

## I. Pensar...\*

Ou o universo onde todos os ratos são elefantes mas nem todos os elefantes são animais de quatro patas.

*António Caetano*

### Projeto MATEAS (CIDMA<sup>†</sup>) e DMat-UA

— Pronto, mestre, penso que trouxe todo o material que é necessário: calculadora gráfica, portátil, *smartphone* e gigas de Internet para gastar. Apanha-se sinal de Internet neste sítio, espero!

João poisou a mochila e olhou com ar desconfiado para o mestre, figura despojada aparentemente envergando apenas uma túnica branca e sentado de olhos fechados em posição de meditação. O enquadramento era paradisíaco, com uma vegetação frondosa a servir de cenário, nem sequer faltando o agradável murmurinho de um riacho como som de fundo. Mas para lá chegar não tinha sido fácil: João tinha ainda demorado uma boa hora a subir a pé o trilho na colina que levava ao acampamento do mestre, após ter viajado até onde lhe permitia a rede de transportes públicos. Mas tinham-lhe dito que o mestre era quem melhor a poderia ajudar a sair da situação complicada em que se tinha metido: tinha deixado os Cálculos para trás e sem eles nunca conseguiria acabar o seu curso de engenharia; e o problema é que por cada ano que passava mais fora do alcance lhe parecia estar a possibilidade de arrumar com a matemática. Assim, decidira passar algumas semanas de verão com o mestre a treinar sob a sua orientação, de modo a desta vez estar preparada para os testes do semestre que se avizinhava. O mestre finalmente falou, interrompendo-lhe os pensamentos:

— Para já não vais precisar de nada disso.

João não estava à espera daquela frase:

— Como?... Não sei se lhe disseram que sou de engenharia...

— Por isso mesmo. Um engenheiro é aquele que finalmente concretiza aquilo com que outros sonham...

João não queria acreditar que isto acabasse de ser dito por aquela figura austera, que parecia ter eliminado da sua vida qualquer vestígio de tecnologia, por isso ficou momentaneamente sem palavras. O mestre continuou:

— Mas para isso precisa de estar recetivo ao que as ciências, e a matemática em particular, têm para lhe dizer... No caso da matemática, que é o problema

---

\*Versão de 29 de agosto de 2016. Este trabalho está licenciado sob a Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-SemDerivações 4.0 Internacional. Para ver uma cópia desta licença, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>.

<sup>†</sup>O CIDMA é financiado pela FCT através do projeto UID/MAT/04106/2013.

que te traz aqui, para a entenderes precisas antes de mais de perceber um pouco como funciona, qual a sua lógica interna, a sua linguagem, as suas motivações. Senão, por mais que ouças o que tem para te dizer, sempre te parecerá uma lengalenga sem sentido.

A última frase do mestre parecia ler os pensamentos da João. As outras pareciam-lhe de facto uma lengalenga sem sentido: toda a gente sabe que a matemática é feita de regras difíceis de fixar, pois desafiam a *lógica* do que seria normal esperar que acontecesse. Como aquela de  $(a+b)^n$  não ser igual a  $a^n + b^n$ . Por que raio é que o  $n$  não pode passar para dentro, como em  $(ab)^n = a^n b^n$ ?

— A matemática não trata propriamente de objetos que existam fisicamente. Além disso, cria universos próprios para os objetos de que trata, os quais se comportam de acordo com as regras que tenham aí sido fixadas.

João sentia-se cada vez mais confusa.

— É como se fosse um jogo. As regras de um jogo podem não ter nada a ver com o nosso dia a dia, mas se o quisermos jogar sabemos que temos que nos submeter a essas regras e às suas consequências lógicas.

Isto já parecia fazer sentido à João, embora lhe parecesse um exagero comparar-se a matemática a um jogo. Um jogo supostamente é uma coisa divertida...

O mestre exibiu uma caixa que pareceu retirar de dentro da sua túnica. E, com a mão poisada na tampa, continuou:

— Dentro desta caixa representei um mundo paralelo ao nosso onde existem animais que, por uma estranha coincidência, se designam por ratos e elefantes, embora possam ter características físicas muito diferentes dos ratos e dos elefantes que existem no nosso mundo. É um pequeno mundo, tão pequeno que eu consegui *representá-lo* dentro desta caixa...

— Como assim?

— A caixa estava vazia no início e eu fui inserindo nela um boneco diferente por cada animal diferente desse mundo até ter considerado todos os seus animais. Depois disso não introduzi na caixa mais nenhum animal.

— Ah, é como se dentro da caixa estivesse uma *cópia* desse mundo, certo?

— Pode-se dizer que sim, no que aos seus animais diz respeito. Tecnicamente, o que fiz foi estabelecer uma correspondência biunívoca...

— Já cá faltava...

João não resistira a murmurar o reparo anterior, embora se arrependesse de imediato, tendo decidido mudar o rumo da conversa:

— Já percebi a ideia. Assim, se olharmos para dentro da caixa ficamos rapidamente com uma ideia sobre os diferentes animais desse mundo. Mas suponho que não me vai mostrar o conteúdo da caixa e o jogo consistirá em adivinhar o que está lá dentro. É isso?

O mestre sorriu:

— Apenas parcialmente. Embora nesta fase não te possa mostrar o conteúdo da caixa, posso revelar-te duas verdades sobre os animais do mundo que representa:

**1 Todos os animais de quatro patas são elefantes.**

**2 Todos os ratos são animais de quatro patas.**

O que podes garantir...

— Posso pelo menos usar isto para tomar nota?

João exibiu um caderno e um lápis e o mestre fez um sinal de assentimento, repetiu as duas verdades anteriores e continuou:

— O que podes garantir ser verdade de certeza nesse mundo, no que diz respeito aos seus ratos e elefantes, e que possibilidades ficam em aberto?

João reagiu imediatamente e o diálogo com o mestre continuou:

— Bom, de certeza que todos os elefantes têm também quatro patas.

— Eu não teria tanta certeza.

— Então, mas se é dito que os animais de quatro patas são elefantes, onde está a dúvida?... Além disso, a informação dada parece-me estapafúrdia, pois dizem-nos que afinal os ratos também são animais de quatro patas... A menos que, nesse mundo, ratos e elefantes sejam designações diferentes para os mesmos animais!

— A dúvida poderá estar na imprecisão da linguagem vulgar, a qual não pode ter lugar na matemática. Repara: a primeira frase não diz que todos os elefantes são animais de quatro patas, em particular não estabelece uma *equivalência* entre “animais de quatro patas” e “elefantes”. *Apenas* garante que sempre que eu me cruzar com um animal de quatro patas, de certeza que ele é um elefante.

— Mas se há elefantes de quatro patas, então essa deverá ser uma característica dos elefantes e todos devem ter quatro patas. Bom... A menos que tenha uma deficiência ou uma pata lhe tenha sido amputada por algum motivo. É esse o truque?

— Não, vamos supor que não há aqui truques desses. Deixa-me revelar-te mais uma lei do estranho universo paralelo que criei para a nossa conversa, para ver se tiramos esta questão a limpo:

### 3 Todos os animais de três patas são elefantes.

João hesitou por momentos, antes de avançar:

— Quer dizer que há elefantes de quatro patas e elefantes de três patas?

— Ou menos.

— Menos?

— Ou mais.

João sentia-se completamente perdida agora. O mestre continuou:

— Temos que nos cingir à lógica dedutiva para sairmos deste imbróglio. Na verdade, com os dados apresentados a lógica dedutiva não nos permite concluir sobre o número de patas de um elefante. Permite, no entanto, concluir algo interessante conjugando as verdades 2 e 1 acima por esta ordem. Consegues fazer a dedução?

João avançou devagarinho, seguindo as notas que tinha tirado no seu caderno:

— A verdade 2 garante-nos que qualquer rato é um animal de quatro patas... E então a verdade 1 garante-nos que é um elefante...

João fez uma careta antes de concluir a medo:

—

#### 4 Todos os ratos são elefantes.

Como é isso possível?

— *Modus ponens*.

— Como disse?

— É a expressão latina para o raciocínio dedutivo que acabaste de fazer.

— Quer dizer que concluí corretamente?

— Exato. A tua estranheza poderá dever-se ao conhecimento que tens sobre ratos e elefantes no mundo em que vivemos estar a intrometer-se no raciocínio. Poderás fazer este exercício mais tarde usando nomes sem sentido em vez de ratos e elefantes, e então talvez já não estranhes.

— Posso ver o que está na caixa?

— Ainda não. Queria que observasses que não concluíste que ratos e elefantes são a mesma coisa.

João refletiu um pouco antes de responder:

— Estou a ver: assim como da verdade 1 não posso concluir que os elefantes são animais de quatro patas, também da conclusão 4 não posso concluir que os elefantes são ratos.

— Exato. Mas podes concluir algo sobre os animais que não são elefantes...

— São ratos?

— Pensa bem: se fossem ratos, pela conclusão 4 afinal seriam elefantes.

— Estou a ver: então posso concluir

#### 5 Um animal que não seja um elefante também não é um rato.

— Acabaste de usar a regra de raciocínio conhecida como *modus tollens*.

João sentiu-se confiante para argumentar de modo análogo a partir das verdades 1, 2 e 3, tomando também nota no seu caderno:

— Então podemos também concluir, por *modus tollens*, que

#### 6 Um animal que não seja um elefante não é de quatro patas,

#### 7 Um animal que não é de quatro patas não é um rato,

#### 8 Um animal que não seja um elefante não é de três patas.

— É verdade.

— E por 6 e 7 e *modus ponens* obtém-se a mesma conclusão que em 5.

— Já vi que percebeste.

— Posso agora ver o que está na caixa?

— Antes disso tenho que te explicar qual a noção de rato e de elefante nesse mundo. Dentro da caixa verás bonecos de dois tamanhos muito diferentes: todos os de tamanho pequeno representam ratos. Para ser mais preciso, no mundo em causa a noção de rato equivale à noção de animal pequeno.

— Ah, e a noção de elefante equivale à noção de animal grande, é isso?

— Não. Independentemente do seu tamanho, um animal é classificado como elefante se (e só se – para deixar claro que se trata de uma noção equivalente) a sua cabeça tiver o formato da cabeça de um elefante tal como o conhecemos no nosso mundo.

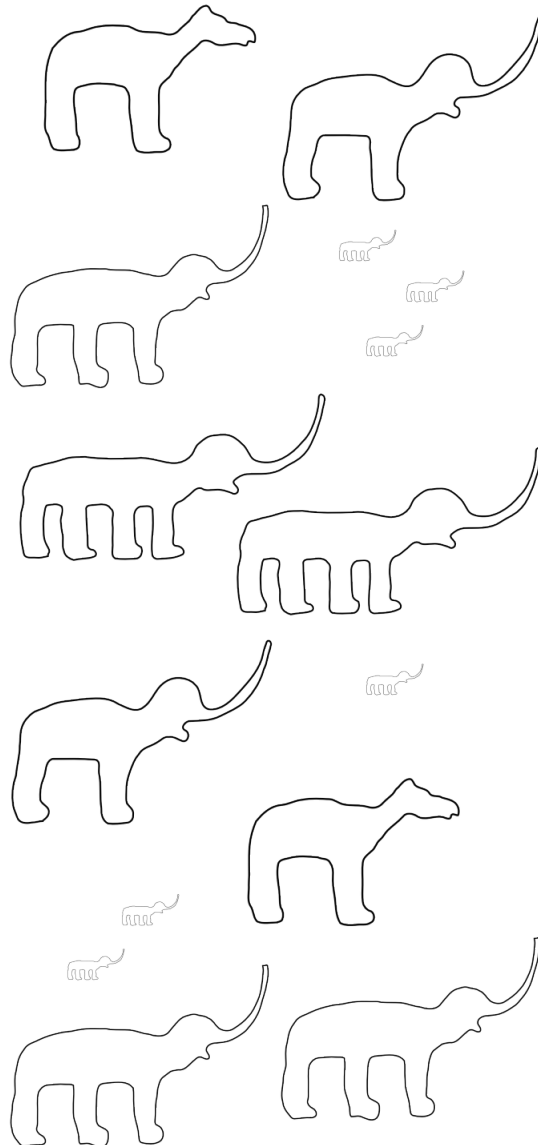
— Que estranho!

— Além disso, para facilitar a identificação, dentro da caixa os bonecos representam os animais de perfil, sempre com o número exato de patas totalmente visível, um pouco à maneira egípcia.

João suspirou:

— Tanta coisa!... Podemos finalmente olhar para o que está na caixa?

Sem responder, o mestre virou a abertura da caixa para a João e levantou a tampa:



Depois disse:

— Dou-te algum tempo para verificares que todas as afirmações que fomos enumerando anteriormente são verdadeiras neste mundo...

João pegou à vez em cada uma das frases enumeradas e confirmou que de facto descreviam corretamente o que se passava no *mundo da caixa*:

— É incrível: bate tudo certo!... Mas... Para que serve isto tudo e o que é que tem a ver com a matemática?

— Na matemática também se consideram *universos* que não são o nosso universo habitual e *afirmações verdadeiras* sobre os objetos desses universos. Tecnicamente tais verdades chamam-se *teoremas*, pelo menos se a garantia de que essas afirmações são verdadeiras exigir alguma argumentação, ou pelo menos alguma reflexão. Assim, as frases anteriormente enumeradas são teoremas acerca do universo que estávamos a considerar.

— A sério?!

— Considera por exemplo a afirmação número 1: como é que eu a produzi ou como é que tu a verificaste (ou provaste, ou demonstraste, como também se diz)? Embora em tempos diferentes, cada um de nós observou o universo dentro da caixa, olhou para todos os animais de quatro patas e reparou que todos eles têm cabeça de elefante, o que, pela definição que te dei de elefante nesse mundo, garante que todos esses animais são considerados elefantes nesse universo.

— É verdade, foi assim que fiz.

— Provavelmente repetiste este tipo de procedimento para verificares que todas as outras afirmações são verdadeiras, enquanto eu só o fiz para as afirmações 1, 2 e 3, pois eu já conhecia o *modus ponens* e o *modus tollens*, o que em conjugação com essas primeiras três afirmações permite garantir que as restantes cinco também são verdadeiras. Ou seja, o facto de conhecer aqueles dois instrumentos do raciocínio dedutivo permitiu-me não só obter mais rapidamente o conjunto daquelas oito afirmações como ter a ideia de combinar as primeiras para obter as seguintes.

— Quer dizer que essa lógica dedutiva é uma maneira de produzir rapidamente novas verdades a partir de verdades conhecidas?

A lei do menor esforço começava a convencer João:

— Isso começa a ser interessante!

— Mas atenção: tiraste algumas conclusões precipitadas no início que, na verdade, não se podem tirar. Ou seja, o raciocínio dedutivo pode ser um instrumento muito potente, mas para isso é preciso saber usá-lo. O erro mais frequente, e que cometeste no início, é pensar que os teoremas estabelecem sempre equivalências entre propriedades (também ditas *condições*). Por exemplo, achaste que a primeira afirmação estabelecia que a propriedade de “ser um animal de quatro patas” era equivalente à propriedade de “ser um elefante”. Pode de facto acontecer que um teorema estabeleça uma equivalência entre propriedades, mas o mais comum é estabelecer apenas o que se chama de *implicação*: no exemplo acima, ser um animal de quatro patas implica ser um elefante, mas, como confirmaste ao olhar para dentro da caixa, ser um elefante não implica ser um animal de quatro patas...

— Espere, espere, estou outra vez perdida... Não confirmei nada disso e até acho que é ao contrário: obviamente que um elefante é um animal de quatro

patas...

— No mundo em que vivemos, mas não no mundo da caixa. Essa é outra das confusões frequentes: misturar universos ou deixar-se enganar por designações comuns que estão afinal a ser usadas com sentidos diferentes dos habituais.

— Hum... Deixe-me verificar... Caramba, tem razão: para além de oito elefantes de quatro patas (seis deles que também são ratos), vejo também três elefantes de três patas e até dois elefantes de duas patas! Nenhuma das afirmações enumeradas atrás relaciona elefantes com animais de duas patas, mas o facto é que também há elefantes de duas patas. Não se poderia dizer, para além das afirmações 1 e 3, que

### 9 Todos os animais de duas patas são elefantes

?

— Verifica!

João olhou com mais atenção para dentro da caixa e não tardou muito a concluir:

— Não é verdade: embora haja animais de duas patas que são elefantes, também vejo dois animais de duas patas que não são elefantes.

— Exato: a afirmação 9 é falsa, logo não é um teorema.

Uma ideia subitamente ocorreu à João:

— Isto faz-me lembrar uma coisa de que se fala em Cálculo, com funções... Como é que é?... Sei que tem a ver com funções serem contínuas e serem diferen-deriv... Como é que é?

—

### 10 Todas as funções diferenciáveis são contínuas.

— É isso!

— No universo apropriado: aqui em vez de animais tens funções reais de uma variável real. Mas na verdade podes tirar algumas ilações mesmo sem saberes que funções são essas, ou mesmo sem saberes de todo o que são funções, e sem saberes o significado de uma tal função ter a propriedade de ser contínua ou a propriedade de ser diferenciável. Sabendo apenas que na afirmação 10 se garante que os objetos do universo em causa que têm a propriedade de serem diferenciáveis têm também a propriedade de serem contínuos, podes garantir que a implicação *recíproca* é verdadeira?

— Agora já sei que não posso, assim como a partir da afirmação 1 não podia concluir que no outro universo os elefantes são animais de quatro patas.

— Exato. Por outro lado, se souberes alguma coisa sobre o universo das funções, em vez de ficares sem saber se a recíproca é ou não verdadeira, podes tentar averiguar qual é o seu *valor lógico*, como fizeste há pouco relativamente à recíproca da afirmação 1. Com aquilo de que te lembras do Cálculo, és capaz de fazer isso?

— Deixe-me ver... Quero averiguar se é ou não verdade que todas as funções contínuas são diferenciáveis... Há claramente funções contínuas que são

diferenciáveis (por exemplo,  $x^2$ ), mas também me estou a lembrar de uma função contínua que não é diferenciável: a função módulo. Assim, a recíproca da afirmação 10 é falsa.

— Muito bem!

— Ainda assim, mestre, apesar de concordar que isto pode ser interessante quando uma pessoa entra no jogo, para que é que isto me serve na engenharia?

O mestre apontou para a mochila que João tinha trazido:

— Com certeza que vais querer comunicar com essa parafernália que dizes trazer contigo e que só *entende* a lógica dedutiva. Mesmo que não seja ao nível da programação, quando quiseres resolver problemas para os quais essas máquinas não tenham algoritmos diretamente aplicáveis, vais ter que usar o raciocínio dedutivo para as mandar calcular as componentes de que precisas para resolveres esses problemas. E se não entenderes também um pouco da matemática em causa (e não me refiro a *contas*, que isso essas máquinas fazem), também não vais longe.

Enquanto João digeriria o alcance das últimas afirmações do mestre, este aproveitou para lhe lançar mais um desafio:

— Ainda relativamente ao mundo da caixa, tenho mais uma questão que vou deixar para pensares: por observação dos bonecos consegues extrair de lá mais algum teorema? Por exemplo, algum que envolva os animais que não são elefantes?



## Índice

afirmação falsa, 7  
afirmação verdadeira, 6

condição, 6  
correspondência biunívoca, 2

dedução, 3  
definição, 6  
demonstração, 6  
designação, 3

equivalência, 3

função contínua, 7  
função diferenciável, 7  
função real de uma variável real, 7

implicação, 6

lógica dedutiva, 3

*modus ponens*, 4  
*modus tollens*, 4

noção, 4

prova, 6

raciocínio dedutivo, 4  
recíproca, 7  
representação, 2

se e só se, 4

teorema, 6

universo, 6

valor lógico, 7  
verificação, 6