdot}1$ m/s at a body angle $B = 7 \pm 1°$. In this case the stroke parameters amounted to:

$$N = 1040 \text{ strokes/min},$$
$$b_1 = 33 \pm 1°,$$
$$b_2 = 29 \pm 1°,$$
$$\phi_1 = 68 \pm 2°,$$
$$\phi_2 = 110 \pm 1°.$$

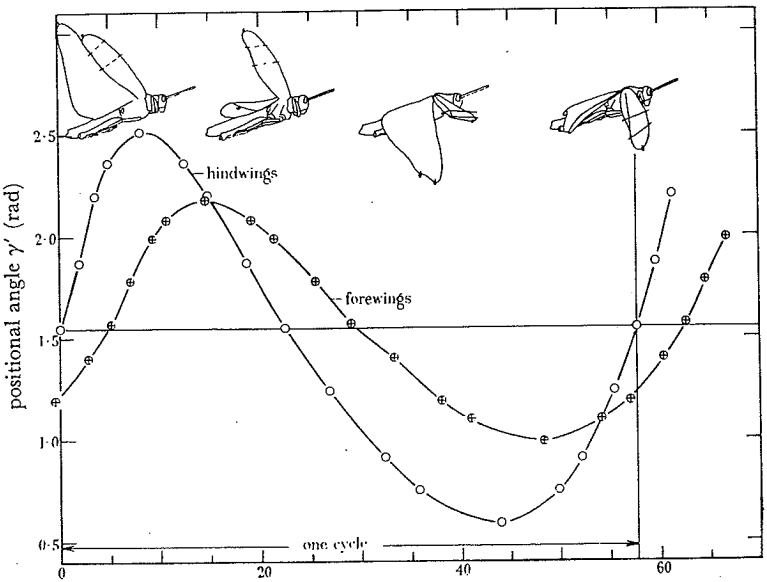


FIGURE II, 20. The standard wing stroke of *Schistocerca gregaria*. The radius of the markings is equal to the standard error of the mean readings along *both* axes. Typical wing positions are shown above the curve and were drawn from slow-motion films, the abscissa referring to a point midways between the two pairs of wings. The cross-lines on the forewings are thin hairs which indicate the twisting of the wing plane; flap of the forewings is seen. The wing tips are marked by black dots. See also figure II, 15. The small degree of scatter is most striking. ○, hindwings, γ'_2; ⊕, forewings, γ'_1.

The angular movements were calculated from N, ϕ and the relative time measurements given in figure II, 15. The resulting standard curve is shown in figure II, 20, which represents an important result of the kinematic analysis. The standard errors along both axes are shown by the radius of the circular markings. The ordinate shows the positional angle γ' in radians and the abscissa the corresponding time in ms, beginning when the hindwings pass the middle position on the upstroke. The forewings are represented by

FIGURA 1

Frequência da batida das asas = 1040 batidas/minuto (define-se uma batida de asas como sendo um ciclo completo no movimento das asas, isto é, o movimento das asas desde uma certa posição destas em relação ao corpo do animal até ao instante em que essa posição volta de novo a ser atingida);

Amplitude da batida das asas anteriores (forewings) medida no plano onde se movimentam essas asas = 68^0;

Amplitude da batida das asas posteriores (hindwings) medida no plano onde se movimentam essas asas = 110^0.

Relativamente aos gráficos da fig. 1, a ordenada mostra o ângulo posicional (isto é, a amplitude entre a posição das asas e a semi-recta dirigida para baixo do corpo do gafanhoto e que faz parte do eixo de simetria das asas, medida no plano em que estas se movem) em radianos e a abcissa o tempo correspondente em milisegundos; começando quando as asas posteriores passam pela posição média durante a fase ascensional do movimento. Os esboços visualizam quatro fases caracteristicas do vôo, desenhadas a partir de um filme em câmara-lenta.

Entreguei uma fotocópia da p.494 de [5] a cada um dos participantes e fiz a minha proposta de trabalho:

Arranjar uma função de fórmula conhecida que se aproxime da função representada, isto para ambos os pares de asas (anteriores e posteriores).

O sentido em que se pretendia a aproximação ficou um bocado vago, mas a ideia era *ajustar* uma curva conhecida à experimental.

Repare-se que a proposta de trabalho foi fundamentalmente dirigida à curiosidade matematica dos participantes (que eu sabia dever estar presente), não dando ênfase à eventual utilidade prática que a obtenção de uma tal fórmula pudesse ter, já que os meus quase nulos conhecimentos de Zoologia não me permitiam discernir sobre a importância (ou a irrelevância) de tal aquisição para essa disciplina. O próprio Weis-Fogh na p.495 de [5] afirma que as fórmulas que ele achou se desviam demasiado da verdadeira relação para que possam ser úteis na estimativa da energia cinética das asas, e acrescenta que para esse objectivo tem que se usar a curva encontrada experimentalmente. Quer isto dizer que, com ou sem fórmulas, o zoólogo atinge sempre o seu objectivo, embora uma boa formula facilitasse os cálculos.

Concordámos em que, antes de mais, precisávamos de determinar numericamente as coordenadas dos pontos marcados nos gráficos da figura 1. Provavelmente o autor do artigo [5] sabia esses valores antes de marcar os pontos, mas não consegui encontrar essa informação em [5].

Como havia réguas graduadas em milímetros à nossa disposição, o que se fez foi comparar milímetros com radianos e milisegundos dos gráficos e aplicar a regra de três simples. Quando reparei que já todos tinham descoberto o caminho a seguir e que portanto a determinação numérica de todos os pontos era apenas uma questão de cálculos fastidiosos, interrompi-lhes essa tarefa apresentando-lhes os resultados que já tinha previamente obtido. E a propósito disto, o processo que segui foi mais sistemático: primeiro graduei em milímetros as quatro arestas do rectângulo que inclui os gráficos da figura 1; depois, com a ajuda dessas marcações, desenhei uma grelha no rectângulo de tal modo que por cada ponto marcado nos gráficos passassem duas linhas perpendiculares entre si e cada uma delas paralela a uma das arestas de rectângulo; em seguida determinei em milímetros as coordenadas desses pontos, dando origem a tabela 1; finalmente, a conversão para as unidades indicadas nos graficos foi feita atraves das formulas

Asas Anteriores	Asas Posteriores
(-1 , 28)	(0 , 40.75)
(5 , 35.5)	(3.25 , 52.25)
(9 , 41.5)	(6 , 64)
(12 , 49)	(8.5 , 69.75)
(16 , 56.5)	(14 , 75)
(18.5 , 60)	(22 , 69.75)
(25.5 , 63.5)	(25.75 , 64)
(33.25 , 60)	(32.5 , 52.25)
(37.25 , 56.5)	(39 , 40.75)
(44.5 , 49)	(46.5 , 30)
(50.5 , 41.5)	(56 , 18.25)
(58 , 35.5)	(62.25 , 12.5)
(66.25 , 28)	(76.5 , 6.75)
(71.5 , 25)	(86.75 , 12.5)
(84.25 , 21)	(90.75 , 18.25)
(94.25 , 25)	(96.25 , 30)
(99 , 28)	(100 , 40.75)

TABELA 1

Asas Anteriores	Asas Posteriores
(-0.6 , 1.19)	(0 , 1.55)
(2.9 , 1.4)	(1.9 , 1.87)
(5.2 , 1.57)	(3.5 , 2.2)
(6.9 , 1.78)	(4.9 , 2.36)
(9.2 , 1.99)	(8.1 , 2.51)
(10.7 , 2.09)	(12.7 , 2.36)
(14.7 , 2.19)	(14.9 , 2.2)
(10.2 , 2.09)	(18.8 , 1.87)
(21.5 , 1.99)	(22.5 , 1.55)
(25.7 , 1.78)	(26.8 , 1.25)
(29.1 , 1.57)	(32.3 , 0.91)
(33.5 , 1.4)	(35.9 , 0.75)
(38.2 , 1.19)	(44.1 , 0.59)
(41.3 , 1.1)	(50 , 0.75)
(48.6 , 0.99)	(52.4 , 0.91)
(54.4 , 1.1)	(55.5 , 1.25)
(57.1 , 1.19)	(57.7 , 1.55)

TABELA 2

$$y = \frac{15}{26}x \quad \text{para a escala horizontal e}$$

(1)

$$y = \frac{2}{71}x + 0.4 \quad \text{para a escala vertical,}$$

sendo x em milímetros e y respectivamente em milisegundos e radianos (note-se que as constantes que entram nestas fórmulas foram determinadas apenas com a ajuda dos dados que tenho vindo a apresentar neste relatório e que os milímetros foram contados respectivamente da esquerda para a direita e de baixo para cima, em ambos os casos com origem no vértice inferior esquerdo do rectângulo da figura 1). A vantagem deste procedimento é que torna as medições mais rigorosas e os resultados mais coerentes entre si.

Aconteceu uma coisa curiosa nesta parte do trabalho: foi a fotocópia da p.494 de [5] que eu usei não ter exactamente o mesmo tamanho que as fotocópias que entreguei aos participantes (foram tiradas em momentos diferentes, se calhar por máquinas diferentes!), sendo portanto natural haver uma certa discrepância entre os valores que apresento na tabela 1 e os que alguém determinar com base numa fotocópia sua. Os valores em milisegundos e radianos (apresentados na tabela 2) devem, no entanto, ser essencialmente os mesmos.

A ideia que surgiu de imediato no grupo de trabalho foi a de usar a função seno como aproximante, e houve quem dividisse o domínio das funções dadas em quatro partes e aproximasse em cada uma delas separadamente por um seno convenientemente modificado: estas modificações podem ser pictoricamente descritas dizendo que se esticou, comprimiu ou translatou horizontal ou verticalmente o respectivo gráfico. Este procedimento de dividir o domínio em partes e aproximar em cada uma delas separadamente fora já usado por Weis-Fogh em [5] (veja-se a p.495, onde o domínio é dividido em dois). Se levarmos este processo ao extremo, em breve nos vemos a dividir o domínio por intermédio das abcissas dos pontos marcados nos gráficos da figura 1 e a aproximar cada um dos pedaços das curvas entre dois pontos consecutivos por um segmento de recta (para quê usar o seno neste caso se uma aproximação linear parece funcionar tão bem!). O problema que surge com esta solução é que a definição analítica desta função aproximante não se consegue com uma fórmula só e portanto podemos pelo menos apontar-lhe um senão do ponto de vista estético. Existem também, contudo, dificuldades técnicas: se pretendermos saber a posição das asas num certo instante fora do domínio, digamos fundamental, dos gráficos da figura 1, por exemplo no instante 376 ms, precisamos primeiro identificar o ramo da definição analítica a usar e só depois substituir a variável da função por 376 e fazer as operações.

Quando alguém falou em uma só fórmula para a função, aproveitei a deixa para os lançar nesse caminho.

Assim, perto do fim da primeira sessão de trabalho tinhamos obtido (embora alguns tivessem precisado de ajuda) as fórmulas

$$f(t) = 1.55 + 0.96 \sin\left(2\pi \frac{t}{57.7}\right) \tag{2}$$

como aproximante do(a) *(função) vôo das asas posteriores* (passaremos a usar esta designação, quando conveniente) e

Asas Anteriores	Asas Posteriores
0.03840	0.00000
0.03244	0.02279
0.01085	0.29290
0.08856	0.32172
0.15516	0.21884
0.16934	0.13311
0.08897	0.30871
0.09886	0.53310
0.18932	0.61216
0.28899	0.51216
0.33579	0.28776
0.23503	0.13329
0.14624	0.00387
0.07049	0.08611
0.00000	0.11619
0.00516	0.07220
0.03840	0.00000

TABELA 3

Asas Posteriores
0.41000
0.26919
0.06638
0.00603
0.05666
0.02136
0.00449
0.00155
0.00009
0.00109
0.09101
0.15267
0.29808
0.44912
0.50282
0.48161
0.41000

TABELA 5

Asas Posteriores
0.31000
0.24126
0.09538
0.06700
0.08842
0.15362
0.16329
0.14553
0.13864
0.14148
0.20215
0.18772
0.06410
0.14593
0.23352
0.30082
0.31000

TABELA 6

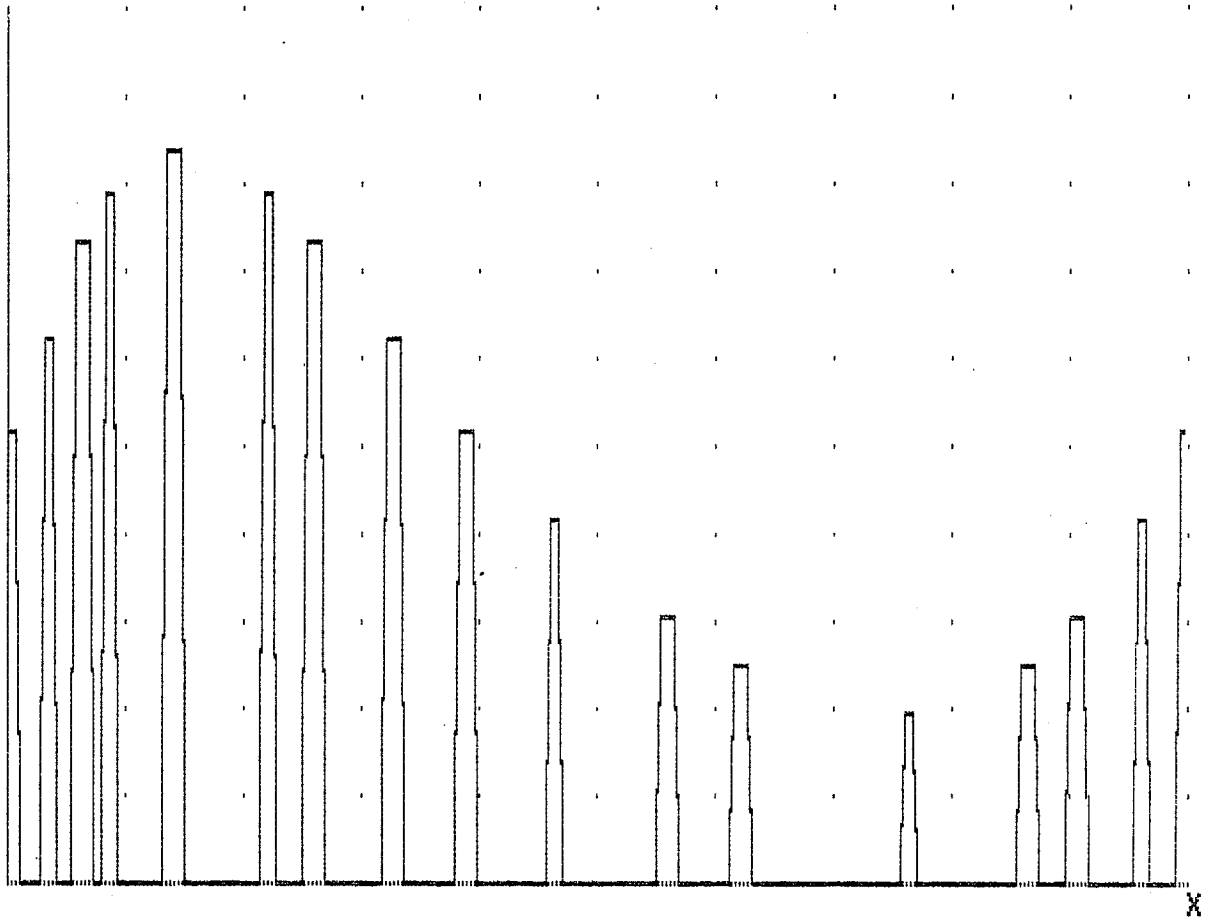


FIGURA 2

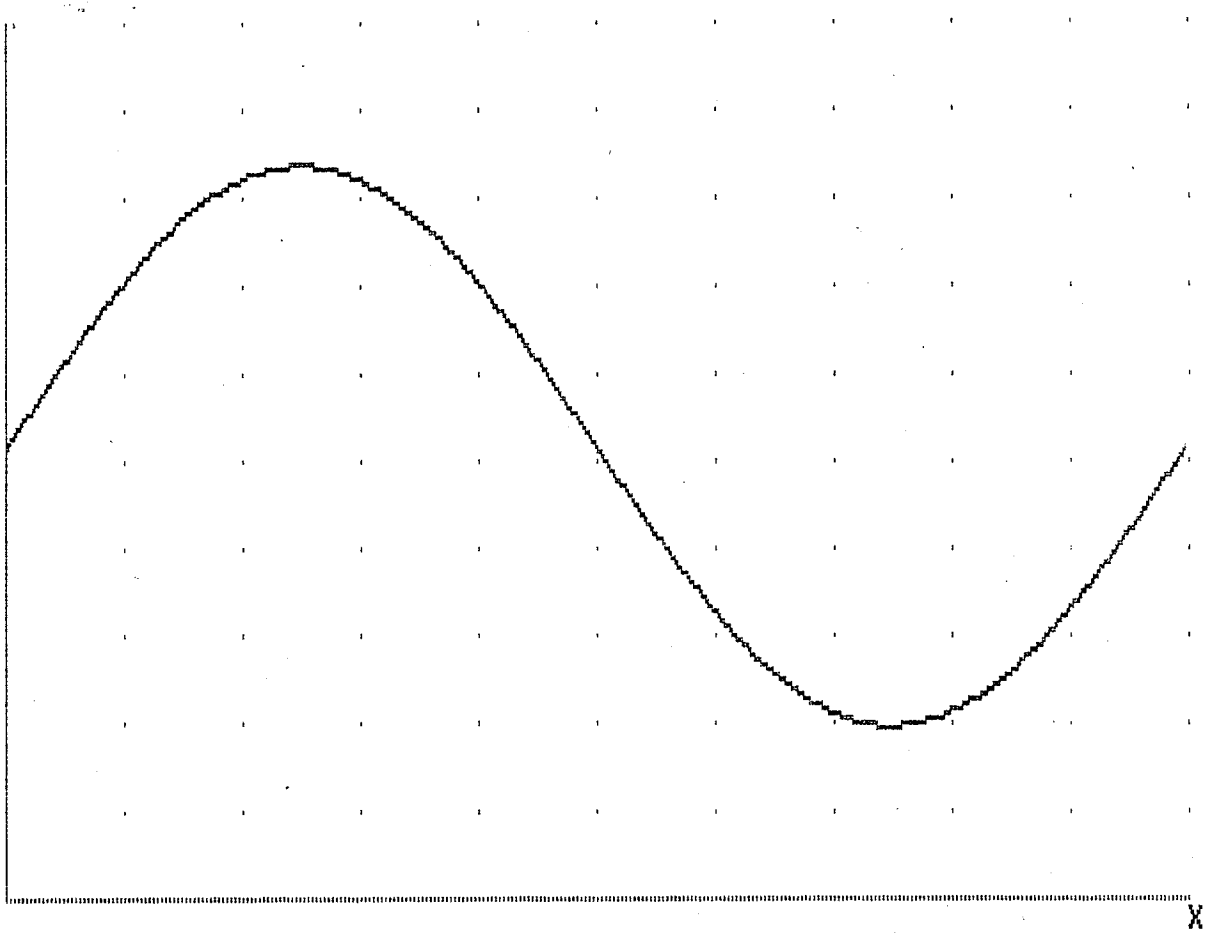


FIGURA 3

$$f(t) = 1.59 + 0.6 \sin\left(2\pi \frac{t-5.34}{57.7}\right)$$

como aproximante da *função vôo das asas anteriores*.

A tabela 3 lista as diferenças entre o valor real da ordenada em cada ponto dos gráficos da figura 1 e o valor calculado através das fórmulas acima escritas. Para abreviar trabalho, estas listas podem ser obtidas de um modo expedito através de programas simples em calculadoras programáveis. É de referir, aliás, que houve sempre duas calculadoras científicas à disposição dos participantes durante as três sessões, o que os levou a trabalhar naturalmente em grupos de dois ou três indivíduos cada. Isto não os impediu, no entanto, de desenvolver ideias individuais. Lembro-me, por exemplo, que uma das pessoas se dedicou durante algum tempo à tarefa de achar fórmulas convenientes (funções de t) que pudesse pôr no lugar de t nas fórmulas acima de tal modo que conseguisse assim compensar as diferenças, indicadas na tabela 3, entre as funções dadas e as aproximantes. É evidente que encorajei esta ideia e tentei acompanhar na medida que me foi possível essa tarefa (que não tinha previsto).

Foi nesta altura que apresentei dois acetatos que tinha preparado previamente com a ajuda do programa MICRO-CALC, vers.3.01. Num deles (figura 3) estava traçado o gráfico da função f aproximante do vôo das asas posteriores; no outro (figura 2) aparecia uma representação *sui generis* dos pontos conhecidos do respectivo gráfico da figura 1 — resultante do modo como consegui dar a volta ao problema de usar as funções do MICRO-CALC para marcar estes pontos. Por sobreposição dos dois acetatos pôde ter-se uma apreciação visual a respeito do *ajuste* entre as duas funções.

A partir daqui sugeri que a atenção se concentrasse no melhoramento da aproximação para o vôo das asas posteriores apenas. Segundo a tabela 3, a diferença máxima encontrada entre as ordenadas efectivas e as aproximantes ascende a mais de 0.6, um erro grande relativamente à amplitude do movimento. Falei-lhes assim em somar várias funções trignométricas, não só senos como também co-senos, afectados de factores multiplicativos convenientes e cujos argumentos fossem também alterados através da multiplicação por determinadas constantes. No fundo isto equivalia em termos visuais a deformar os respectivos gráficos esticando-os ou comprimindo-os horizontal ou verticalmente. Havia no entanto um cuidado a ter: o de não destruir, ao adicionar, o período de 57.7 ms exibido no gráfico da figura 1. Isto consegue-se desde que o argumento $2\pi\frac{t}{57.7}$ da função f obtida anteriormente seja multiplicado apenas por valores inteiros estritamente positivos (repare-se que os negativos não dão origem a mais funções diferentes).

Por isto, o grupo parecia interessado em testar várias funções do estilo

$$(3) \qquad f(t) = 1.55 + \sum_{k=1}^{m} a_k \sin\left(k\, 2\pi \frac{t}{57.7}\right) + \sum_{k=1}^{n} b_k \cos\left(k\, 2\pi \frac{t}{57.7}\right),$$

com m, n $\in \mathbb{N}$ e os a_k's e b_k's constantes reais. Como a maior parte dos participantes estava familiarizada com computadores, pressionaram-me para que esta tarefa de testar fosse feita em computador, usando as capacidades gráficas deste. Embora estivesse mais ou menos preparado para esta eventualidade, não era exactamente isso que tinha previsto que se fizesse. Mas, por outro lado, havia tempo para dar e

```
LIST #7
  10 FOR I=0 TO 3
  20 FOR J=0 TO 4
  30 INP A(I,J)
  40 NEXT J
  45 NEXT I
  50 FOR K=0 TO 3
  60 FOR J=K TO 4
  65 L=4-J+K
  70 A(K,L)=A(K,L)/A
     (K,K)
  80 IF K=3 THEN 140
  90 FOR I=K+1 TO 3
  95 IF A(I,K)=0 THE
     N 110
 100 A(I,L)=A(I,L)/A
     (I,K)-A(K,L)
 110 NEXT I
 120 NEXT J
 130 NEXT K
 140 E=A(3,4):D=A(2,
     4)-A(2,3)*E:C=A
     (1,4)-A(1,2)*D-
     A(1,3)*E
 145 B=A(0,4)-A(0,1)
     *C-A(0,2)*D-A(1
     ,3)*E
 150 PRT B;",";C;","
     ;D;",";E
```

TABELA 4

```
LIST #1
  10 A(1)=0:A(2)=2.9
     :A(3)=5.2:A(4)=
     6.9:A(5)=9.2:A(
     6)=10.7
  20 A(7)=14.7:A(8)=
     19.2:A(9)=21.5:
     A(10)=25.7:A(11
     )=29.1
  30 A(12)=33.5:A(13
     )=38.2:A(14)=41
     .3:A(15)=48.6:A
     (16)=54.4
  40 A(17)=57.7:A(18
     )=1.217:A(19)=1
     .4:A(20)=1.57:A
     (21)=1.78
  50 A(22)=1.99:A(23
     )=2.09:A(24)=2.
     19:A(25)=2.09:A
     (26)=1.99
  60 A(27)=1.78:A(28
     )=1.57:A(29)=1.
     4:A(30)=1.19:A(
     31)=1.1
  70 A(32)=.99:A(33)
     =1.1:A(34)=1.21
     7
  80 RET
```

```
LIST #9
   3 INP "CONST.A1=1
     ,A2=2,B1=3,B2=4
     ,A0=5",C
   5 MODE 5:INP "N="
     ,N
  10 GSB #1
  15 IF C=5 THEN 35
  20 FOR I=1 TO N
  25 GSB C*100
  30 NEXT I
  35 S=0:P=0
  40 FOR I=2 TO N
  50 P=(A(N+I)+A(N+I
     -1))*(A(I)-A(I-
     1))/2
  55 S=S+P
  60 NEXT I
  70 PRT "S=";S
  80 END
 100 A(N+I)=A(N+I)*S
     IN (2*π*(A(I)/5
     7.7))
 110 RET
 200 A(N+I)=A(N+I)*S
     IN (4*π*(A(I)/5
     7.7))
 210 RET
 300 A(N+I)=A(N+I)*C
     OS (2*π*(A(I)/5
     7.7))
 310 RET
 400 A(N+I)=A(N+I)*C
     OS (4*π*(A(I)/5
     7.7))
 410 RET
```

TABELA 7

vender e um bocado passado à frente do visor da máquina era capaz de ser benéfico. Porque não tentar?

Concordei assim que a sessão seguinte começasse na sala dos I.B.M.'s.

2. Alguns minutos antes de começar a segunda sessão já eu estava na sala dos computadores para introduzir em dois ou três destes a função representada na figura 2 . Não é uma tarefa rápida pois essa função tem a seguinte fórmula:

$$1.55\ \mathrm{STEP}\ \frac{x+0.4}{0.8} + 1.87\ \mathrm{STEP}\ \frac{x-1.5}{0.8} + 2.2\ \mathrm{STEP}\ \frac{x-3.1}{0.8} + 2.36\ \mathrm{STEP}\ \frac{x-4.5}{0.8} +$$

$$+ 2.51\ \mathrm{STEP}\ \frac{x-7.7}{0.8} + 2.36\ \mathrm{STEP}\ \frac{x-12.3}{0.8} + 2.2\ \mathrm{STEP}\ \frac{x-14.5}{0.8} + 1.87\ \mathrm{STEP}\ \frac{x-18.4}{0.8} +$$

$$+ 1.55\ \mathrm{STEP}\ \frac{x-22.1}{0.8} + 1.25\ \mathrm{STEP}\ \frac{x-26.4}{0.8} + 0.91\ \mathrm{STEP}\ \frac{x-31.9}{0.8} + 0.75\ \mathrm{STEP}\ \frac{x-35.5}{0.8} +$$

$$+ 0.59\ \mathrm{STEP}\ \frac{x-43.7}{0.8} + 0.75\ \mathrm{STEP}\ \frac{x-49.6}{0.8} + 0.91\ \mathrm{STEP}\ \frac{x-52.0}{0.8} + 1.25\ \mathrm{STEP}\ \frac{x-55.1}{0.8} +$$

$$+ 1.55\ \mathrm{STEP}\ \frac{x-57.3}{0.8}$$

Entretanto os participantes foram chegando.

Parece-me que de um modo geral se considerou $m+n \leq 4$ em **(3)**, aliás seguindo sugestão minha, pois quanto mais constantes se considerassem, mais trabalho se teria no seu cálculo; além disso, o programa MICRO-CALC usado não estava adaptado à introdução fácil de expressões compridas. Houve quem se dedicasse à determinação das constantes por meio de tentativas e visualização, comparando com o gráfico da figura 2. Aliás, a comparação através da visualização no ecrã do computador foi usada por todos, embora um outro participante tentasse achar as constantes através de um sistema de quatro equações com quatro incógnitas e outro ainda, já referido anteriormente, testasse várias fórmulas de t no lugar t em **(2)**. Portanto houve pelo menos três abordagens diferentes para resolver o problema, sendo a segunda apontada atrás a que mais trabalho dava. Felizmente tinha previsto que alguém se lembrasse de ir por esse caminho, de modo que tinha preparado um pequeno programa numa calculadora programável para resolver sistemas de quatro equações com quatro incognitas, baseando-me no método da condensação da matriz completa do sistema. O aspecto desse programa no BASIC da CASIO FX – 702P é o que se apresenta na tabela 4. Repare-se que para que a linha 70 possa ser cumprida tem que se supor que $A(K, K) \neq 0$, designando este $A(K,K)$ não só o elemento na linha K+1 e coluna K+1 da matriz completa do sistema como também outros elementos que durante a execução do programa ocupem essa posição. Isto tem como consequência que este programa não funciona nalguns casos, mas na prática seria preciso muito *azar* para que na resolução dos sistemas que precisamos de considerar aparecesse algum $A(K,K) = 0$. Assim, o que se faz é seleccionar quatro pontos na tabela 2 (coluna das asas posteriores) e obrigar o polinómio de senos e co-senos a passar por esses quatro pontos – obtém-se deste modo um possível sistema de quatro equações com quatro incógnitas que provavelmente se pode resolver com o programa indicado. É

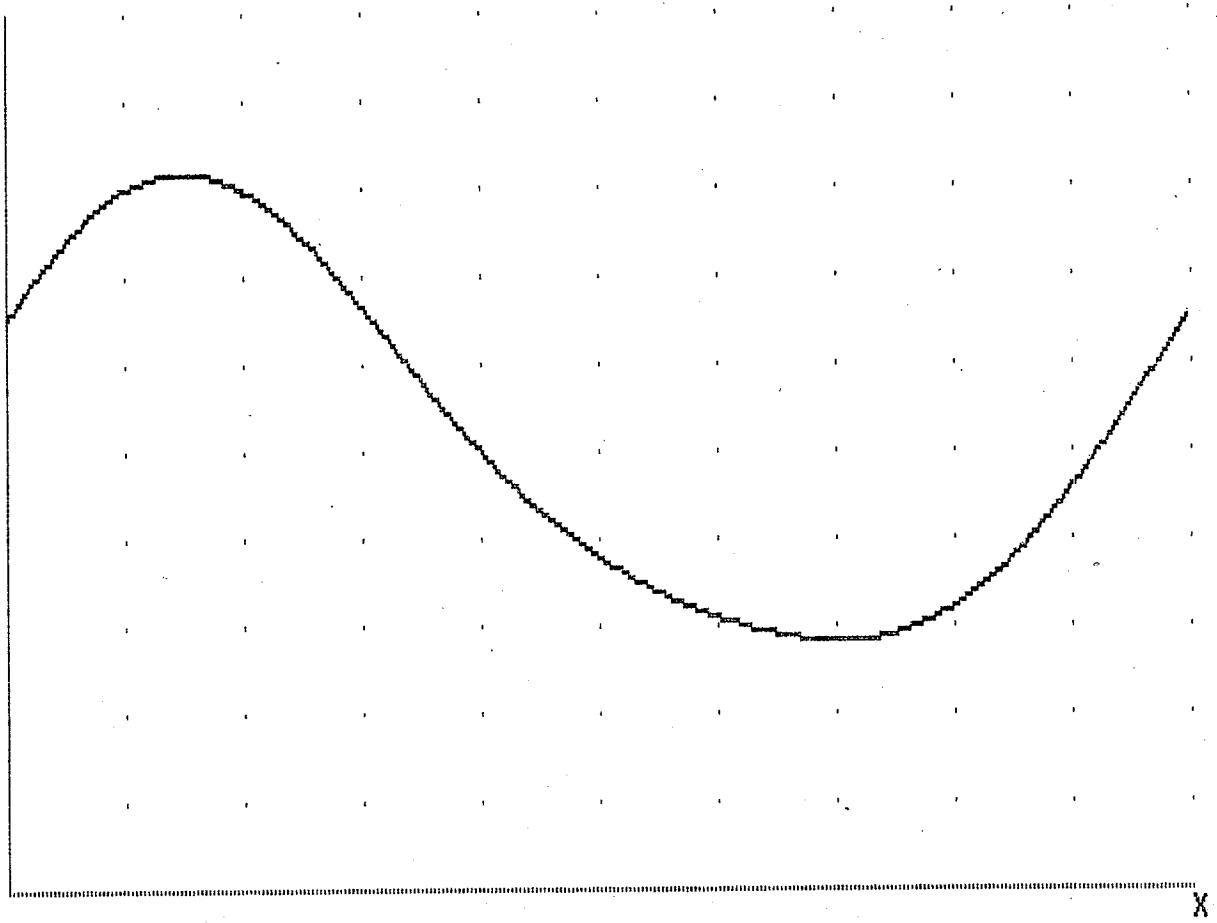


FIGURA 4

evidente que as soluções obtidas contêm erros, mas como este metodo de abordar o problema não aspira a dar a solução final, pode acontecer que as soluções aproximadas do sistema sejam melhores que as exactas (além do mais as próprias entradas da matriz do sistema são arredondadas!).

Melhores resultados se obteriam com certeza se considerássemos um polinómio trigonométrico com 8 senos e 8 co-senos, usássemos os primeiros 16 pontos da segunda coluna da tabela 2 e, consequentemente, resolvêssemos um sistema de 16 equações com 16 incógnitas. Se alguém estiver interessado em seguir este processo, agradeço-lhe que depois me diga o que obteve!

A meio desta segunda sessão de trabalho, apercebi-me que os participantes estavam a ficar cansados. De um modo geral obtiveram melhoramentos para a fórmula aproximante, mas os resultados conseguidos ou os métodos utilizados não os satisfaziam completamente. Estava na altura de eu *atacar* de novo.

Voltámos ao sossego da sala onde estiveramos na primeira sessão. Como rescaldo da experiência com os computadores, mostrei-lhes um acetato que tinha preparado com uma função aproximante obtida através do processo referido da resolução de um sistema de quatro equações com quatro incógnitas (figura 4). Neste caso considerei $m=n=2$ em (3), os pontos escolhidos foram os que dão pior informação na tabela 3 (segunda coluna), e obteve-se $a_1=0.68$, $a_2=0.12$, $b_1=0.41$, $b_2=0$ (isto são arredondamentos das soluções obtidas sem usar o programa da tabela 4; se se usar este, os valores obtidos são mais precisos e os arredondamentos são ligeiramente diferentes). As correspondentes diferenças entre os valores reais e os calculados estão listados na tabela 5: a diferença máxima é de cerca de 0.5.

Já na primeira sessão um dos participantes se tinha referido ao possível uso de integrais para melhorar a aproximação. Embora o indivíduo que adiantou isso não tivesse ainda estudado integrais, tinha contudo *ouvido falar* neles e na sua relação com a noção de área. O mesmo indivíduo, no entanto, durante muito tempo achou estranho que o uso de co-senos no polinómio trigonométrico pudesse melhorar a aproximação, apesar de eu ter referido que é a única maneira[1] de diminuir a diferença de ordenadas correspondentes à abcissa $\frac{57.7}{2}$, que, com a ajuda do gráfico da figura 1, se pode ver que é superior a 0.4.

O passo seguinte para a resolução do nosso problema foi portanto exigir que a área entre o gráfico da figura 1 e o da função aproximante no intervalo fundamental fosse zero.

Mas seria isto um argumento trabalhável?

A primeira dificuldade surge logo ao tentar precisar-se o que se entende por área entre dois gráficos num intervalo. Se um dos gráficos estiver sempre por cima do outro, tudo bem — à área da superfície limitada pelo de cima e o eixo das abcissas tira-se a área da superfície limitada pelo de baixo e o eixo das abcissas (estou a pensar apenas em funções com valores positivos). O problema aparece quando os dois gráficos se cruzam, e podem cruzar-se várias vezes — teríamos que determinar primeiro os vários intervalos em que se mantém sempre um por cima do outro, mas para isso precisávamos de conhecer os gráficos! A alternativa parece ser a de se fazer uma subtracção única, arriscando-nos assim a obter um valor negativo, ou a obter zero quando a *área* é bem diferente de zero, como um dos participantes observou.

---

1 Estamos a supor que a função aproximante é dada pela fórmula (3).

Fiz-lhes notar então que era uma escolha que tínhamos que fazer, entre ter uma boa ideia teórica sem utilidade prática e a de termos uma ideia menos boa mas que se pode aplicar.

Bem, mas antes de aceitar esta alternativa era necessário averiguar se ela permitiria levar os cálculos até ao fim.

Primeiro, como se pode calcular a área do gráfico da figura 1 no intervalo fundamental (definindo-se portanto como a área entre esse gráfico e o gráfico que é o próprio eixo das abcissas)?

Aqui a resposta e simples: usa-se uma regra de trapézios utilizando os pontos conhecidos. Expliquei-lhes o processo a seguir e toda a gente entendeu (não e necessário saber integrais para perceber isto). É claro que o que se obtém é um valor aproximado, mas como numa primeira parte do domínio a aproximação é por defeito e na outra é por excesso, existe uma esperança que a aproximação final obtida seja boa.

Quanto à função f aproximante, consideremos o caso m=n=2, portanto

$$(4) \qquad f(t) = 1.55 + a_1 \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{t}{57.7}\right) + a_2 \operatorname{sen}\left(4\pi \frac{t}{57.7}\right) + b_1 \cos\left(2\pi \frac{t}{57.7}\right) + b_2 \cos\left(4\pi \frac{t}{57.7}\right).$$

Por imposição, a área de f será igual à área da função vôo das asas posteriores, e por (4) será igual à área do segundo membro, que é o que tem as constantes a determinar, de modo que seria óptimo que fosse verdade que a área da soma de funções fosse a soma das áreas das funções e que a área do produto de uma constante por uma função fosse o produto da constante pela área da função. Designando por $\underset{[a,b]}{\text{Area}}\, g(t)$ a area da função g no intervalo [a, b], obter-se-ia então a partir de (4) que

$$(5) \qquad \underset{[0,57.7]}{\text{Area}}\, f(t) = \underset{[0,57.7]}{\text{Area}}\, 1.55 + a_1 \underset{[0,57.7]}{\text{Area}} \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{t}{57.7}\right) + a_2 \underset{[0,57.7]}{\text{Area}} \operatorname{sen}\left(4\pi \frac{t}{57.7}\right) + b_1 \underset{[0,57.7]}{\text{Area}} \cos\left(2\pi \frac{t}{57.7}\right) + b_2 \cdot \underset{[0,57.7]}{\text{Area}} \cos\left(4\pi \frac{t}{57.7}\right).$$

Se usarmos a primeira definição de área (digamos a definição natural), obtemos uma equação com quatro incógnitas, mas se usarmos a definição alternativa (modificada de modo óbvio de maneira a que se possa aplicar às funções agora consideradas) e o conhecimento que temos das funções seno e co-seno, concluimos que todas as parcelas a seguir à primeira no segundo membro de (5) se anulam, obtendo-se

$$\underset{[0,57.7]}{\text{Area}}\, f(t) = \underset{[0,57.7]}{\text{Area}}\, 1.55 = 57.7 \times 1.55$$

Se em vez de 1.55 tivessemos usado uma incógnita, digamos a_0, poderiamos agora escrever

(6) $$a_0 = \frac{1}{57.7} \underset{[0,57.7]}{\text{Area}} f(t)$$

e obter talvez um valor melhor que 1.55, o que equivaleria a deslocar por translação vertical o gráfico de f.

Iremos voltar a isto mais tarde, mas entretanto há coisas *urgentes* a verificar:

Será de facto verdade que

$$\underset{[a,b]}{\text{Area}} (f+g) = \underset{[a,b]}{\text{Area}} f + \underset{[a,b]}{\text{Area}} g \qquad \text{e que}$$

(7)

$$\underset{[a,b]}{\text{Area}} (\alpha.f) = \alpha. \underset{[a,b]}{\text{Area}} f. \qquad \text{com f, g funções e } \alpha \in \mathbb{R} \text{ ?}$$

Se usarmos a definição natural de área, a presumível segunda propriedade anterior é obviamente falsa, pois neste caso tem-se $\underset{[a,b]}{\text{Area}} (-f) = \underset{[a,b]}{\text{Area}} f$. Nesta altura um dos participantes fez notar que conjugando este facto com a presumível primeira propriedade anterior se chega a uma contradição, já que se tem

$$\underset{[a,b]}{\text{Area}} (f-g) = \underset{[a,b]}{\text{Area}}(f+(-g)) = \underset{[a,b]}{\text{Area}} f + \underset{[a,b]}{\text{Area}}(-g) = \underset{[a,b]}{\text{Area}} f + \underset{[a,b]}{\text{Area}} g = \underset{[a,b]}{\text{Area}}(f+g)!$$

Este é o derradeiro golpe contra a definição natural de área.

E que se passa com a definição alternativa?

Neste caso os participantes facilmente se convenceram que se verificam as duas propriedades enunciadas em cima, não tendo sido necessária uma demonstração rigorosa. Ensinei-lhes, contudo, um processo de demonstração geométrica baseado no princípio de Cavalieri para áreas.

O princípio de Cavalieri diz que as áreas das superfícies da figura 5 são iguais desde que qualquer recta vertical as intersecte segundo segmentos de igual comprimento entre si. Esta afirmação é geralmente bem aceite, mas caso surjam dúvidas pode-se considerar a figura 6, onde em vez de rectas verticais considerámos finas faixas que dão origem a finos rectângulos nas duas superfícies e em que cada faixa os rectângulos considerados são iguais. Assim a área total dos rectângulos de uma superfície é igual à área total dos rectângulos da outra; à medida que vamos considerando faixas cada vez mais finas, mais a superfície total ocupada por cada um dos conjuntos de rectângulos se parece com a respectiva superfície limitada pelas curvas...

A partir daqui, para provar que $\underset{[a,b]}{\text{Area}} (f+g) = \underset{[a,b]}{\text{Area}} f + \underset{[a,b]}{\text{Area}} g$, seguimos o processo ilustrado na figura 7 usando as duas funções f, g em (i). A área da superfície indicada em (ii) é Area f + Area g; a área da superfície indicada em (iii) é $\underset{[a,b]}{\text{Area}}(f+g)$; para cada x fixo, a recta vertical y=x intersecta as duas superfícies segundo segmentos de comprimento f(x) + g(x), logo o princípio de Cavalieri diz-nos que as duas superfícies têm área igual. Aqui suposemos o caso simples de f ser positiva, g negativa e $|g| < f$, mas a situação complica-se quando consideramos outras hipóteses e se torna

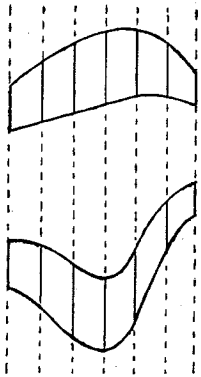


FIGURA 5

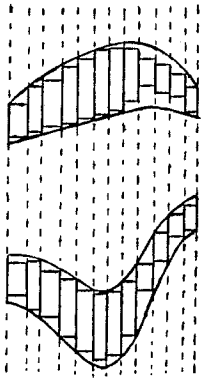


FIGURA 6

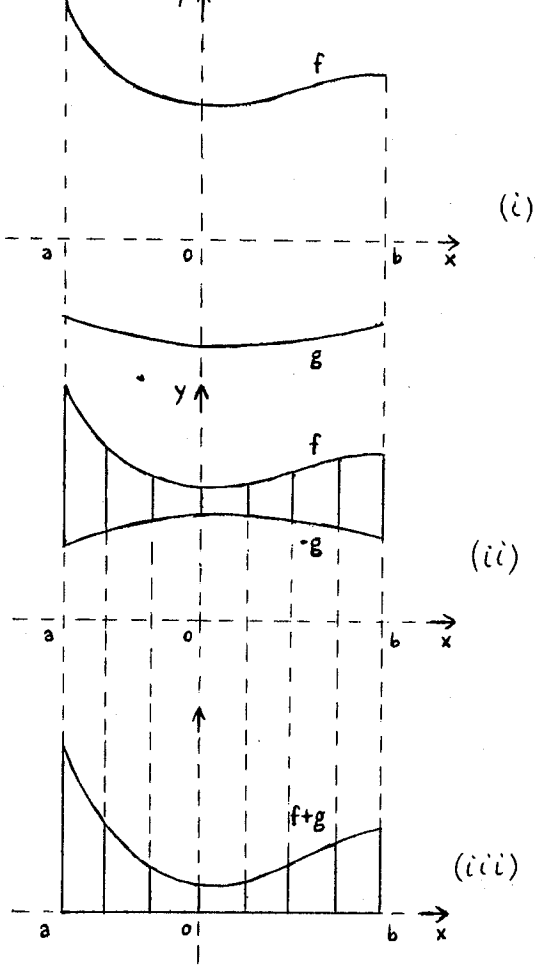


FIGURA 7

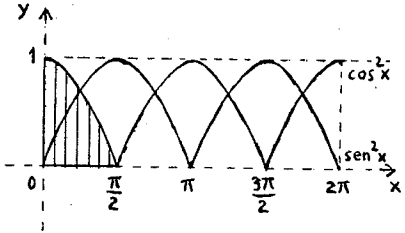


FIGURA 8

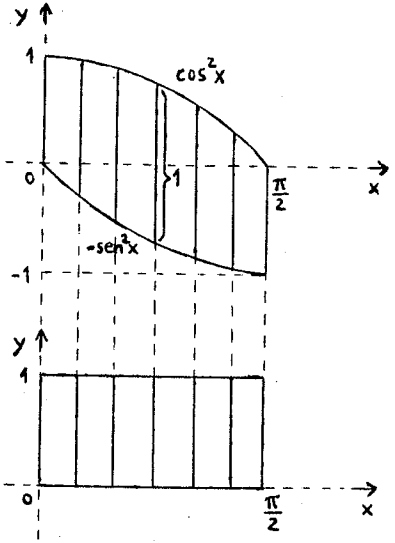


FIGURA 9

conveniente dividir o domínio em várias partes e usar a propriedade (obvia para as funções bem comportadas que estamos a considerar)

$$\underset{[a,b]}{\text{Area}}\, f + \underset{[b,c]}{\text{Area}}\, f = \underset{[a,c]}{\text{Area}}\, f \qquad \text{para } a<b<c.$$

Quanto à segunda das propriedades enunciadas em **(7)**, é evidente que $\underset{[a,b]}{\text{Area}}\,(-f) = -\underset{[a,b]}{\text{Area}}\, f$ e, conjugando com a primeira propriedade, obtém-se de imediato que

$\underset{[a,b]}{\text{Area}}\,(kf) = k \cdot \underset{[a,b]}{\text{Area}}\, f$, $k \in \mathbf{Z}$. Para ir mais além que isto parece-me que se torna necessário usar um argumento do género do que foi feito a respeito da figura 6.

De qualquer modo, a experiência que tive diz-me que não é necessário insistir muito nesta parte. O importante nesta abordagem elementar é as pessoas convencerem-se que as propriedades referidas são provavelmente verdadeiras, pois uma insistência demasiada neste problema particular desviaria demasiado a atenção do problema principal que estávamos interessados em resolver.

O passo seguinte foi o mais difícil de motivar, pois necessita de uma certa dose daquilo que muitas vezes se descreve como ingenuidade (à falta de melhor explicação).

Atrás referimos como é que uma constante a_0 no lugar de 1.55 poderia ser determinada usando as propriedades **(7)** da Area (passaremos a usar letra maiúscula na inicial de Area se e só se nos estivermos a referir à definição alternativa de área de uma função). E isso foi possível porque as Areas das funções que multiplicavam pelas outras constantes eram nulas. Como é que poderemos modificar a equação **(4)** através de equivalências de tal modo que a *aplicação de Areas* anule todas as parcelas do segundo membro excepto a que tem a constante que pretendemos determinar? Concretizando, suponhamos que pretendemos determinar a_1. Será possível, usando princípios de equivalência de equações, modificar **(4)** de tal modo que as Areas das *funções coeficiente* de a_2, b_1 e b_2 sejam nulas e a da de a_1 não? Para já isso só poderá ser possível com o princípio de equivalência "Podemos multiplicar ambos os membros por um mesmo número diferente de zero...", pois só deste modo é que conseguimos modificar as funções coeficiente.

E chegados aqui ficamos num impasse, porque não passa pela cabeça de ninguém que a solução seja tão simples.

Acabei de sugerir aos participantes que tentassem ver geometricamente quanto é $\underset{[0,\,2\pi]}{\text{Area}}\,(\text{sen } x \text{ sen } 2x)$. Com o gráfico à frente foi fácil apercebermo-nos que os factores desse produto que aparecem à medida que x percorre o intervalo $[0, \pi/2]$ da esquerda para a direita são respectivamente os mesmos (à parte os sinais) que os factores que aparecem quando x percorre o intervalo $[\pi/2, \pi]$ da direita para a esquerda. Então, pelo princípio de Cavalieri, as áreas das superfícies que o produto daquelas duas funções forma com o eixo das abcissas nos dois intervalos $[0, \pi/2]$ e $[\pi/2, \pi]$ são iguais. Quanto ao sinal da função produto, é positivo no primeiro intervalo e negativo no segundo e portanto $\underset{[0,\,\pi]}{\text{Area}}\,(\text{sen } x \text{ sen } 2x) = 0$. Raciocínio análogo vale em $[\pi, 2\pi]$, e assim foi com uma certa surpresa que surgiu aos olhos do grupo de trabalho que

$\underset{[0,\,2\pi]}{\text{Area}}\,(\text{sen } x \;\; \text{sen } 2x) = 0.$

Estávamos no fim da segunda sessão.

3. No início da terceira sessão dividiu-se o grupo nos seus vários elementos e cada um destes analisou um gráfico de um produto de funções trigonométricas usando o princípio de Cavalieri (tal como no exemplo acima), chegando-se à conclusão que, dado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$(8) \qquad \underset{[0,\,2\pi/\alpha]}{\text{Area}}\,(\text{sen } n\alpha x \,.\, \cos m\alpha x) = 0, \quad \forall\, m, n \in \{1, 2\}, \text{ e}$$

$$\underset{[0,\,2\pi/\alpha]}{\text{Area}}\,(\text{sen } n\alpha x \,.\, \text{sen } m\alpha x) = \underset{[0,\,2\pi/\alpha]}{\text{Area}}\,(\cos n\alpha x \,.\, \cos m\alpha x) = 0,$$

$$\forall\, m, n \in \{1, 2\}, \text{ tais que } m \neq n.$$

Quanto aos restantes produtos de funções (senos por senos com igual argumento e a correspondente situação para o co-seno), é óbvio que as Areas não são nulas. Neste caso o cálculo pode ser feito pela regra dos trapézios (obtendo-se um valor aproximado), mas também pode ser feito de um modo exacto através do seguinte argumento geométrico que acho bem bonito:

Consideremos o intervalo $[o, 2\pi]$ (o que não é verdadeiramente particularizar) e os produtos $\text{sen}^2 x$ e $\cos^2 x$. Na figura 8 estão sobrepostos os gráficos destas duas funções. Atendendo a que $\cos x = \text{sen}\,(x + \pi/2)$ e a propriedades das duas funções, a área a tracejado vale $\frac{1}{4}$ tanto de $\underset{[0,\,2\pi]}{\text{Area}}\,\text{sen}^2 x$ como de $\underset{[0,\,2\pi]}{\text{Area}}\,\cos^2 x$. Olhando agora para a figura 9, o uso da fórmula fundamental da trigonometria e do princípio de Cavalieri permite afirmar que as areas das superfícies indicadas são iguais e portanto $\underset{[0,\,2\pi]}{\text{Area}}\,\cos^2 x + \underset{[0,\,2\pi]}{\text{Area}}\,\text{sen}^2 x = \frac{\pi}{2}$, donde sai $\underset{[0,\,2\pi]}{\text{Area}}\,\cos^2 x = \underset{[0,\,2\pi]}{\text{Area}}\,\text{sen}^2 x = \pi$, pelo que dissemos anteriormente. De um modo análogo se pode concluir que

$$(9) \qquad \underset{[0,2\pi/\alpha]}{\text{Area}}\,\cos^2\alpha x = \underset{[0,2\pi/\alpha]}{\text{Area}}\,\text{sen}^2\alpha x = \frac{\pi}{\alpha}, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Um dos participantes tentou provar isto por via analítica. De facto, usando a primeira propriedade em **(7)**, o raciocínio geométrico indicado acima pode adaptar-se de modo a dar uma resolução analítica, ou pelo menos predominantemente analítica. Com uns toques meus esse participante fez a demonstração dessa maneira.

Após isto faltava ainda notar que também é verdade que

$$(10) \qquad \underset{[0,2\pi/\alpha]}{\text{Area}}\,\text{sen}^2 2\alpha x = \underset{[0,2\pi/\alpha]}{\text{Area}}\,\cos^2 2\alpha x = \frac{\pi}{\alpha}, \; \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

De facto, $\underset{[0,2\pi/\alpha]}{\text{Area}}\,\text{sen}^2 2\alpha x = 2.\underset{[0,\pi/\alpha]}{\text{Area}}\,\text{sen}^2 2\alpha x = 2.\underset{[0,2\pi/2\alpha]}{\text{Area}}\,\text{sen}^2 2\alpha x = 2.\,\frac{\pi}{2\alpha} = \frac{\pi}{\alpha}$,

por redução a **(9)**, e analogamente para o caso do co-seno.

Podemos então responder (quase) afirmativamente à pergunta feita atrás, isto é, podemos multiplicar ambos os membros de **(4)** por algo (que por vezes pode ser zero) de tal modo que a *aplicação de Areas* anule todas as funções coeficiente excepto uma.

Assim, multiplicando **(4)** por $\operatorname{sen}(2\pi \frac{t}{57.7})$ obtemos

$$f(t).\operatorname{sen}(2\pi \frac{t}{57.7}) = 1.55 \operatorname{sen}(2\pi \frac{t}{57.7}) + a_1 \operatorname{sen}^2(2\pi \frac{t}{57.7}) +$$

$$+ a_2 \operatorname{sen}(4\pi \frac{t}{57.7}) \operatorname{sen}(2\pi \frac{t}{57.7}) + b_1 \cos(2\pi \frac{t}{57.7}) \operatorname{sen}(2\pi . \frac{t}{57.7}) +$$

$$+ b_2 \cos(4\pi \frac{t}{57.7}) \operatorname{sen}(2\pi \frac{t}{57.7}),$$

donde segue, usando **(7)** e **(8)**,

$$\underset{[0,57.7]}{\text{Area}} [f(t).\operatorname{sen}(2\pi \frac{t}{57.7})] = a_1 \underset{[0,57.7]}{\text{Area}} \operatorname{sen}^2(2\pi \frac{t}{57.7}),$$

e portanto, atendendo a **(9)**,

(11) $$\boxed{a_1 = \frac{2}{57.7} \cdot \underset{[0,57.7]}{\text{Area}} [f(t).\operatorname{sen}(2\pi . \frac{t}{57.7})]}.$$

Analogamente se obtém (usando também (10) quando necessário)

(12)
$$\boxed{a_2 = \frac{2}{57.7} \cdot \underset{[0,57.7]}{\text{Area}} [f(t).\operatorname{sen}(4\pi \frac{t}{57.7})]}$$
$$\boxed{b_1 = \frac{2}{57.7} \cdot \underset{[0,57.7]}{\text{Area}} [f(t).\cos(2\pi \frac{t}{57.7})]}$$
$$\boxed{b_2 = \frac{2}{57.7} \cdot \underset{[0,57.7]}{\text{Area}} [f(t).\cos(4\pi \frac{t}{57.7})]}$$

Observe-se que as fórmulas para estas constantes são as mesmas (e portanto os seus valores são os mesmos) se se acrescentarem outras parcelas seno e co-seno à função f em **(4)** (atendendo a que há mais umas quantas Areas de produtos de funções que são nulas, como se pode verificar), e portanto neste último caso só há o trabalho adicional de determinar as novas constantes. Quer isto dizer que obtivemos um processo *económico* de gerar sucessivas aproximações para a função vôo das asas posteriores.

O passo seguinte é a determinação das Areas que entram nas fórmulas obtidas para as constantes. Para isso o que fazemos é impôr que f passe pelos pontos conhecidos da função dada e usar uma regra de trapézios. Repare-se que há aqui uma modificação do nosso argumento inicial, em que dizíamos que íamos exigir que a área entre o gráfico da figura 1 e o da função aproximante no intervalo fundamental fosse zero; o que estamos a fazer agora e usar mesmo toda a informação de que dispomos, isto é, o conhecimento de pontos por onde passa a função a aproximar, e com isto renova-se a esperança de que a aproximação a obter seja boa.

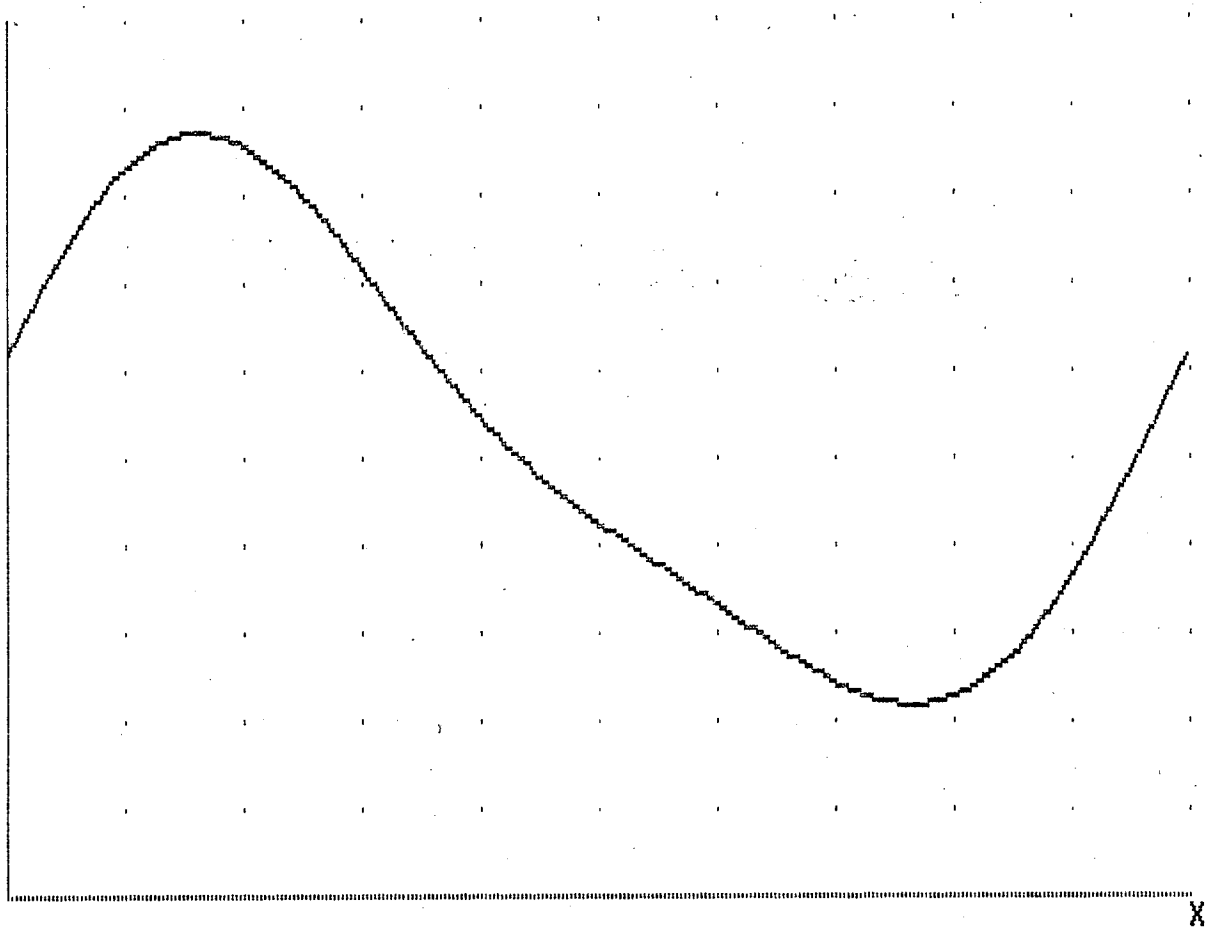


FIGURA 10

Este passo não foi trabalhado nesta última sessão, embora houvesse bastante tempo para, pelo menos, fazer alguma coisa nesse sentido. Em vez disso, e uma vez que já todos sabiam o processo a seguir, dei-lhes os meus resultados:

$a_1 \approx 0.87$; $a_2 \approx 0.2$; $b_1 \approx 0.29$; $b_2 \approx 0.02$.

Estes valores foram obtidos com a ajuda de um programa numa calculadora, tendo em atenção os pontos onde as funções cujas Areas se pretendem determinar mudam de sinal, tendo sido estes pontos determinados com a ajuda do gráfico da figura 1 e das fórmulas (1). A respectiva função está representada na figura 10. As diferenças em relação à função dada estão listadas na tabela 6, sendo o erro máximo igual a 0.31.

Mostrei aos participantes o último acetato — correspondente à figura 10 — e por sobreposição com o da figura 2 saltou à vista que o *ajuste* melhoraria significativamente se se fizesse uma translação vertical conveniente. Note-se que nesta última função aproximante usei para a_0 o valor 1.55 em vez de o calcular, como foi referido antes, através de (6). Mas não é difícil arranjar o a_0 óptimo, no sentido em que minimize o máximo das diferenças, obtendo-se então $a_0 = 1.36295$ e o erro máximo inferior a 0.123. Aliás, este processo de usar a translação para melhorar a função aproximante poderia já ter-se usado com a da figura 4 — obter-se-ia neste caso um erro máximo de cerca de 0.28.

O objectivo destas sessões era chamar a atenção para aproximações por polinómios de Fourier, mas relativamente ao problema particular que pretendíamos resolver talvez se pudessem achar melhores soluções por algum outro processo. Para além das translações, não só verticais como também noutras direcções, também se poderiam ter modificado os gráficos anteriores através de rotações. A verdade é que com estas se destruiria a periodicidade, mas talvez se ganhassem outras coisas!

O grupo de trabalho mostrou-se interessado no programa usado para executar a regra dos trapézios, de modo que lhes facultei as respectivas instruções. Uma versão desse programa, escrita no BASIC da CASIO FX-702P, está listada na segunda coluna da tabela 7. Na linha 10 é dada uma instrução de salto para uma subrotina que está listada na primeira coluna da mesma tabela e que contém valores de abcissas e ordenadas relativos aos pontos conhecidos da função vôo das asas anteriores, que deixámos de estudar a partir de certa altura. É claro que o processo que usámos se pode aplicar também a esta função, sendo as correspondentes constantes a_0, a_1, a_2, b_1 e b_2 dadas igualmente pelas fórmulas (6), (11) e (12). As Areas que entram nestas fórmulas podem ser calculadas directamente com o programa completo listado na tabela 7, onde se utilizou uma regra de trapézios modificada no sentido em que não se levaram em linha de conta os pontos de mudança de sinal das funções cujas Areas se pretendem determinar (penso que isso não leva a diferenças numéricas muito grandes). Usando N=17 obtemos $a_0 = 1.52$; $a_1 = 0.56$; $a_2 = 0.06$; $b_1 = -0.17$; $b_2 = -0.06$ e a diferença máxima é de cerca de 0.136 . Modificando o gráfico por translação, de tal modo que venha $a_0 = 1.4834$, consegue-se um erro inferior a 0.1.

Estes últimos dados não foram fornecidos aos participantes pois nessa altura ainda não os tinha calculado.

Finalmente, chamei as coisas pelos seus nomes, isto é, que funções f como em (3) — com 1,55 substituído por a_0 — se dizem *polinómios de Fourier* quando as constantes são calculadas através de fórmulas análogas a (6), (11) e (12), que essas

constantes se dizem *coeficientes de Fourier*[2] e que as Areas se chamam *integrais*; tudo coisas de que ouvirão falar futuramente mas que já são muito velhinhas.

E terminei.

4. Claro que a partir daqui se poderiam pôr questões matemáticas interessantíssimas, que explorassem tanto o conceito de integral como o tema da aproximação por séries trigonométricas ou mesmo séries em geral; outra alternativa seria ir pelo caminho da Análise Numérica. Tenho a impressão que após estas três sessões pelo menos alguns dos participantes estavam sensibilizados para isso. E de facto foi só isto que pretendi fazer: sensibilizá-los. Por experiência própria sei que muitos estudantes entram no primeiro ano de uma licenciatura em Matemática com uma insensibilidade, um desinteresse que brada aos Céus. Dêem-lhes receitas e os respectivos exercícios de acompanhamento que ficam mais felizes que *um gato com um chocalho*. Falem-lhes em teoria e é *ouvi-los* fugir.

Após estas três sessões encontrei por acaso um dos participantes, que em conversa informal me disse nunca ter pensado ser possível fazer o que fizémos: ser dada uma função (que saiu de um fenómeno natural), não saber como a definir analiticamente e aos poucos ir conseguindo arranjar-lhe a fórmula. Soube assim que consegui *abanar* esta pessoa, mas também sei que os elementos do grupo de trabalho foram seleccionados por um processo que de algum modo avaliou as suas capacidades científicas... E as outras (?), que são tantas!...

BIBLIOGRAFIA

[1] Edwards, R.E., Fourier Series, A Modern Introduction, Vol.1, Springer-Verlag, New York, 1979.

[2] Jeffery, R.L., Trigonometric series, University of Toronto Press, Toronto, 1956.

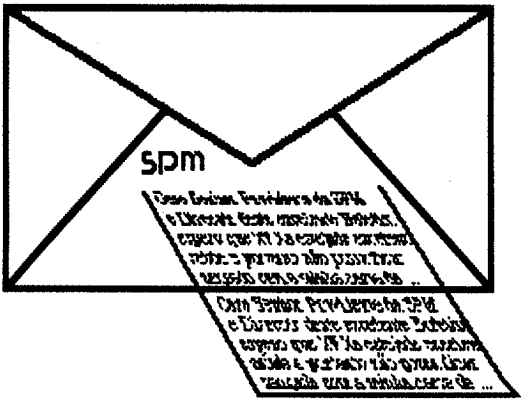
[3] De Sajio, R., Calculus for the life sciences, W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1978.

[4] The Spode Group, Motivating A-level Mathematics, A Source Book, Oxford University Press, Oxford, 1986.

[5] Weis-Fogh, T., Biology and Physics of Locust Flight: II. Flight Perfomance of the Desert Locust (*Schistocerca Gregaria*), Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. B., 239 (1955-56), 459-510.

Junho de 1989

2 Por uma questão de simetria — atente-se nas fórmulas **(6)** e **(12)** — não é a_0 mas sim $2.a_0$ que leva o nome de Fourier.



CARTAS À REDACÇÃO

Coimbra, 23/4/90

À redacção do Boletim da SPM:

Relativamente ao relatório "Modelação do movimento das asas de gafanhotos via polinómios de Fourier", publicado no nº 16 do Boletim da SPM, gostaria de apresentar uma errata. Não se trata de uma correcção exaustiva, pois há pequeninas gralhas sem importância no texto (quase inevitáveis numa publicação) e com as quais não me preocupei. Outras há, no entanto, que são mais difíceis de descobrir e podem fazer perder tempo aos leitores. São as deste último tipo que listo a seguir:

Localização	onde está	deve estar
1ª coluna da tabela 2	(10.2, 2.09)	(19.2, 2.09)
2ª coluna da tabela 3	0.02279	0.12279
linhas 20 e 21 da pág 21	$\underset{[0,2\pi]}{\text{Area}}\cos^2 x + \underset{[0,2\pi]}{\text{Area}}\operatorname{sen}^2 x = \frac{\pi}{2}$	$\underset{[0,\pi/2]}{\text{Area}}\cos^2 x + \underset{[0,\pi/2]}{\text{Area}}\operatorname{sen}^2 x = \frac{\pi}{2}$
linha 20 da pág 25	E as outras(?), que são tantas!...	E os outros(?), que são tantos!...
linha 25 da pág. 25	De Sajio	De Sapio

António M. Caetano