Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Matroides

Agostinho Miguel Mendes Agra

Conteúdo

1 Introdução

A teoria dos matroides permite generalizar vários resultados de diferentes áreas da matemática desde a algebra linear à teoria dos grafos, relacionando, conceitos aparentemente tão distintos quanto bases do espaço de colunas de uma matriz a árvores de suporte de um grafo.

O conceito de matroide teve a sua origem no artigo de Whitney [4], publicado em 1935, como abstração da noção de independência linear. Mais tarde, Tutte [9] caracteriza os matroides com base na teoria dos grafos. As ligações da teoria de matroides à otimização combinatória são atribuídas a Jack Edmonds [5, 6, 7].

Neste texto a teoria dos matroides é apresentada numa perspectiva de ligação à otimização combinatória. Recorde-se que os problemas de otimização combinatória podem ser formulados do seguinte modo:
Dado um conjunto finito $N = \{1, \ldots, n\}$, pesos c_j, $j \in N$ e uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos admissíveis de N, o problema de optimização combinatória consiste em determinar o subconjunto de N peso mínimo:

$$\min_{S \subset N} \{\sum_{j \in S} c_j : S \in \mathcal{F}\}.$$

Neste texto vamos restringir-nos aos problemas em que $\mathcal{F}$ descreve um sistema de independência (fechado para a inclusão) cuja definição formal veremos mais adiante. Um sistema de independência permite modelar famílias de conjuntos de soluções admissíveis de vários problemas de optimização combinatória. Consequentemente, os resultados apresentados para problemas de optimização sobre matroides ou intersecção de matroides, são válidos para vários problemas de optimização. Em particular, os algoritmos apresentados para a otimização sobre matroides ou intercessão de matroides podem ser imediatamente usados na otimização de problemas de otimização combinatória. Esta é precisamente uma das vantagens do estudo de matroides. Outro aspecto relevante desta relação entre otimização sobre sistemas de independência e otimização combinatória, consiste no facto de podermos classificar alguns problemas de otimização combinatória em termos de complexidade, nomeadamente, classificar aqueles problemas que correspondem à otimização sobre matroides, aqueles que correspondem a problemas de otimização sobre intercessão de dois matroides e aqueles que correspondem a problemas de otimização sobre intercessão de pelo menos três matroides. Em quanto que nos dois primeiros casos os correspondentes problemas são polinomiais, para os quais são apresentados algoritmos de complexidade diferente, no último caso temos problemas $\mathcal{NP}$-difíceis.

Para um estudo aprofundado sobre matroides é aconselhado consultar as referências [2, 3, 8, 1].

2 Sistemas de independência

Definição 2.1. Seja $N = \{1, \ldots, n\}$ e seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de N. Diz-se que $(N, \mathcal{F})$ é um *sistema de independência* se $\mathcal{F}$ for fechada para a inclusão, isto é :

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \emptyset \in \mathcal{F}, \\ \text{(ii)} & \forall I \in \mathcal{F}, \ \text{ se } \ A \subset I \ \text{ então } \ A \in \mathcal{F}. \end{array}$$

Os conjuntos $I \in \mathcal{F}$ designam-se por *conjuntos independentes* e os conjuntos $I \subseteq N : I \notin \mathcal{F}$ designam-se por *conjuntos dependentes.*

Consideremos o problema de saco mochila. Dados n objetos, representados pelo conjunto $N = \{1, 2, \cdots, n\}$, com pesos $w_j > 0, j \in N$, e uma capacidade do saco $b > 0$. Seja $\mathcal{F} = \{I \subseteq N : \Sigma_{j \in I} w_j \leq b\}$ a família de subconjuntos de objetos cujo peso total não excede a capacidade do saco.

Vamos mostrar que $(N, \mathcal{F})$ é um sistema de independência. Claramente $\emptyset \in \mathcal{F}$ pois $b > 0$. Suponhamos que $I \in \mathcal{F}$ com $I \neq \emptyset$. Se $A \subset I$ então

$$\sum_{j \in A} w_j \leq \sum_{j \in A} w_j + \sum_{j \in I \setminus A} w_j = \sum_{j \in I} w_j \leq b$$

Logo $I \in \mathcal{F}$. Note-se que a primeira desigualdade resulta de $A \subset I$ e $w_j > 0, j \in N$, a segunda desigualdade resulta de $I \in \mathcal{F}$.

Ao longo desse texto vamos usar a notação $X + j$ e $X - j$ para representar $X \cup \{j\}$ e $X \setminus \{j\}$, respectivamente.

Definição 2.2. Dado um sistema de independência $(N, \mathcal{F})$, diz-se que $I \in \mathcal{F}$ é um *conjunto independente maximal* se $I + j \notin \mathcal{F}, \forall j \in N \setminus I$. Os conjuntos independentes maximais são designados por *bases*. Para $X \subseteq N$, os subconjuntos independentes maximais de X são designados por bases de X.

Um conjunto independente maximal I diz-se *máximo*, ou de cardinalidade máxima, se

$$| I' | \leq | I |, \forall I' \in \mathcal{F}.$$

Dado um sistema de independência $(N, \mathcal{F})$, diz-se que $I \notin \mathcal{F}$ é um *conjunto dependente minimal* se $I - j \in \mathcal{F}, \forall j \in N \setminus I$. Os conjuntos dependentes minimais são designados por *circuitos*.

Definição 2.3. Seja $X \subseteq N$. Designamos por *característica* de X e representamos por $r(X)$, a maior cardinalidade de entre os subconjuntos independentes de X:

$$r(X) = \max_{I \subseteq X} \{| I | : I \in \mathcal{F}\}.$$

Tem-se $r(X) \leq | X |$. A igualdade $r(X) = | X |$ é satisfeita se e só se o conjunto X é independente. Portanto, o sistema $(N, \mathcal{F})$ pode ser definido alternativamente por (N, r), onde $\mathcal{F} = \{X \subseteq N : r(X) = | X |\}$.

Seja $S \subseteq X$ e seja I um independente de cardinalidade máxima contido X, i.e, $| I | = r(X)$. Os conjuntos $I \cap S$ e $I \cap (X \setminus S)$ são conjuntos independentes contidos em S e $X \setminus S$ respectivamente. Tem-se então

$$r(S) + r(X \setminus S) \geq | I \cap S | + | I \cap X \setminus S | = | I | = r(X) \tag{2.1}$$

De seguida apresentamos vários exemplos de sistemas de independência e de famílias de conjuntos de soluções admissíveis de problemas de otimização combinatória que não formam sistemas de independência.

Exemplo 2.1. *Seja* $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *e* $\mathcal{F} = \{I \subseteq N : \Sigma_{j \in I} w_j \leq b\}$ *onde* $w_1 = 4, w_2 = 5, w_3 = 5, w_4 = 2, w_5 = 3$ *e* $b = 11$. *A família de conjuntos admissíveis* $\mathcal{F}$ *pode ser escrita da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \; & \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \\ & \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}\}. \end{aligned}$$

O par $(N,\mathcal{F})$ é um sistema de independência. A família de bases (subconjuntos maximais) é dada por

$$\mathcal{B} = \{\{2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{1,4,5\},\{2,4,5\},\{3,4,5\}\}.$$

Os subconjuntos $I_1 = \{1,2,4\}$ e $I_2 = \{2,4,5\}$ são conjuntos independentes máximos.

Os conjuntos

{1,2,3}, {1,2,5}, {1,3,5}, {2,3,4}, {2,3,5},{1,2,3,4}, {1,2,3,5}, {1,2,4,5}, {1,3,4,5}, {2,3,4,5}, {1,2,3,4,5}

são dependentes (não pertencem a $\mathcal{F}$) pois correspondem a conjuntos de objetos cujo peso total excede a capacidade b.

Note-se que $r(\{1,3,4\}) = 3$ pois $\{1,3,4\}$ é um conjunto independente e $r(\{2,3,5\}) = 2$.

Exemplo 2.2. *Seja A a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seja $N = \{1,2,3,4\}$ o conjunto dos índices das colunas de A, e seja $\mathcal{F} = \{I \subseteq N :$ colunas com indices em I são linearmente independentes$\}$. Então,

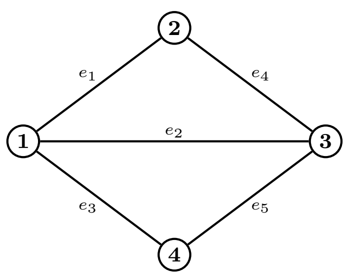
$$\mathcal{F} = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,3,4\}, \{2,3,4\}\}.$$

O par $(N,\mathcal{F})$ é um sistema de independência. O conjunto $\{1,2,4\}$ não pertence a $\mathcal{F}$ pois as colunas 1, 2 e 4 são linearmente dependentes, logo $\{1,2,4\}$ é um conjunto dependente. A família de bases (subconjuntos maximais) é:

$$\mathcal{B} = \{\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}.$$

Todos os conjuntos em $\mathcal{B}$ são conjuntos independentes máximos. Note-se que neste caso as bases do sistema de independência coincidem com as bases da matriz.

Exemplo 2.3. *Seja G um grafo $G = (V,E)$ onde $V = \{1,2,3,4\}$ é o conjunto dos vértices e $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ o conjunto das arestas do grafo apresentado em seguida.*



Seja $\mathcal{F} = \{S \subset E : S$ não contém ciclos$\}$. Portanto, $\mathcal{F}$ é constituído por todas as florestas de G (incluindo o conjunto vazio).

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \;\; = \;\; & \{\emptyset, \{e_1\}, \{e_2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \\ & \{2,3,4\}\}.\end{aligned}$$

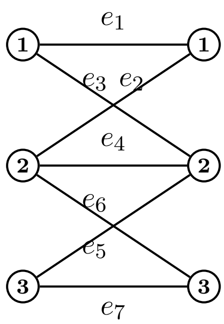
As bases correspondem às árvores de suporte
$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}, \{e_1, e_2, e_5\}, \{e_1, e_3, e_4\}, \{e_2, e_3, e_4\}, \{e_2, e_4, e_5\},\ \{e_3, e_4, e_5\}$.

Os conjuntos $\{e_1, e_2, e_4\}, \{e_2, e_3, e_5\}, \{e_1, e_3, e_4, e_5\}, \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ *são dependentes (as respectivas arestas formam ciclos). Os conjunto* $\{e_1, e_2, e_4\}, \{e_2, e_3, e_5\}$ *são circuitos que correspondem a ciclos em* G*.*

Exemplo 2.4. *Seja* G *um grafo bipartido* $G = (V, E)$ *apresentado na figura seguinte. Seja*

$$\mathcal{F} = \{S \subset E : \text{ em cada vértice de } V \text{ incide quanto muito uma aresta de } S\}.$$

Portanto $\mathcal{F}$ *é a família de todos os emparelhamentos em* G*. Então:*



$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \;\; & \{\emptyset, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\}, \{e_5\}, \{e_1, e_4\}, \{e_1, e_5\}, \{e_1, e_6\}, \{e_1, e_7\}, \\ & \{e_2, e_3\}, \{e_2, e_5\}, \{e_2, e_7\}, \{e_3, e_6\}, \{e_3, e_7\}, \{e_4, e_7\}, \{e_5, e_6\}\}.\end{aligned}$$

O par $(V, \mathcal{F})$ *é um sistema de independência. Por exemplo, os conjuntos* $\{\{e_2, e_6\}, \{e_1, e_4, e_7\}\}$ *são independentes maximais.*

Exemplo 2.5. *Consideremos um grafo completo não orientado* $G = (V, E)$*. Seja*

$$\mathcal{F}' = \{F \subseteq E : F \text{ é um ciclo Hamiltoniano}\}.$$

É fácil de ver que $(E, \mathcal{F}')$ *não é um sistema de independência, pois um subconjunto de arestas de um ciclo Halmiltoniano não forma um ciclo Hamiltoniano. Considerando agora a família*

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq E : F \text{ é um subconjunto de arestas pertencentes a um ciclo Hamiltoniano}\},$$

obtemos um sistema de independência $(E, \mathcal{F})$*. Note-se que neste caso, se estivermos interessados apenas nos ciclos Hamiltonianos, então pretendemos obter as bases de* E*.*

3 Matroides

De entre os sistemas de independência os matroides apresentam propriedades importantes. Em termos de otimização combinatória, é fundamental perceber quando a família de conjuntos de soluções admissíveis forma ou não um matroide.

Definição 3.1. O par $M = (N, \mathcal{F})$ diz-se um matroide se M é um sistema de independência e se, para todo $X \subseteq N$, todas as bases de X têm a mesma cardinalidade.

Proposição 3.1. *Se $(N, \mathcal{F})$ é um matroide então o sistema independente $(X, \mathcal{F}_X)$ é um matroide para todo $X \subseteq N$ onde $\mathcal{F}_X = \{I \in \mathcal{F} : I \subset X\}$.*

Definição 3.2. Para $X \subset N$, designa-se por *fecho* de X, ao maior sobreconjunto A de X $(X \subseteq A)$ que tem a mesma característica de X, isto é $(r(X) = r(A))$. O fecho de X é denotado por $cl(X)$. Um conjunto $X \subseteq N$ diz-se *fechado* se $cl(X) = X$.

É igualmente usual designar o fecho de X por *espaço gerado* de X e denotar por $sp(X)$, seguindo a terminologia nos espaços vetoriais. Aqui vamos usar a notação $cl(X)$.

O fecho de X pode ser obtido da seguinte forma:

$$cl(X) = \{j \in N : r(X) \cup \{j\} = r(X)\}.$$

Observação 3.1. *Um subconjunto $B \subset N$ é base do matroide $M = (N, \mathcal{F})$ se e só se $cl(B) = N$.*

Uma definição alternativa de matroide é dada no resultado seguinte.

Teorema 3.1. *Seja $(N, \mathcal{F})$ um sistema independente. Então as afirmações seguintes são equivalentes;*

(i) *$(N, \mathcal{F})$ é um matroide, isto é, para todo $X \subset N$, I e I' são subconjuntos maximais de X em $\mathcal{F}$, então $\mid I \mid = \mid I' \mid$;*

(ii) *Sejam I_n, $I_{n+1} \in \mathcal{F}$ contendo n e $n+1$ elementos respectivamente. Então $\exists j \in I_{n+1} \backslash I_n$ tal que $I_n + j \in \mathcal{F}$.*

Prova. $(i) \Rightarrow (ii)$. *Suponhamos que se verifica (i). Sejam $I_n, I_{n+1} \in \mathcal{F}$ tais que $\mid I_n \mid = n$ e $\mid I_{n+1} \mid = n+1$. Seja $X = I_n \cup I_{n+1}$. Por (i) resulta que I_n não pode ser maximal em X. Logo, existe um $j \in I_{n+1} \backslash I_n$ tal que $I_n + j \in \mathcal{F}$.*

$(ii) \Rightarrow (i)$ *Suponhamos que se verifica (ii) e que I e I' são subconjuntos maximais de $\mathcal{F}$ tais que $\mid I \mid < \mid I' \mid$. Seja $I'' \subset I'$ tal que $\mid I'' \mid = \mid I \mid + 1$. Então, por (ii), existe um $j \in I'' \setminus I$ tal que $I + j \in \mathcal{F}$ o que contraria a hipótese de I ser maximal.*

Usando uma condição equivalente à condição (ii) no Teorema 3.1, é usual definir matroides da seguinte forma alternativa.

Teorema 3.2. *$M = (N, \mathcal{F})$ é um matroide se e só se $\forall S_1, S_2 \in \mathcal{F}$ tal que $\mid S_1 \mid < \mid S_2 \mid$ então existe $j \in S_2 \setminus S_1$ tal que $S_1 \bigcup \{j\} \in \mathcal{F}$.*

Dos exemplos anteriores é possível verificar que o Exemplo 2.2 e o Exemplo 2.3 retratam matroides enquanto que o Exemplo 2.1 e o Exemplo 2.4 retratam sistemas de independência que não formam matroides.

De seguida vamos apresentar alguns dos principais matroides.

Proposição 3.2. *Seja $N = \{1, \cdots, n\}$. Se $\mathcal{F} = \{I \subseteq N : \mid I \mid \leq k\}$, então $M = (N, \mathcal{F})$ é um matroide, denominado por* matroide uniforme*.*

Exemplo 3.1. *Seja* $N = \{1, 2, 3, 4\}$ *e* $k = 2$, *então a familia de independentes* $\mathcal{F}$ *formado por dois ou menos elementos é:*

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}.$$

Facilmente verificamos que as bases de cada $X \subseteq N$ *têm a mesma cardinalidade.*

Proposição 3.3. *Seja um grafo* $G = (V, E)$, *e seja* $\mathcal{F}$ *a família formada por todas as florestas de* G *(todos os subconjuntos de arestas de* G *que não formam ciclos). Então* $M = (E, \mathcal{F})$ *é um matroide, que se denomina por* matroide gráfico *(ver Exemplo 2.3).*

Nos matroides gráficos $M = (E, \mathcal{F})$ associados a um grafo $G = (V, E)$ conexo e não orientado, as bases correspondem às árvores geradoras ou árvores abrangentes do grafo G (árvores com exatamente $| V | -1$ arestas). Daí estas arvores serem também designadas por árvores geradoras.

Proposição 3.4. *Seja* A *uma matriz com colunas* $a_1, \cdots, a_n$. *Seja* $N = \{a_1, \ldots, a_n\}$ *e* $\mathcal{F} = \{S \subseteq N :$ *as colunas em* S *são linearmente independentes*$\}$. *Então* $M = (N, \mathcal{F})$ *é um matroide, que se designa por* matroide matricial *(ver Exemplo 2.2).*

Proposição 3.5. *Seja* $N = \{1, 2, \cdots, n\}$ *e seja* $\{A_1, \ldots, A_k\}$ *uma partição de* N. *Dados* d_i *inteiros não negativos,* $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ *define-se*

$$\mathcal{F} = \{I : I \subset N, \ | I \cap A_i | \leq d_i, i = 1, \ldots, k\}.$$

Então $M = (N, \mathcal{F})$ *é um matroide, designado por* matroide da partição.

Um caso particular do matroide da partição, muito importante, que iremos usar mais tarde é o caso em que $d_i = 1, i = 1, \ldots, k$. Isto é, de cada subconjunto da partição é selecionado, quanto muito, um elemento.

Definição 3.3. Seja $A = \{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ uma família de subconjuntos (não necessariamente distintos) de $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$. Um conjunto transversal ou sistema de representantes distintos é um conjunto $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$, tal que, $e_i \in A_i$.

Proposição 3.6. *Seja* $M = (E, \mathcal{F})$ *tal que* $I \in \mathcal{F}$ *se e só se* I *é um sistema de representantes distintos de uma subcolecção de* $A = \{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$. *O sistema* $M = (E, \mathcal{F})$ *é um matroide, designado por* matroide transversal.

Exemplo 3.2. *Sendo por exemplo* $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *e* $A = \{A_1, A_2\}$ *com* $A_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ *e* $A_2 = \{e_2, e_3, e_4\}$. *A família de conjuntos independentes é dado por*

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\}, \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_2, e_3\}, \{e_2, e_4\}, \{e_3, e_4\}\}.$$

3.1 Caracterizações alternativas dos matroides

De seguida vamos apresentar formas alternativas de caracterizar matroides.

Teorema 3.3. *Seja* N *um conjunto finito e* $\mathcal{B} \subseteq 2^N$. $\mathcal{B}$ *é o conjunto das bases de um matroide* $(N, \mathcal{F})$ *se e só se as seguintes condições forem satisfeitas:*

1. $\mathcal{B} \neq \emptyset$;

2. Para quaisquer $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e $j \in B_1 \backslash B_2$ então existe um $i \in B_2 \backslash B_1$ tal que $B_1 - j + i \in \mathcal{B}$.

Definição 3.4. Um conjunto $C \subseteq N$ diz-se um circuito de um matroide $M = (N, \mathcal{F})$ se C é um conjunto dependente minimal, isso é, $C \notin \mathcal{F}$ mas $C - j \in \mathcal{F}, \forall j \in C$.

Teorema 3.4. *Seja $\mathcal{C}$ a família de circuitos de um matroide M então:*
(i) $\emptyset \notin \mathcal{C}$.
(ii) *Se $C_1, C_2 \in \mathcal{C}, C_1 \subseteq C_2$ implica $C_1 = C_2$.*
(iii) *Se $C_1, C_2 \in \mathcal{C}, C_1 \neq C_2$, com $j \in C_1 \cap C_2$, então existe $C_3 \in \mathcal{C}$ tal que $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - j$.*

Reciprocamente, se $(N, \mathcal{C})$ satisfaz os axiomas (i), (ii) e (iii), então $M = (N, \mathcal{F})$ é um matroide, onde

$$\mathcal{F} = \{I \subseteq N : C \nsubseteq I, \forall\, C \in \mathcal{C}\}.$$

Proposição 3.7. *Seja $B \subset N$ uma base de um matroide M e $j \in N \backslash B$, então existe um único circuito C tal que $C \subseteq B + j$.*

Prova. *Como todas as bases têm o mesmo cardinal, o conjunto $B+j$ é dependente e, portanto, contem um ciclo C. Se existirem dois ciclos em $B+j$, o elemento j teria de pertencer a ambos. Então, usando (iii) do Teorema 3.4, obteríamos um circuito contido em B, o que contradiz o facto de B ser uma base.*

De seguida vamos definir as funções submodulares que nos permitirão apresentar uma definição alternativa de matroides.

Definição 3.5. Seja $N = \{1, 2, \cdots, n\}$. A função $f : 2^N \to \Re_+$ diz-se submodular se

$$f(I) + f(S) \geq f(I \cap S) + f(I \cup S) \qquad \forall\, I, S \subset N.$$

A proposição seguinte apresenta uma definição alternativa de função submodular e função não decrescente.

Proposição 3.8. *Uma função f é submodular se e somente se para todo $j, k,\ j \neq k$ e $I \subset N \backslash \{j, k\}$:*

$$f(I + j) - f(I) \geq f(I \cup \{j, k\}) - f(I + k). \tag{3.1}$$

O teorema seguinte estabelece que a função característica associada a um matroide é submodular.

Teorema 3.5. *Seja $(N, \mathcal{F})$ um sistema independente. $(N, \mathcal{F})$ é um matroide se e somente se a função característica*

$$r(X) = \max\{|\, I\,| : I \in \mathcal{F},\ I \subset X\}$$

é submodular.

As funções submodulares permitem modular muitas problemas combinatórios. Por exemplo, num problema de fluxos, a capacidade dos cortes é uma função submodular.

Exemplo 3.3. *Dado um digrafo $G = (V, A)$ e capacidades $c_{ij} \in \mathbb{R}_+$ associadas a cada arco $(i, j) \in A$, definimos para cada $S \subseteq S$, a função de corte que indica a capacidade dos arcos de S para o seu complementar:*

$$c(S) = \sum_{(i,j) \in A : i \in S, j \in V \backslash S} c_{ij}.$$

A função $c(S)$ é submodular pois

$$C(S) + C(T) - C(S \cup T) - C(S \cap T) = \sum_{(i,j) \in A : i \in S \backslash T, j \in T \backslash S} c_{ij} + \sum_{(i,j) \in A : i \in T \backslash S, j \in S \backslash T} c_{ij} \geq 0.$$

3.2 Dualidade

Definição 3.6. Seja $(N, \mathcal{F})$ um sistema de independência. Definimos o dual de $(N, \mathcal{F})$ por $(N, \mathcal{F}^D)$, onde

$$\mathcal{F}^D \quad = \{I \subseteq N : \text{existe uma base } B \text{ de } (N, \mathcal{F}) \text{ tal que } I \cap B = \emptyset\}$$

O dual de um sistema de independência é um sistema de independência.

Proposição 3.9. $(N, (\mathcal{F}^D)^D) = (N, \mathcal{F})$.

Prova. *$I \in (\mathcal{F}^D)^D$ se e só se existe uma base B^D de $(N, \mathcal{F}^D)$ tal que $I \cap B^D = \emptyset$, o que é equivalente a dizer que existe uma base B de $(N, \mathcal{F})$ tal que $I \cap (N \backslash B) = \emptyset$ se e só se $I \in \mathcal{F}$.*

Teorema 3.6. *Se $M = (N, \mathcal{F})$ é um matroide então $M^D = (N, \mathcal{F}^D)$ é um matroide.*

No que se segue vamos designar o conjunto das bases de $M = (N, \mathcal{F})$ por $\mathcal{B}$ e o conjunto das bases de $M^D = (N, \mathcal{F}^D)$ por $\mathcal{B}^D$, onde M e M^D são matroides.

Seja $X \subseteq N$, a característica de X em M^D, denotada por $r^D(X)$. Para determinar $r^D(X)$ é necessário uma base de X em M^D, logo é necessário determinar uma base de M com o número mínimo de elementos em X, isto é:

$$r^D(X) = \max_{S \subseteq X}\{| S | : S \in \mathcal{F}^D\} = \min\{| B \cap X | : B \in \mathbf{B}\}.$$

A cardinalidade maxima de um independente de M disjunto de X é $r(N \backslash X)$. Assim, uma base de M cuja interseção com X seja minimal, terá $r(N) - r(N \backslash X)$ elementos em X. Então verifica-se:

$$r^D(X) = | X | - \underbrace{\left(\underbrace{r(N)}_{\substack{\text{cardinalidade de} \\ \text{uma base de } M}} - \underbrace{r(N \backslash X)}_{\substack{\text{cardinalidade} \\ \text{máxima de um} \\ \text{independente de} \\ M \text{ disjunto de } X}} \right)}_{\text{número mínimo de elementos de uma base de } M \text{ em } X}$$

Formalmente, tem-se o seguinte resultado.

Teorema 3.7. *Se $(N, \mathcal{F})$ é um matroide então $r^D(X) = | X | + r(N \backslash X) - r(N)$ para todo $X \subset N$.*

Prova.

$$\begin{aligned}
r^D(X) &= \max\{|A \cap X| : A \in \mathcal{B}^D\} \\
&= | X | - \min\{| B \cap X | : B \in \mathcal{B}\} \\
&= | X | - (r(N) - \max\{| B \backslash X | : B \in \mathcal{B}\}) \\
&= | X | - r(N) + \max\{| B \backslash X | : B \in \mathcal{B}\} \\
&= | X | - r(N) + r(N \backslash X).
\end{aligned}$$

Os ciclos de M^D designam-se por co-ciclos de M. Os ciclos de M^D são conjuntos minimais (em termos de inclusão) que interceptam as bases de M. Definimos por $\mathcal{B}$ a família das bases de $(N, \mathcal{F})$ e por $\mathcal{B}^D$ a sua co-família.

No caso dos matroides gráficos associados a um grafo $M = (E, \mathcal{F})$, o seu dual $M^D = (E, \mathcal{F}^D)$ designa-se por co-gráfico. Se G é um grafo conexo, as co-bases B^D de M^D, são os conjuntos de arestas que uma vez removidas não desconectam o grafo G.

Se o grafo G tem n vértices, m arestas e p componentes conexas, então:

$$r(E) = n - p$$

$$r^D(E) = n - m + p = m - r(E).$$

Exemplo 3.4. *Seja $G = (V, E)$ o grafo dado no Exemplo 2.3 e $M = (E, \mathcal{F})$ o matroide gráfico associado a este grafo, onde as bases são todas as árvores geradoras (portanto com $\mid V \mid -1 = 3$ arestas). As co-bases B^D são os complementares das bases B com $\mid E \mid - \mid V \mid +1 = 2$ arestas.*

Por exemplo seja $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de M, então o complementar de B, $B^D \in \mathcal{B}^D$, é dado por $B^D = \{e_4, e_5\}$ que é uma base do matroide dual.

Os ciclos do problema primal são por exemplo $\{e_1, e_2, e_4\}, \{e_2, e_3, e_5\}$, etc., ou seja, são conjuntos dependentes minimais de M, e os co-ciclos são os conjuntos de arestas que, se forem removidas, desconectam o grafo G, por exemplo $\{e_1, e_2, e_5\}, \{e_1, e_4\}$, etc.

Considerando $X = \{e_1, e_2, e_4\}$ temos:

$$r(X)^D =\mid X \mid + r(E \backslash X) - r(E) = 3 + 2 - 3 = 2.$$

Note-se que o conjunto $\{e_3, e_5\}$ pertence a $\mathcal{F}^D$.

4 Optimização sobre sistemas independentes

De seguida vamos considerar problemas de optimização definidos sobre sistemas de independência.

Dado um sistema de independência $(N, \mathcal{F})$ e dados pesos $c_j, j \in N$ positivos associados aos elementos de N, então o problema de determinação do conjunto independente de peso máximo pode ser escrito na seguinte forma:

$$(P) \quad \max\{\sum_{j \in S} c_j : S \in \mathcal{F}\}.$$

Note-se que apenas são considerados pesos positivos, pois elementos com pesos negativos nunca estarão presentes na solução ótima e por isso podem ser eliminados.

É importante referir que o problema de minimização definido para um sistema de independência $(N, \mathcal{F})$ e pesos $c'_j, j \in N$,

$$\min\{\sum_{j \in S} c'_j : S \in \mathcal{F}\}$$

é equivalente ao problema de maximização (P) fazendo $c_j = M - c'_j$, $j \in N$, considerando $M = 1 + \max\{c'_j : j \in N\}$.

Alguns exemplos de problemas de Otimização Combinatória:

1. Problema do saco mochila: dados n, b, c_j, w_j $(1 \leq j \leq n)$ números positivos, determinar um $I \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$ tal que $\Sigma_{j \in I} w_j \leq b$ e $\Sigma_{j \in I} c_j$ seja máximo. Neste caso $N = \{1, 2, \cdots, n\}$ e $\mathcal{F} = \{I \subseteq E : \Sigma_{j \in I} w_j \leq b\}$.

2. Problema de árvore de suporte de custo mínimo: dado um grafo não orientado, conexo, $G = (E, V)$ e $w : E \to \Re$, determinar uma árvore de suporte de custo mínimo em G, ou seja, encontrar a base de $\mathcal{F}$, onde $\mathcal{F}$ é uma familia de florestas em G.

3. Problema do caminho mais curto. Dado uma grafo orientado $G = (A, V)$ e distâncias $c_{ij}, (i, j) \in A$, determinar o caminho mais curto entre o vértice s e t. Neste caso o sistema $(N, \mathcal{F})$ é obtido com $N = A$ e $\mathcal{F} = \{I \subseteq A : I$ é um subconjunto de arcos de um caminho de s para t em G $\}$. Os caminhos de s para t correspondem às base de $\mathcal{F}$.

4. Problema do caixeiro viajante. Dado uma grafo completo não orientado $G = (E, V)$ e distâncias $c_{ij}, (i, j) \in A$, determinar um ciclo Hamiltoniano de peso mínimo em G. Neste caso o sistema $(N, \mathcal{F})$ é obtido com $N = A$ e $\mathcal{F} = \{I \subseteq E : I$ subconjunto de um ciclo Hamiltoniano em G $\}$. Os ciclos Hamiltonianos correspondem às base de $\mathcal{F}$.

De seguida apresentamos dois algoritmos gulosos que em cada iteração consideram a melhor escolha sem ter em consideração o impacto dessa decisão nas iterações seguintes.

Algoritmo 1 Heurística gulosa de inserção.

Ordenar $N = \{1, \ldots, n\}$ por ordem decrescente de peso $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_n$
$I = \emptyset$
for $t = 1$ to n **do**
    if $I \cup \{i\} \in \mathcal{F}$ **then**
        $I := \cup \{i\}$
    end if
end for

Algoritmo 2 Heurística gulosa de exclusão.

Ordenar $N = \{1, \ldots, n\}$ por ordem crescente de peso $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n$
$I = N$
for $i = 1$ to n **do**
    if $I \setminus \{i\}$ contém uma base **then**
        $I := I \setminus \{i\}$
    end if
end for

Teorema 4.1. *Se $M = (N, \mathcal{F})$ é um matroide o Algoritmo 1 determina um conjunto independente de peso máximo.*

Prova. *Suponhamos que M é um matroide e que a solução obtida pelo Algoritmo 1, I^g, não é ótima. Seja I^0 uma solução ótima.*

Primeiro vamos verificar que, como M é um matroide, tem-se $\mid I^g \mid = \mid I^* \mid$. Como o Algoritmo 1 só seleciona elementos com pesos positivos, se $\mid I^g \mid > \mid I^* \mid$, então pelo Teorema 3.2 *existira $j \in I^g \setminus I^*$ tal que $I^* + j \in \mathcal{F}$. Portanto, como $c_j > 0$, I^* não seria solução ótima. De modo análogo se prova que $\mid I^* \mid$ não pode ser superior a $\mid I^g \mid$.*

Admitamos, sem perda de generalidade, que os elementos se encontram ordenados por ordem decrescente dos seu pesos, isto é,

$$I^g = \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}, I^* = \{j_1, j_2, \cdots, j_k\},$$

onde

$$c_{i_1} \geq c_{i_2} \geq \cdots \geq c_{i_k} > 0, \quad c_{j_1} \geq c_{j_2} \geq \cdots \geq c_{j_k} > 0.$$

Se I^g não for uma solução ótima,

$$\sum_{j \in I^g} c_j < \sum_{j \in I^*} c_j$$

e então

$$\exists\, p \in \{1, 2, \cdots, k\} : c_{i_p} < c_{j_p} \text{ e } c_{i_t} \geq c_{j_t}, \text{ se } t < p.$$

Por outro lado, quando o algoritmo seleciona o elemento i_p e o adiciona a I^g tinha já construído o independente $I = \{i_1, i_2, \cdots, i_{p-1}\}$. Ora como $J = (j_1, j_2, \cdots, j_p)$ também é independente, então pelo Teorema 3.1 parte (ii), existe $j \in J \setminus I$ tal que $I + j \in \mathcal{F}$. Mas isso significa que o Algoritmo 1, quando tinha já gerado o independente I, escolheu o elemento i_p para juntar a I, com $c_{i_p} < c_j$, o que é absurdo.

Teorema 4.2. *Se $(N, \mathcal{F})$ é um sistema de independência mas não é um matroide então existem pesos $c_j \in \mathbb{R}, j \in N$ para os quais o Algoritmo 1 não obtém o conjunto independente de peso máximo.*

Prova. *Suponha-se que $(N, \mathcal{F})$ é um sistema de independência mas que não é um matroide. Nestas condições, vamos exibir pesos $w_j \in \mathbb{R}, j \in N$ para o qual o Algoritmo 1 não encontra a solução ótima. Como $(N, \mathcal{F})$ não é matroide, então existe um subconjunto X de N para o qual existem independentes maximais de cardinalidade diferente. Seja I um conjunto maximal de X de cardinalidade mínima, e suponhamos que $\mid I \mid = k$. Seja*

$$c_j = \begin{cases} k+2 & \textit{se } j \in I, \\ k+1 & \textit{se } j \in X \setminus I, \\ \textit{0} & \textit{caso contrário.} \end{cases} \tag{4.1}$$

O Algoritmo 1 obtém a solução I com peso total $k(k+2)$. Contudo, como existem independentes em X de cardinalidade superior a k então, para qualquer um desses independentes o seu peso total será no mínimo $(k+1)^2 > k(k+2)$ para $k > 1$.

O Teorema 4.1 e o Teorema 4.2 dão uma caracterização alternativa dos matroides, isto é, $(N, \mathcal{F})$ é um matroide se e só se o Algoritmo 1 obtém a solução ótima para toda a função de pesos considerada.

Exemplo 4.1. *Consideremos o exemplo de um problema do saco-mochila:*

$$\begin{array}{ll} \textit{max} & 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 4x_5 \\ \textit{s. a} & 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 \leq 12 \\ & x_1, \cdots, x_5 \in \{0, 1\}. \end{array}$$

Note-se que os pesos da função objectivo estão já ordenados: $c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq c_4 \geq c_5$. *Usando o Algoritmo 1 obteremos a seguinte solução:*

$I^0 = \emptyset$
$I^0 + \{1\} \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow I^1 = I^0 + \{1\} = \{1\}$
$I^1 + \{2\} \notin \mathcal{F} \quad \Rightarrow I^2 = I^1$
$I^2 + \{3\} \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow I^3 = I^2 + \{3\} = \{1, 3\}$
$I^3 + \{4\} \notin \mathcal{F} \quad \Rightarrow I^4 = I^3$
$I^4 + \{5\} \notin \mathcal{F} \quad \Rightarrow I^5 = I^4 = \{1, 3\}$

A solução encontrada pelo Algoritmo 1 é $I = \{1, 3\}$ *com peso*

$$c(I) = c_1 + c_3 = 12.$$

Contudo, o independente de peso máximo é $\{3, 4, 5\}$ *com peso*

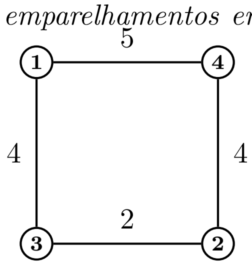
$$c(\{3, 4, 5\}) = c_3 + c_4 + c_5 = 13.$$

De seguida apresentamos outro exemplo onde o Algoritmo 1 falha na determinação da solução ótima, mas neste caso os conjuntos maximais do conjunto dado têm a mesma cardinalidade.

Exemplo 4.2. *Considere-se o seguinte grafo* $G = (V, E)$, *onde associado a cada aresta é indicado o seu peso. Seja*

$$\mathcal{F} = \{S \subset E : \text{ em cada vértice de } V \text{ incide quanto muito uma aresta de } S\}.$$

Portanto, $\mathcal{F}$ *é a família de todos os emparelhamentos em* G.



É fácil de verificar que a solução do Algoritmo 1 para o problema de minimização é $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$ *com peso 7 pois a primeira aresta a ser selecionada é a aresta* $\{1, 4\}$. *Contudo, a solução ótima é* $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$ *com peso 8.*

Observação 4.1. *Os algoritmos podem ser ser adaptados ao problema de minimização, invertendo para isso a ordem da ordenação dos elementos.*

Observação 4.2. *Aplicar o Algoritmo 1 ao problema de maximização a* $(N, \mathcal{F})$ *corresponde a aplicar o Algoritmo 2 ao problema de minimização a* $(N, \mathcal{F}^D)$.

Observação 4.3. *O algoritmo de Kruskal corresponde ao Algoritmo 1, adaptado a um problema de minimização, para o matroide gráfico.*

5 Intersecção de matroides

Muitos problemas de optimização podem ser vistos como problemas de optimização sobre intersecção de matroides, isto é, o conjunto de soluções admissíveis pode ser caracterizado pelos conjuntos independentes que pertencem, simultaneamente, a vários matroides.

Dados dois sistemas de independência $(N, \mathcal{F}_1)$ e $(N, \mathcal{F}_2)$, definimos a sua intersecção por $(N, \mathcal{F})$ onde $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Nota-se que $(N, \mathcal{F})$ é um sistema de independência. Contudo, se $(N, \mathcal{F}_1)$ e $(N, \mathcal{F}_2)$ forem dois matroides, o sistema de independência $(N, \mathcal{F})$ não é, em geral, um matroide, como veremos adiante.

De uma forma análoga é definida a intersecção de um número finito de independentes. Se $\mathcal{F} = \bigcap_{t=1,\ldots,k} \mathcal{F}_t$ e se $(N, \mathcal{F}_t), t = 1, \ldots, k$ forem sistemas de independência, então $(N, \mathcal{F})$ é um sistema de independência.

O resultado seguinte mostra que todo o sistema de independência pode ser obtido a partir da intersecção de um número finito de matroides.

Proposição 5.1. *Todo o sistema de independência $(N, \mathcal{F})$ é a intersecção de um número finito de matroides.*

Prova. *Seja $\mathcal{C}$ a família de cicuitos de $(N, \mathcal{F})$. Em primeiro lugar vamos provar que para cada circuito C, o sistema $(N, \mathcal{F}_C)$ com $\mathcal{F}_C = \{I \subseteq N : C \setminus I \neq \emptyset\}$ define um matroide $M_C = (N, \mathcal{F}_C)$.*

(i) *É evidente que para $I = \emptyset$, $C \backslash I \neq \emptyset$, ou seja $\emptyset \in \mathcal{F}_C$.*

(ii) *Se $I_1 \in \mathcal{F}_C$, então $C \backslash I_1 \neq \emptyset$. Suponhamos que $I_2 \subseteq I_1$ isso implica que $\emptyset \neq C \backslash I_1 \subseteq C \backslash I_2$, ou seja $I_2 \in \mathcal{F}_C$.*

Então de (i) e (ii) resulta que o sistema $(N, \mathcal{F}_C)$ é um sistema de independência.

Vamos agora provar que todos os independentes maximais de $X \subseteq N$ têm a mesma cardinalidade. Seja $X \subseteq N$ e sejam $I, I' \subseteq X$ independentes ($I, I' \in \mathcal{F} \Leftrightarrow C \backslash I \neq \emptyset$ e $C \backslash I' \neq \emptyset$) maximais. Então, dois casos podem ocorrer:

a) *se $C \subseteq X$ então $\mid I \mid = \mid I' \mid = \mid X \mid -1$.*

b) *se $C \not\subseteq X$ então $I = I' = X$ pois $C \backslash X \neq \emptyset$.*

Por fim vamos verificar que o sistema de independência $(N, \mathcal{F})$ coincide com a intersecção de todos os matroides $M_C, C \in \mathcal{C}$, ou seja, $\mathcal{F} = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} \mathcal{F}_C$. Seja $A = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} \mathcal{F}_C$, pretendemos mostrar que $A = \mathcal{F}$. Se $I \in A$ então $I \in \mathcal{F}_C, \forall\, C \in \mathcal{C} \Rightarrow C \backslash I \neq \emptyset, \forall\, C \in \mathcal{C}$. Então I não contém qualquer circuito ($\forall\, C \in \mathcal{C}, C \not\subset I$). Logo $I \in \mathcal{F} \Rightarrow A \subseteq \mathcal{F}$.
Reciprocamente

$$I \in \mathcal{F} \Rightarrow C \backslash I \neq \emptyset,\ \forall\, C \in \mathcal{C} \Rightarrow I \in A \Rightarrow \mathcal{F} \subseteq A.$$

As duas inclusões, $A \subseteq \mathcal{F}$ e $\mathcal{F} \subseteq A$ implicam $A = \mathcal{F}$.

Um conjunto $I \subseteq N : I \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ é uma intersecção de cardinalidade máxima se não existe nenhum conjunto independente $I' \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ com $\mid I' \mid > \mid I \mid$.

Dados pesos $c_i \in \mathbb{R}, i \in N$, um conjunto independente $I \subseteq N : I \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ é uma intersecção de peso máximo se a soma total dos pesos em I, denotada por $C(I)$, for máxima,

$$c(I) = \max\{\sum_{i \in I'} c_i : I' \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2\}$$

Dados dois matroides, $(N, \mathcal{F}_1)$ e $(N, \mathcal{F}_2)$, Edmonds [5] mostrou que a determinação de um independente de cardinalidade máxima

$$\max\{\mid I \mid : I \subseteq \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2\}$$

e a determinação de um independente de peso máximo

$$\max\{\sum_{i \in I} c_i : I \subseteq \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2\}$$

pertencente a ambos os matroides, pode ser feita polinomialmente. Como consequência deste resultado, todos os problemas de otimização combinatória que possam ser modelados como otimização sobre independentes na intersecção de dois matroides estão em $\mathcal{P}$.

5.1 Exemplos de intersecção de matroides

De seguida apresentamos alguns exemplos de intersecção de matroides.

5.1.1 Emparelhamento em grafos bipartidos

Seja $G = (V_1, V_2, E)$ um grafo bipartido onde E é o conjunto de arestas. O conjunto $I \subseteq E$ diz-se um emparelhamento se e só se em cada um dos vértices de V_1 e V_2 incide quanto muito uma aresta em I. Esta definição conduz diretamente à construção dos dois matroides. Note-se que por definição de grafo bipartido, cada aresta é incidente num vértice de V_1 e num vértice de V_2. Portanto os vertices de V_1 definem uma partição das arestas do grafo e os vértices de V_2 definem outra partição. Suponhamos $V_1 = \{1, \ldots, n\}$ e $V_2 = \{1, \ldots, m\}$. Seja $A_i, i \in V_1$ o conjunto de arestas incidentes no vértice i. Assim $A_1, \ldots, A_n$ define uma partição de E. De igual modo, definindo $B_j, j \in V_2$ o conjunto de arestas incidentes no vértice j, então $B_1, \ldots, B_m$ define outra partição de E. Sejam

$$\mathcal{F}_1 = \{S \subseteq E :\mid S \cap A_i \mid \leq 1, i \in V_1\},$$

$$\mathcal{F}_2 = \{S \subseteq E :\mid S \cap B_j \mid \leq 1, j \in V_2\}.$$

Então, $S \subseteq E$ é um emparelhamento em G se e só se $S \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Assim, os emparelhamentos em G correspondem aos aos independentes pertencestes aos matroides da partição $(E, \mathcal{F}_1)$ e $(E, \mathcal{F}_2)$.

Consideremos o exemplo da Figura 2.4. As partições $A_1, \ldots, A_n$ e $B_1, \ldots, B_m$ são, respectivamente:

$A_1 = \{e_1, e_3\}, A_2 = \{e_2, e_4, e_6\}, A_3 = \{e_5, e_5\},$
$B_1 = \{e_1, e_2\}, B_2 = \{e_3, e_4, e_5\}, B_3 = \{e_6, e_7\}.$

5.1.2 Arborescências

Dado um digrafo $\vec{G} = (V, A)$, uma arborescência é um digrafo (V, B), com $B \subseteq A$ tal que se removermos a orientação das arestas em B obtemos uma árvore. Adicionalmente, existe um vértice, designado por raiz, no qual não converge nenhum arco em B (grau de entrada é nulo) e em todos os restantes vértices existe exatamente um arco convergente (grau de entrada é 1).

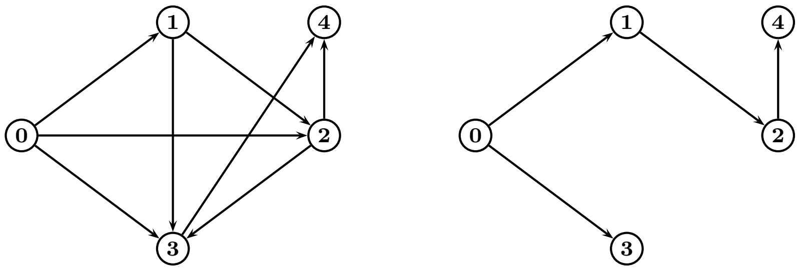


Figura 1: Exemplo de um digrafo G à esquerda e uma arborescência à direita, onde $r = 0$ é a raíz.

As florestas de arborecências correspondem a conjuntos de independentes pertencentes à intersecção de dois matroides, $M_1 = (A, \mathcal{F}_1)$, e $M_2 = (A, \mathcal{F}_2)$. As famílias $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são:

$$\mathcal{F}_1 = \{S \subseteq A : \text{S não contém ciclos uma vez removiada a orientação dos arcos}\},$$

$$\mathcal{F}_2 = \{S \subseteq A :\mid S \cap \delta^-(i) \mid \leq 1, i \in V \setminus \{r\}\},$$

onde r representa a raiz e $\delta^-(i)$ é o conjunto dos arcos convergentes em i. O matroide M_1 é um matroide gráfico e o matroide M_2 é um matroide da partição pois o conjunto $\delta^-(i), i \in V \setminus \{r\}\}$ define uma partição de A. No exemplo da Figura 1, temos a seguinte partição:

$$\delta^-(1) = \{(0,1)\}, \delta^-(2) = \{(0,2),(1,2)\}, \delta^-(3) = \{(0,3),(1,3),(2,3)\}, \delta^-(4) = \{(2,4),(3,4)\}.$$

Cada arborecência em G corresponde a um independente de cardinalidade $\mid V \mid -1$ na interseção dos dois matroides, ou seja, as arborescências em G correspondem aos elementos maximais em $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$.

5.1.3 Ciclo Hamiltoniano

O problema de encontrar um ciclo Hamiltoniano num grafo $G = (V, A)$ com n vértices, $V = \{1, \ldots, n\}$ pode ser transformado no problema da determinação de um caminho Hamiltoniano num grafo $G' = (V', A')$ com $n + 1$ vértices, onde $n + 1$ é um vértice auxiliar. Cada arco em G convergente no vértice 1 é convertido num arco convergente no vértice $n + 1$ em G', todos os restantes arcos em G e G' são idênticos. Assim, um ciclo Hamiltoniano em G corresponde a um caminho Hamiltoniano do vértice 1 para o vértice $n + 1$ em G'.

De seguida vamos descrever o conjunto das soluções admissíveis do problema do caminho Hamiltoneano em G' como independentes pertencentes à intersecção de três matroides, $M_1 = (A', \mathcal{F}_1)$, $M_2 = (A', \mathcal{F}_2)$ e $M_3 = (A', \mathcal{F}_1)$, onde:

$$\mathcal{F}_1 = \{S \subseteq A' : \text{S não contém ciclos uma vez removiada a orientação dos arcos}\},$$

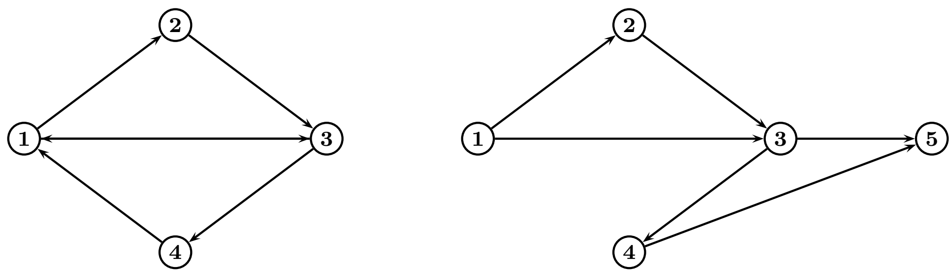


Figura 2: Exemplo de um grafo G à esquerda e o correspondente grafo G' à direita. Ao ciclo Hamiltoniano $1- > 2- > 3- > 4- > 1$ no grafo G corresponde o caminho Hamiltoniano $1- > 2- > 3- > 4- > 5$ no grafo G'.

$$\mathcal{F}_2 = \{S \subseteq A' :\mid S \cap \delta^+(i) \mid \leq 1, i \in \{1, \ldots, n\}\},$$
$$\mathcal{F}_1 = \{S \subseteq A' :\mid S \cap \delta^-(i) \mid \leq 1, i \in \{2, \ldots, n+1\},$$

onde $\delta^+(i)$ é o conjunto dos arcos divergentes de i e $\delta^-(i)$ é o conjunto dos arcos convergentes em i. O matroide M_1 é um matroide gráfico e os matroides M_2 e M_3 são matroides da partição pois os conjuntos $\delta^+(i), i \in \{1, \ldots, n\}$ e $\delta^-(i), i \in \{2, \ldots, n+1\}$ definem duas partições de A'. Então, $S \subseteq A'$ é um caminho Hamiltoneano em G' se e só se $S \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_3$ e $\mid S \mid= n$.

O problema do caixeiro viajante consiste na determinação do ciclo Hamiltoniano de peso mínimo num grafo $G = (V, A)$ com n vértices. Como o problema de caixeiro viajante é um problema NP-difícil, podemos conclui que o problema da determinação do independente de peso ou cardinalidade máxima na intersecção de três ou mais matroides é um problema NP-difícil.

5.2 Intersecção de matroides de cardinalidade máxima

De seguida é estabelecido um resultado importante sobre a intersecção de matroides que generaliza resultados bem conhecidos da otimização combinatória.

Teorema 5.1. *Sejam $M_1 = (N, \mathcal{F}_1)$ e $M_2 = (N, \mathcal{F}_2)$ dois matroides com função característica α_1 e α_2 respectivamente. Então, a seguinte igualdade é satisfeita.*

$$\max_{I \subseteq N}\{|I| : I \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2\} = \min_{X \subseteq N}\{\alpha_1(X) + \alpha_2(N \backslash X)\}. \tag{5.1}$$

No caso de emparelhamento em grafos bipartidos $G = (V_1, V_2, E)$, consideremos os matroides da partição $M_1 = (E, \mathcal{F}_1)$ e $M_2 = (E, \mathcal{F}_2)$ definidos na Secção 5.1.1, onde $S \in \mathcal{F}_i$ se e só se cada vértice em V_i é coberto por, no máximo, uma aresta em S. Portanto, os conjuntos independentes comuns a ambos matroides são os emparelhamentos em G. Sendo $r_i(S)$ a função característica do matroide $M_i, i = 1, 2$, então $r_i(S)$ é igual ao número de vértices em V_i cobertos por S. Portanto, do Teorema 5.1 resulta que a cardinalidade máxima de um emparelhamento de G é igual ao mínimo de $r_1(S) + r_2(E \setminus S)$ sobre todo $S \subseteq E$. Daqui resulta o bem conhecido resultado de König-Egervary:

Num grafo bipartido, a cardinalidade de um emparelhamento máximo é igual à cardinalidade de uma cobertura por vértices mínima.

De seguida vamos descrever um algoritmo para determinar o conjunto independente de cardinalidade máxima comum a dois matroides.

O algoritmo começa por considerar um conjunto $I \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Caso não seja conhecido nenhum outro conjunto $I \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ pode considerar-se $I = \emptyset$. Em cada iteração vai construir-se um novo independente com cardinalidade igual a $\mid I \mid +1$ ou provar que tal independente não existe. No segundo caso o algoritmo termina.

Este processo é feito recorrendo às chamadas sequencias alternadas que, tal como o nome indica, alternadamente adicionam a I elementos em $N \setminus I$ e removem de I elementos em I.

Definição 5.1. Dados dois matroides $\mathcal{M}_1 = (N, \mathcal{F}_1)$ e $\mathcal{M}_2 = (N, \mathcal{F}_2)$ e um independente $I \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, seja $S = (e_1, \ldots, e_s)$ uma sequência de elementos distintos tais que $e_i \in N \setminus I$ para i ímpar e $e_i \in I$ para i par e seja $S_i = (e_1, \ldots, e_i), i \leq s$.

S é uma *sequência alternada* relativamente a I se:

(i) $I + e_1 \in \mathcal{F}_1$.

(ii) Para todo i par, $cl_2(I \triangle S_i) = cl_2(I)$. Portanto $I \triangle S_i \in \mathcal{F}_2$.

(iii) Para todo i ímpar, $i > 1$ $cl_1(I \triangle S_i) = cl_1(I + e_1)$. Portanto $I \triangle S_i \in \mathcal{F}_1$.

onde $\triangle$ indica diferença simétrica.

Se, adicionalmente, $\mid S \mid = s$ é ímpar e $I \triangle S \in \mathcal{F}_2$, então S diz-se uma *sequência de aumento* relativamente a I.

Teorema 5.2. *Dados dois matroides $\mathcal{M}_1 = (N, \mathcal{F}_1)$ e $\mathcal{M}_2 = (N, \mathcal{F}_2)$ e um independente $I \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, então I tem cardinalidade máxima se e só se não admite nenhuma sequência de aumento.*

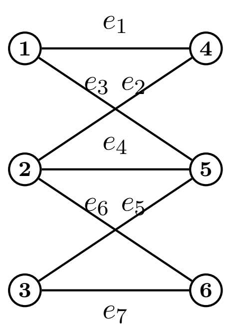
No algoritmo que a seguir se descreve $C_i^{(1)}$ indica o único circuito (caso exista) de $\mathcal{M}_1$ em $I \cup \{e_i\}$ para $e_i \in N \setminus I$ e $C_i^{(2)}$ indica o único circuito (caso exista) de $\mathcal{M}_2$ em $I \cup \{e_i\}$ para $e_i \in N \setminus I$.

As sequências alternadas adicionam ou removem elementos de I. Portanto, vamos associar etiquetas '+' ou '-' aos elementos de N que vão sendo explorados para indicar se vão ser adicionados ou removidos. Adicionalmente, as sequências alternadas correspondem a caminhos num determinado grafo (ver [2]). Portanto, para ser possível recuperar o caminho, a cada elemento desse caminho vamos também associar o seu antecessor. Assim, serão associadas etiquetas i^+ ou i^- aos elementos explorados, onde i indica o antecessor. No caso de não existir antecessor (caso do elemento ser o primeiro da sequência) usamos as etiquetas $\emptyset^+$ ou $\emptyset^-$.

Algoritmo 3 Algoritmo para o problema da determinação da intersecção de matroides de cardinalidade máxima.

1: Dados dois matroides $\mathcal{M}_1 = (N, \mathcal{F}_1)$ e $\mathcal{M}_2 = (N, \mathcal{F}_2)$, com $N = \{e_1, \ldots, e_n\}$, considerar $I \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ (I pode ser o conjunto vazio).
2: Para cada $e_i \in N \setminus I$ encontrar circuitos (caso existam) $C_i^{(1)}, C_i^{(2)}$.
3: Etiquetar com $\emptyset^+$ todo o elemento em $e_i \in N \setminus cl_1(I)$.
4: **if** todas as etiquetas foram pesquisadas **then**
5: Seguir para 23
6: **else**
7: Selecionar o elemento e_i por pesquisar com etiqueta mais antiga.
8: **end if**
9: **if** a etiqueta tem sinal $+$ **then**
10: Seguir para 15
11: **end if**
12: **if** a etiqueta tem sinal $-$ **then**
13: Seguir para 21
14: **end if**
15: Pesquisar a etiqueta $+$ em e_i.
16: **if** $I \cup \{e_i\} \in \mathcal{F}_2$ **then**
17: seguir para 22.
18: **else**
19: Atribuir etiqueta i^- a cada elemento não etiquetado em $C_i^{(2)}$, voltar a 4.
20: **end if**
21: Pesquisar a etiqueta $-$ em e_i atribuindo a etiqueta i^+ a cada elemento não etiquetado e_j tal que $e_i \in C_j^{(1)}$. Voltar a 4
22: Uma sequência de aumento S foi encontrada em 15. Adicionar a I todos os elementos em S com etiqueta $+$ e remover de I todos os elementos em S com etiqueta $-$. Remover todas as etiquetas e voltar a 2.
23: Não existe qualquer sequência de aumento. I é o conjunto de cardinalidade máxima. Parar.

Exemplo 5.1. *Consideremos o seguinte grafo bipartido G.*



Considerando o conjunto maximal inicial $I = \{e_2, e_5\}$ vamos determinar um emparelhamento de cardinalidade máxima. Sejam $\mathcal{M}_1 = (N, \mathcal{F}_1)$ e $\mathcal{M}_2 = (N, \mathcal{F}_2)$ os matroides da partição associados aos conjuntos de vértices $V_1 = \{1, 2, 3\}$ e $V_2 = \{4, 5, 6\}$, respectivamente. Aplicando o Algoritmo 3 obtemos a seguinte tabela onde cada iteração corresponde a uma *linha da tabela.*

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	Etiquetas por explorar	Selecionado
$\emptyset^+$		$\emptyset^+$					e_1, e_3	e_1
	e_1^-						e_3, e_2	e_3
				e_3^-			e_2, e_5	e_2
			e_2^+		e_2^+		e_5, e_4, e_6	e_5
						e_5^+	e_4, e_6, e_7	e_4
							e_6, e_7	e_6

Tabela 1: Aplicação do Algoritmo 3 para a determinação de uma sequência de aumento relativamente ao independente $I = \{e_2, e_5\}$.

O algoritmo termina quando e_6 é adicionado o que conduz à obtenção de uma sequência de aumento. Esta sequência termina em e_6, o seu antecessor é e_2. Por sua vez, o antecessor de e_2 é e_1 e e_1 não tem antecessor, é o primeiro elemento da sequência. Então a sequência de aumento resultante é $e_1 \to e_2 \to e_6$.

Considerando $S = \{e_2, e_1, e_6\}$, o novo conjunto independente é obtido do seguinte modo: $I \triangle S = \{e_1, e_5, e_6\}$.

De seguida apresentamos o algoritmo para o problema da determinação do independente de peso máximo pertencente à intersecção de dois matroides. Relativamente ao Algoritmo 3, note-se que agora não é suficiente encontrar uma sequência de aumento em cada iteração. Adicionalmente, é necessário garantir que essa sequência tenha peso máximo. Isso implica que o algoritmo não pode terminar assim que uma sequência de aumento é encontrada. Há que garantir que a sequência de aumento final é de peso máximo. Assim irá ser necessário reter, em cada iteração, o peso atual da melhor sequência de aumento, $\Delta(S)$, e a correspondente sequência S, que será retida guardando o seu último elemento s. Adicionalmente, para garantir que uma sequência tem peso máximo, há que garantir que essa sequência tem também peso máximo até cada um dos seus elementos intermédios. Portanto, iremos introduzir na etiqueta de cada elemento e_j mais um campo, $\Delta(e_j)$, que indica o peso máximo de uma sequência alternada tendo como e_j o último elemento. Assim, cada elemento pode ser etiquetado várias vezes, sempre que uma sequência alternada de peso maior é encontrada. Se o elemento e_j tem etiqueta i^+, onde e_i é o seu antecessor, então $\Delta(e_j) = \Delta(e_i) + w_j$, pois o peso de uma sequência até e_j é igual ao peso até ao seu antecessor ($\Delta(e_i)$) mais o peso do elemento e_j que está a ser adicionado. De forma análoga, se e_i tem etiqueta i^-, então $\Delta(e_j) = \Delta(e_i) - w_j$.

Algoritmo 4 Algoritmo para o problema da intersecção de matroides de peso máximo.

1: Dados dois matroides $\mathcal{M}_1 = (N, \mathcal{F}_1)$ e $\mathcal{M}_2 = (N, \mathcal{F}_2)$, com $N = \{e_1, \ldots, e_n\}$, considerar $I = \emptyset$. (nenhum elemento se encontra etiquetado).
2: Para cada $e_i \in N \setminus I$ encontrar circuitos (caso existam) $C_i^{(1)}, C_i^{(2)}$.
3: Fazer $\Delta(S) = -\infty$, $\Delta(e_i) = -\infty$ para todo $e_i \in cl_1(I)$.
4: Etiquetar com $\emptyset^+$ todo o elemento em $e_i \in N \setminus cl_1(I)$ e fazer $\Delta(e_i) = w_i$.
5: **if** todas as etiquetas foram pesquisadas e $\Delta(S) > -\infty$ **then**
6:     Seguir para 21
7: **else**
8:     **if** todas as etiquetas foram pesquisadas e $\Delta(S) = -\infty$ **then**
9:         Seguir para 27
10:     **else**
11:         Selecionar o elemento e_i por pesquisar com etiqueta mais antiga. Se a etiqueta tem sinal $+$ seguir para 15. Se tem sinal $-$ seguir para 20
12:     **end if**
13: **end if**
14: Pesquisar a etiqueta $+$ em e_i.
15: **if** $I \cup \{e_i\} \in \mathcal{F}_2$ e $\Delta(e_i) > \Delta(S)$ **then**
16:     fazer $\Delta(S) = \Delta(e_i)$ e $s = i$.
17: **else**
18:     Atribuir a etiqueta i^- a todo o elemento $e_j \in C_i^{(2)} - e_i$ para o qual $\Delta(e_j) < \Delta(e_i) - w_j$ e fazer $\Delta(e_j) = \Delta(e_i) - w_j$. Seguir para 5.
19: **end if**
20: Pesquisar a etiqueta $-$ em e_i atribuindo a etiqueta i^+ a cada elemento e_j tal que $e_i \in C_j^{(1)}$ e $\Delta(e_i) + w_j > \Delta(e_j)$ e fazer $\Delta(e_j) = \Delta(e_i) + w_j$. Voltar a 4.
21: Uma sequência de aumento S terminado em e_s foi identificada.
22: **if** $\Delta(S) \leq 0$ **then**
23:     Parar. O conjunto I é o conjunto da intersecção de peso máximo.
24: **else**
25:     Incrementar I, remover todas as etiquetas e voltar a **??**.
26: **end if**
27: Não existe qualquer sequência de aumento. I é o conjunto de de peso máximo e de cardinalidade máxima. Parar.

Exemplo 5.2. *Consideremos o exemplo do emparelhamento dado no Exemplo 5.1, com os seguintes pesos nas arestas:*

$$w_{e_1} = 6, w_{e_2} = 7, w_{e_3} = 6, w_{e_4} = 6, w_{e_5} = 7, w_{e_6} = 4, w_{e_7} = 6.$$

Facilmente se verifica que $I = \{e_2, e_5\}$ *é o conjunto independente comum aos dois matroides cujo peso é máximo de entre os conjuntos independentes de cardinalidade dois. Vamos aplicar o Algoritmo 4 para determinar o independente de peso máximo com cardinalidade três.*

A sequência de aumento obtida é: $e_3 \to e_5 \to e_7$.
O emparelhamento de peso máximo é $I = \{e_2, e_3, e_7\}$ *com peso* 19.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	s	$\triangle(s)$	Etiquetas por pesquisar	Selecionar
$(6,\emptyset^+)$	$(-\infty,-)$	$(6,\emptyset^+)$	$(-\infty,-)$	$(-\infty,-)$	$(-\infty,-)$	$(-\infty,-)$	$-$	$-\infty$	e_1,e_3	e_1
$(6,\emptyset^+)$	$(-1,e_1^-)$	$(6,\emptyset^+)$	$(-\infty,-)$	$(-\infty,-)$	$(-\infty,-)$	$(-\infty,-)$	$-$	$-\infty$	e_3,e_2	e_3
$(6,\emptyset^+)$	$(-1,e_1^-)$	$(6,\emptyset^+)$	$(-\infty,-)$	$(-1,e_3^-)$	$(-\infty,-)$	$(-\infty,-)$	$-$	$-\infty$	e_2,e_5	e_2
$(6,\emptyset^+)$	$(-1,e_1^-)$	$(6,\emptyset^+)$	$(5,e_2^+)$	$(-1,e_3^-)$	$(3,e_2^+)$	$(-\infty,-)$	$-$	$-\infty$	e_5,e_4,e_6	e_5
$(6,\emptyset^+)$	$(-1,e_1^-)$	$(6,\emptyset^+)$	$(5,e_2^+)$	$(-1,e_3^-)$	$(3,e_2^+)$	$(5,e_5^+)$	$-$	$-\infty$	e_4,e_6,e_7	e_4
$(6,\emptyset^+)$	$(-1,e_1^-)$	$(6,\emptyset^+)$	$(5,e_2^+)$	$(-1,e_3^-)$	$(3,e_2^+)$	$(5,e_5^+)$	$-$	$-\infty$	e_6,e_7	e_6
$(6,\emptyset^+)$	$(-1,e_1^-)$	$(6,\emptyset^+)$	$(5,e_2^+)$	$(-1,e_3^-)$	$(3,e_2^+)$	$(5,e_5^+)$	e_6	3	e_7	e_7
$(6,\emptyset^+)$	$(-1,e_1^-)$	$(6,\emptyset^+)$	$(5,e_2^+)$	$(-1,e_3^-)$	$(3,e_2^+)$	$(5,e_5^+)$	e_7	5	$\emptyset$	

Tabela 2: Aplicação do Algoritmo 4 para a determinação do independente de peso máximo com cardinalidade três.

5.3 Exercícios

1. Indique, justificando, um exemplo de um sistema de independência que não seja um matroide.

2. Seja $(N, \mathcal{F})$ um sistema de independência e $(N, \mathcal{F}^D)$ o seu dual (onde $\mathcal{F}^D = \{I \subseteq N :$ existe uma base B em $\mathcal{B}$ tal que $I \cap B = \emptyset\})$. Mostre que $(N, \mathcal{F}^D)$ é um sistema de independência.

3. Mostre que a intersecção de dois sistema de independência é ainda um sistema de independência.

4. Seja $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $w_1 = 5, w_2 = 3, w_3 = 4, w_4 = 4$ e

$$\mathcal{F} = \{S \subseteq N : \sum_{j \in S} w_j \leq 11\}.$$

   (a) M é um sistema de independência? Justifique.

   (b) M é um matroide? Justifique.

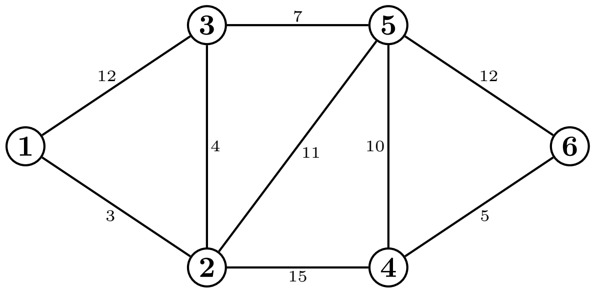
5. Seja $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $w_1 = 5, w_2 = 4, w_3 = 4, w_4 = 5$ e $c_1 = 2$, $c_2 = 3$, $c_3 = 2$, $c_4 = 4$. Seja $M = \{N, \mathcal{F}\}$ onde $\mathcal{F} = \{S \subseteq N : \sum_{j \in S} w_j \leq 10\}$.

   (a) Justifique porque é que M é um matroide.

   (b) Determine $cl(\{1, 2\})$.

   (c) Resolva o seguinte problema: $\max\{\sum_{j \in S} c_j : S \in \mathcal{F}\}$.

6. Considere o seguinte grafo $G = (V, E)$ com pesos associados às arestas:



   (a) Mostre que toda a árvore de suporte de custo mínimo de G contém a aresta $\{4, 5\}$.

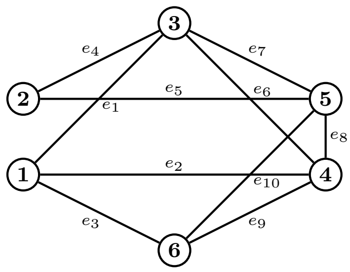
   (b) Seja $\mathcal{M} = (E, \mathcal{F})$ onde E é o conjunto das arestas do grafo apresentado na figura e $\mathcal{F}$ é o conjunto dos cortes $1 - 6$ do grafo. $\mathcal{M}$ é um matroide? Justifique.

7. Seja E um subconjunto arbitrário de n elementos.

   (a) Para um dado p, $0 \leq p \leq n$, seja $\mathcal{F}$ o conjunto de todos os subconjuntos de E com p ou menos elementos. $\mathcal{M} = \{E, F\}$ é um matroide? Justifique.

   (b) Dados dois quaisquer elementos e_1, e_2, de E, seja $\mathcal{F}$ o conjunto de todos os subconjuntos de E que não contêm nem e_1 nem e_2. $\mathcal{M} = \{E, \mathcal{F}\}$ é um matroide? Justifique.

8. Considere o seguinte grafo $G = (V, E)$.



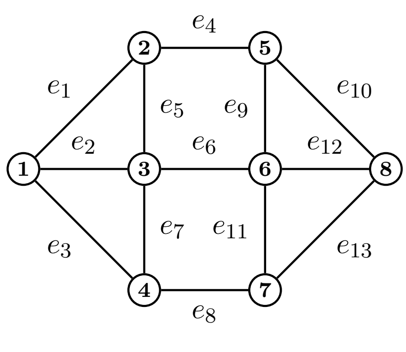
Seja $\mathcal{M} = \{E, \mathcal{F}\}$ um matroide tal que $A \in \mathcal{F}$ sse A não forma ciclos em G. Seja $M^D = \{E, \mathcal{F}^D\}$ o matroide dual de M.

(a) Relativamente a M indique: (i) uma base; (ii) $r(\{e_1, e_4, e_5, e_7\})$; (iii) $cl(\{e_7, e_8, e_9\})$.

(b) Relativamente a M^D indique: (i) $cl(\{e_5\})$; (ii) um exemplo de um subconjunto $A \subseteq E$ dependente.

(c) Determine o conjunto independente I pertencente à intersecção dos matroides M e M^D (isto é, $I \in \mathcal{F} \cap \mathcal{F}^D$) de cardinalidade máxima.

9. Considere o seguinte grafo $G = (V, E)$.



Seja $M = \{E, \mathcal{F}\}$ um matroide tal que $A \in \mathcal{F}$ sse A não contém ciclos em G.

Relativamente a M indique, justificando:

i) uma base;

ii) $car(\{e_1, e_2, e_3, e_5, e_7\})$;

iii) $cl(\{e_2, e_6, e_7, e_{11}\})$.

10. Considere o seguinte grafo bipartido $G = (X, Y, E)$ onde $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6\}$, e $E = \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}\}$. Considere os pesos nas arestas $w_{\{1,4\}} = 5, w_{\{1,5\}} = 8, w_{\{2,4\}} = 6, w_{\{2,6\}} = 9, w_{\{3,5\}} = 7, w_{\{3,6\}} = 6$. Seja $\mathcal{F}$ o conjunto dos emparelhamentos em G.

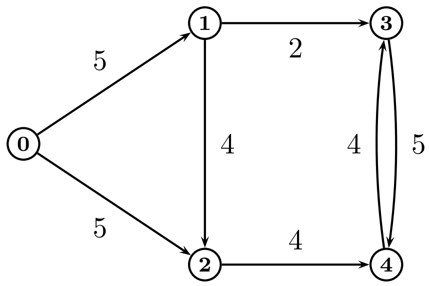
(a) $(E, \mathcal{F})$ é um sistema de independência? Justifique.

(b) $(E, \mathcal{F})$ é um matroide? Justifique.

(c) Determine uma solução admissível para o problema da obtenção do independente de peso máximo em G, usando o algoritmo *greedy*.

(d) A solução obtida em (c) é ótima? Justifique.

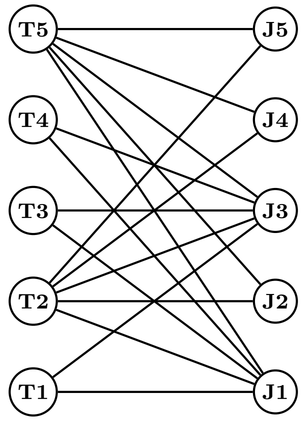
11. Considere o seguinte digrafo G com pesos associados às arestas.



(a) Determine, usando um algoritmo apropriado, uma arborescência em G.

(b) Determine, usando um algoritmo apropriado, a floresta de arborescências de peso máximo em G.

12. Considere o seguinte grafo G onde vértices $T1, \ldots, T5$ representam os trabalhadores e os vértices $J1, \ldots, J5$ representam tarefas. Existe um arco de Ti para Jj se e só se o trabalhador Ti pode realizar a tarefa Jj, $i, j = 1, \ldots, 5$.



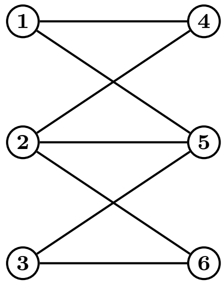
É possível afectar cada trabalhador a uma tarefa distinta? Justifique modelando o problema como um problema de determinação do independente de cardinalidade máxima.

13. Considere o seguinte grafo bipartido G.

Considerando o conjunto maximal inicial $I = \{\{2, 4\}, \{3, 5\}\}$, determine usando algoritmos apropriados para a determinação de independentes na intersecção de dois matroides:

(a) o emparelhamento de cardinalidade máxima;

(b) o emparelhamento de peso máximo, considerando os seguintes pesos nas arestas: $w_{14} = 3$, $w_{15} = 1$, $w_{24} = 3$, $w_{25} = 2$, $w_{26} = 1$, $w_{35} = 4$, $w_{36} = 3$.
(**Resposta** :$\{\{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}\}$)



14. O diretor de um centro de formação pretende afetar seis professores (P1,...,P6) a seis turmas de disciplinas diferentes (D1,...,D6). Para isso elaborou a tabela que se segue com informação das notas médias, resultantes da avaliação feita por parte dos alunos das turmas ao longo dos últimos anos, que cada professor obteve para cada disciplina.

	$D1$	$D2$	$D3$	$D4$	$D5$	$D6$
$P1$	7	6	5	6	5	6
$P2$	6	5	7	5	6	5
$P3$	5	3	5	6	7	6
$P4$	6	4	6	3	5	1
$P5$	5	7	6	1	5	6
$P6$	5	5	5	8	5	6

Com base na tabela, o diretor decidiu escolher por ordem decrescente de nota média o par professor-disciplina com maior pontuação e proceder à respectiva afetação caso nem o professor nem a turma se encontrem já afetados.

(a) Explique como este problema pode ser visto como um problema da determinação de um independente de peso máximo pertencente à intersecção de dois matroides (especifique os matroides).

(b) Indique a solução que o diretor obteve.

(c) Identifique o algoritmo utilizado pelo diretor e explique o que diria ao diretor se este lhe solicitasse a sua opinião sobre o algoritmo por ele utilizado para realizar a afetação.

(d) Assumindo que os professores $P4, P5, P6$ foram já afetados às disciplinas $D4, D5, D6$, resolva o problema de afetação dos professores $P1, P2, P3$ às disciplinas $D1, D2, D3$.

Referências

[1] Schrijver A. *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency*. Springer, 2003.

[2] Lawler E. *Combinatorial optimization: networks and matroids*. Holt, Rinehart and Winston, 1976.

[3] Korte B. H. and Vygen J. *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms*. Algorithms and Combinatorics. Springer, 2008.

[4] Whitney H. On the abstract properties of linear dependence. *American Journal of Mathematics*, 57(3):509–533, 1935.

[5] Edmonds J. Submodular functions, matroids, and certain polyhedra. *Combinatorial Structures and Their Applications*, 5(2570):69–87, 1970.

[6] Edmonds J. Matroids and the greedy algorithm. *Mathematical Programming*, 1:127–136, 1971. 10.1007/BF01584082.

[7] Edmonds J. and Fulkerson D. R. Transversals and matroid partition. *J. Res. Nat. Bur.Standards 69 B*, pages 147–153, 1965.

[8] Nemhauser G. L. and Wolsey L. *Integer and Combinatorial Optimization*. Wiley, 1988.

[9] Tutte W. T. *Connectivity in graphs*. Mathematical expositions. University of Toronto Press, 1966.